APPUNTI: EQUAZIONI LINEARIZZATE DEL VELIVOLO RIGIDO

1. Equazioni del Moto Linearizzate

1.1. Equazioni del Corpo Rigido.

1.1.1. *Equazioni Cardinali del Corpo Rigido.* Le equazioni cardinali per il corpo rigido che traducono la condizione di equilibrio dinamico alla traslazione e quello alla rotazione relativamente al polo P solidale con il corpo sono esprimibili come

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{h}}_P + \mathbf{v}_P \times \mathbf{l} = \mathbf{m}_P, \tag{2}$$

dove con $\mathbf{l}$ e $\mathbf{h}_P$ si indicano rispettivamente il vettore quantità di moto ed il vettore momento delle quantità di moto del corpo rigido. Le velocità lineari ed angolari sono poi $\mathbf{v}_P$ e $\boldsymbol{\omega}$, mentre le forze esterne sono indicate con $\mathbf{f}$ ed i momenti esterni con $\mathbf{m}_P$. Nel seguito per semplicità di notazione, sottindendiamo il fatto che la velocità lineare $\mathbf{v}_P$, il momento delle quantità di moto $\mathbf{h}_P$ ed il momento delle forze esterne $\mathbf{m}_P$ sono da intendersi sempre relativamente ad un polo P prefissato, e quindi omettiamo il pedice P dalle relative espressioni. Qui e nel seguito, adottiamo poi la notazione

$$\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}t} = \dot{\bullet}$$

per indicare l'operazione di derivazione rispetto al tempo t.

Per gli scopi che ci prefiggiamo, risulta conveniente esprimere le equazioni di equilibrio dinamico in termini di componenti in un sistema materiale solidale con il corpo. A questo scopo, ricordiamo che le componenti $\boldsymbol{\pi}$ in assi fissi di un generico vettore $\vec{\boldsymbol{\pi}}$, possono essere espresse in termini delle componenti in assi solidali $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ come

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\pi}}, \tag{3}$$

essendo $\boldsymbol{\alpha}$ la matrice dei coseni direttori degli assi solidali $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ rispetto agli assi fissi $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Le equazioni cardinali 1–2 risultano allora esprimibili come

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}\bar{\mathbf{l}} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\bar{\mathbf{l}}} = \boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{f}}, \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}\bar{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\bar{\mathbf{h}}} + \boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{m}}, \tag{5}$$

ovvero, moltiplicando entrambe le relazioni per $\boldsymbol{\alpha}^T$,

$$\dot{\bar{\mathbf{l}}} + \boldsymbol{\alpha}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} \bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{f}}, \tag{6}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}} + \boldsymbol{\alpha}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{m}}. \tag{7}$$

Le derivate temporali della matrice dei coseni direttori sono esprimibili in funzione delle componenti in assi fissi od in assi solidali del vettore velocità angolare attraverso le due relazioni

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}, \tag{8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \bar{\boldsymbol{\omega}} \times . \tag{9}$$

Tenendo conto di queste ultime due espressioni, le equazioni 6 e 7 divengono allora

$$\dot{\bar{\mathbf{l}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{f}}, \tag{10}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{m}}, \tag{11}$$

che costituiscono le equazioni di equilibrio dinamico per il corpo rigido espresse mediante componenti in assi solidali.

1.1.2. *Equazioni Costitutive.* I vettori quantità di moto e momento delle quantità di moto sono esprimibili in funzione delle velocità lineare and angolare del corpo rigido attraverso la massa m, il tensore momento statico $\mathbf{S}$ ed il tensore d'inerzia $\mathbf{J}$. In termini di componenti in assi solidali, le relazioni costitutive si scrivono

$$\bar{\mathbf{l}} = m\,\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\boldsymbol{\omega}}, \tag{12}$$

$$\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}}, \tag{13}$$

dove le componenti del tensore momento statico sono

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{S}} &= \int_{\mathcal{B}} \varrho\, \bar{\mathbf{r}} \times \mathrm{d}\mathcal{B}, \\
&= \int_{\mathcal{B}} \varrho \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathcal{B}, \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -S_z & S_y \\ S_z & 0 & -S_x \\ -S_y & S_x & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{14}$$

mentre le componenti del tensore d'inerzia risultano essere

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{J}} &= -\int_{\mathcal{B}} \varrho\, \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{r}} \times \mathrm{d}\mathcal{B}, \\
&= \int_{\mathcal{B}} \varrho \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathcal{B}, \\
&= \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

È immediato osservare che, prendendo come polo di riferimento il centro di massa del corpo rigido, le equazioni costitutive si semplificano e divengono

$$\bar{\mathbf{l}} = m\, \bar{\mathbf{v}}, \tag{16}$$

$$\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}}. \tag{17}$$

In virtù del fatto che in questo caso il vettore quantità di moto risulta parallelo al vettore velocità, si ha anche una semplificazione delle equazioni di equilibrio dinamico che divengono

$$\dot{\bar{\mathbf{l}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{f}}, \tag{18}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{m}}. \tag{19}$$

Abbiamo quindi in definitiva, eliminando i momenti cinetici in favore delle velocità, le seguenti espressioni delle equazioni di equilibrio in termini di componenti in assi solidali

$$m\, \dot{\bar{\mathbf{v}}} + m\, \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{f}}, \tag{20}$$

$$\bar{\mathbf{J}}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{m}}. \tag{21}$$

Poniamo ora, come è consuetudine in letteratura, che le componenti in assi solidali del vettore velocità lineare siano

$$\bar{\mathbf{v}} = (u, v, w)^T,$$

che le componenti del vettore velocità angolare siano

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = (p, q, r)^T,$$

che le componenti del vettore forza esterna siano

$$\mathbf{f} = (X, Y, Z)^T,$$

ed infine che le componenti del vettore momento della forza esterna siano

$$\mathbf{m} = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})^T.$$

Avremo allora, espandendo le 20–21, che le equazioni di equilibrio alla traslazione si scrivono

$$m\,(\dot u + qw - rv) = X, \tag{22}$$

$$m\,(\dot v + ru - pw) = Y, \tag{23}$$

$$m\,(\dot w + pv - qu) = Z, \tag{24}$$

mentre le equazioni di equilibrio alla rotazione sono

$$I_x\dot p - I_{yz}(q^2 - r^2) - I_{xz}(\dot r + pq) - I_{xy}(\dot q - rp) - (I_y - I_z)\,qr = \mathcal{L}, \tag{25}$$

$$I_y\dot q - I_{xz}(r^2 - p^2) - I_{xy}(\dot p + qr) - I_{yz}(\dot r - pq) - (I_z - I_x)\,rp = \mathcal{M}, \tag{26}$$

$$I_z\dot r - I_{xy}(p^2 - q^2) - I_{yz}(\dot q + rp) - I_{xz}(\dot p - qr) - (I_x - I_y)\,pq = \mathcal{N}. \tag{27}$$

Queste ultime si semplificano quando il velivolo sia dotato di simmetria relativamente al piano $\mathbf{j}_1\mathbf{j}_3$. Infatti in tal caso i prodotti d'inerzia $\mathbf{I}_{xy}$ e $\mathbf{I}_{yz}$ risultano essere nulli, e l'equilibrio alla rotazione si scrive

$$I_x\dot p - I_{xz}(\dot r + pq) - (I_y - I_z)\,qr = \mathcal{L}, \tag{28}$$

$$I_y\dot q - I_{xz}(r^2 - p^2) - (I_z - I_x)\,rp = \mathcal{M}, \tag{29}$$

$$I_z\dot r - I_{xz}(\dot p - qr) - (I_x - I_y)\,pq = \mathcal{N}. \tag{30}$$

Un'ulteriore semplificazione delle relazioni si avrebbe qualora ci si riferisse ad assi principali d'inerzia, per i quali anche il prodotto d'inerzia $\mathbf{I}_{xz}$ si annulla, ottenendo semplicemente che

$$I_x\dot p - (I_y - I_z)\,qr = \mathcal{L}, \tag{31}$$

$$I_y\dot q - (I_z - I_x)\,rp = \mathcal{M}, \tag{32}$$

$$I_z\dot r - (I_x - I_y)\,pq = \mathcal{N}. \tag{33}$$

1.1.3. *Equazioni Cinematiche.* Le equazioni di equilibrio dinamico e le equazioni costitutive dei momenti cinetici ricavate nei precendenti paragrafi vanno completate con le equazioni cinematiche che pongono in relazione le velocità lineari con le derivate del vettore posizione e le velocità angolari con le derivate dei parametri di orientazione. Le prime possono essere epresse come

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}, \\ &= \boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Si noti però che generalmente la dipendenza dalla posizione delle forze esterne agenti su di un velivolo convenzionale è di natura particolare. Infatti la dipendenza dalla quota è molto debole in condizioni di volo normale, e potenzialmente importante solo in condizioni particolari quali il volo in prossimità del terreno. Un'ulteriore dipendenza dalla posizione si avrebbe qualora si considerasse il volo in atmosfera disturbata, ovvero in presenza di raffiche. Per gli scopi che qui ci prefiggiamo, possiamo quindi ritenere le equazioni relative alla traiettoria del velivolo disaccoppiate a tutti gli effetti dalle restanti equazioni. Sotto questa ipotesi, le equazioni 34 possono allora essere integrate a posteriori, una volta risolto il problema dell'integrazione delle equazioni del moto.

È pratica comune nella letteratura dedicata alla meccanica del volo, adottare gli angoli di Cardano per parametrizzare le rotazioni. In generale ciò non è vantaggioso, ma vedremo invece che questa scelta porta a scrivere relazioni semplici nel caso linearizzato. Avendo quindi posto

$$\mathbf{q} = (\phi, \theta, \psi)^T,$$

dove ϕ è l'angolo di rollio, θ l'angolo di beccheggio e ψ l'angolo di imbardata, le componenti del vettore velocità angolare in assi fissi e solidali sono esprimibili in funzione delle derivate temporali di $\mathbf{q}$ come

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \tag{35}$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \tag{36}$$

dove è per esempio

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{37}$$

1.2. **Linearizzazione delle Equazioni.** Con lo scopo di derivare delle equazioni lineari sulle quali poter operare per poter discutere della stabilità dinamica del velivolo, procediamo alla linearizzazione attorno ad una condizione nota di equilibrio delle equazioni precedentemente ricavate.

Siamo quindi nella situazione di dover linearizzare delle equazioni $\mathbf{r}$, funzioni di un set di parametri $\mathbf{p}$, ovvero

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}) = 0. \tag{38}$$

Sviluppando in serie ed arrestandoci al primo ordine, abbiamo quindi

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}}\right|_0 \mathrm{d}\mathbf{p} + \mathbf{r}(\mathbf{p}_0) = 0, \tag{39}$$

dove il pedice $(\bullet)_0$ indica quantità valutate in corrispondenza della condizione di riferimento. In virtù del fatto che la condizione di riferimento è anche una condizione di equilibrio, le equazioni linearizzate risultano essere semplicemente

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}}\right|_0 \mathrm{d}\mathbf{p} = 0. \tag{40}$$

Nel seguito, specializziamo queste equazioni al caso del velivolo rigido.

1.2.1. *Linearizzazione delle Forze d'Inerzia.* Le forze di natura inerziale per il corpo rigido sono state ricavate in precedenza e si scrivono in termini di componenti in assi solidali

$$\bar{\mathbf{f}}_I = m\,\dot{\bar{\mathbf{v}}} + m\,\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}}, \tag{41}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_I = \bar{\mathbf{J}}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}}, \tag{42}$$

riferendosi al centro di massa del sistema. Si vede facilmente che la loro linearizzazione si scrive semplicemente

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}_I = m\,\mathrm{d}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + m\,\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} - m\,\bar{\mathbf{v}} \times \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}, \tag{43}$$

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{m}}_I = \bar{\mathbf{J}}\mathrm{d}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{J}}\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}, \tag{44}$$

$$= \bar{\mathbf{J}}\mathrm{d}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \big(\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{J}} - (\bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}})\times\big)\,\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}. \tag{45}$$

1.2.2. *Linearizzazione delle Forze Esterne.* Le forze ed i momenti esterni agenti su di un velivolo sono generalmente di natura gravitazionale, propulsiva ed aerodinamica, ovvero in simboli

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^G + \mathbf{f}^P + \mathbf{f}^A, \tag{46}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^G + \mathbf{m}^P + \mathbf{m}^A, \tag{47}$$

dove gli apici ricordano la nature delle forze.

Consideriamo innanzitutto le forze di natura gravitazionale, per le quali il discorso risulta più semplice. Per esprimere la linearizzazione di queste ultime ricordiamo che l'incremento della matrice dei coseni direttori $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$ è esprimibile attraverso il vettore rotazione incrementale $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}}$ come

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}} \times \boldsymbol{\alpha}, \tag{48}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}\times, \tag{49}$$

a seconda che si faccia uso di componenti in assi fissi od in assi solidali. Tendendo conto delle relazioni precedenti, e facendo uso del fatto che la forza di gravità ha ovviamente componenti costanti in assi fissi, otteniamo la seguente espressione per la linearizzazione delle forze di gravità

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}^G &= \mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{f}^G), \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{f}^G, \\ &= \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{f}^G \times \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}}, \\ &= \bar{\mathbf{f}}^G \times \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}. \end{aligned} \tag{50}$$

Avendo riferito le equazioni del moto al centro di massa del sistema, il momento della forze di gravità rispetto al polo usato risulta essere nullo.

Per poter procedere alla linearizzazione delle restanti forze, propulsive ed aerodinamiche, è necessario specificarne le leggi costitutive. Una distinzione netta fra forze aerodinamiche e forze di natura propulsiva è spesso discutibile. È infatti facile immaginare come vi possa essere in generale una profonda interazione fra il campo aerodinamico generato dal propulsore (per esempio la scia di un'elica) ed il campo aerodinamico generato dal moto del velivolo attraverso il mezzo fluido. Chiaramente l'interazione può avvenire nei due sensi, basti pensare all'effetto del campo di moto attorno ad un'ala sulla presa d'aria di un motore a getto. Adottiamo un modello costitutivo semplice per le forze di natura propulsiva, identificando queste ultime con la trazione ed esprimendo le loro variazioni in termini della sola escursione di manetta δ_T, ovvero

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}^P = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^P}{\partial \delta_T}\mathrm{d}\delta_T, \tag{51}$$

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{m}}^P = \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^P}{\partial \delta_T}\mathrm{d}\delta_T \tag{52}$$

Per quanto riguarda forze e momenti aerodinamici, si può affermare che in generale queste sono dei funzionali delle variabili di stato, oltre che di un certo numero di parametri, ovvero dipendono non solo dal valore istantaneo di tali quantità ma anche dalla loro storia. Inoltre, la dipendenza delle sollecitazioni di natura aerodinamica dall'atto di moto del sistema è di natura particolare, in quanto tali sollecitazioni non dipendono dall'orientazione assoluta del sistema stesso, ma solo dal suo moto relativo rispetto al mezzo fluido. Ciò si traduce nel dire che le componenti delle sollecitazioni aerodinamiche viste da un osservatore solidale con il sistema, risultano essere dipendenti solo dalle componenti dell'atto di moto nello stesso sistema solidale, oltre naturalmente che da un certo numero di parametri quali le caratteristiche del mezzo fluido e l'attuazione dei comandi. Formalmente, ciò può essere espresso con la seguente simbologia

$$\bar{\mathbf{f}}^A(t) = \bar{\mathbf{f}}^A(\bar{\mathbf{v}}(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}(\tau), \boldsymbol{\delta}(\tau), \boldsymbol{\sigma}), \tag{53}$$

$$\bar{\mathbf{m}}^A(t) = \bar{\mathbf{m}}^A(\bar{\mathbf{v}}(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}(\tau), \boldsymbol{\delta}(\tau), \boldsymbol{\sigma}) \tag{54}$$

dove $-\infty \leq \tau \leq t$, $\boldsymbol{\delta}$ è un vettore di comandi e $\boldsymbol{\sigma}$ è un vettore dove abbiamo raggruppato tutti gli altri parametri da cui vengono a dipendere forze e momenti aerodinamici (per esempio, pressione dinamica, ecc.). Per un velivolo ad ala fissa convenzionale si ha $\boldsymbol{\delta} = (\delta_A, \delta_E, \delta_R, \delta_T)$, essendo δ_A la deflessione media degli alettoni, δ_E la deflessione dell'equilibratore, δ_R la deflessione del timone di direzione e δ_T la posizione della manetta.

Per semplificare la trattazione seguente, adottiamo un modello stazionario per l'aerodinamica, ovvero assumiamo che le sollecitazioni aerodinamiche all'istante generico di tempo t dipendano solo dallo stato del sistema e dal valore dei parametri allo stesso istante t. Simbolicamente, ciò si esprime come

$$\bar{\mathbf{f}}^A(t) = \bar{\mathbf{f}}^A(\bar{\mathbf{v}}(t), \bar{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \boldsymbol{\sigma}), \tag{55}$$

$$\bar{\mathbf{m}}^A(t) = \bar{\mathbf{m}}^A(\bar{\mathbf{v}}(t), \bar{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \boldsymbol{\sigma}). \tag{56}$$

Tale modello equivale ad assumere che le forze aerodinamiche si adattino istantaneamente a variazioni dello stato del sistema e dei parametri addizionali da cui dipendono. Ciò in generale è chiaramente null'altro che un modello approssimato delle realtà, ma si osservi comunque che ciò è tanto più vero tanto più i tempi caratteristici dell'aerodinamica sono piccoli e separati dai tempi caratteristici del sistema. Tipicamente, quando si consideri semplicemente un'approssimazione rigida del velivolo, questa separazione dei tempi caratteristici è in effetti una buona approssimazione della realtà.

Avendo quindi specificato le leggi costitutive delle forze di origine aerodinamica, possiamo procedere alla linearizzazione delle stesse. Avremo quindi

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}^A = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \bar{\mathbf{v}}}\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}, \tag{57}$$

$$\mathrm{d}\bar{\mathbf{m}}^A = \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \bar{\mathbf{v}}}\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}. \tag{58}$$

Le derivate di forze e momenti aerodinamici rispetto all'atto di moto sono note come derivate di stabilità. La loro determinazione è solitamente un compito notevolmente complesso, che spesso richiede l'interazione di tecniche numeriche e sperimentali. Si noti come le derivate di stabilità siano in generale da riguardarsi come delle funzioni non lineari dell'atto di moto e dei parametri.

1.2.3. *Derivate di Stabilità Disaccoppiate.* Pur se la determinazione dei valori delle derivate di stabilità è un compito solitamente gravoso e complesso, è possibile sotto ipotesi abbastanza generali poter discutere quale sia la loro struttura, ovvero è possibile determinare a priori quali termini delle derivate stesse siano nulle.

Consideriamo infatti il caso di un velivolo simmetrico in volo simmetrico. In questo caso avremo sicuramente che perturbazioni di variabili di stato che descrivono il moto del sistema nel piano di simmetria non comportano la nascita di perturbazioni in forze e momenti aerodinamici agenti fuori dal piano di simmetria stesso. Ipotizziamo ora che sia vero anche il contrario, ovvero che perturbazioni di variabili di stato che descrivono il moto del velivolo fuori del piano di simmetria non generino perturbazioni nelle forze e momenti aerodinamici agenti nel piano di simmetria. È chiaro che, mentre la prima ipotesi è sostanzialmente rigorosa per un velivolo simmetrico in volo simmetrico, la seconda sarà verificata solo in modo approssimato.

Per fissare le idee, si consideri per esempio la componente X della forza aerodinamica. Per quanto detto, essendo questa agente nel piano di simmetria del velivolo, essa può dipendere solo dalle perturbazioni di variabili di stato che descrivano il moto nello stesso piano, ovvero dalle componenti u e w della velocità lineare e dalla componente q della velocità angolare. Il risultato opposto si ottiene per la componente Y della forza che, agendo fuori dal piano, potrà dipendere solo da perturbazioni della componente v della velocità lineare e delle componenti p e r della velocità angolare. Utilizzando il medesimo ragionamento, si può arrivare a compilare il quadro completo delle derivate di stabilità differenti dallo zero, sia per quanto riguarda le derivate delle forze aerodinamiche che per le derivate dei momenti aerodinamici. Queste risultano essere

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \bar{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} X_u & 0 & X_w \\ 0 & Y_v & 0 \\ Z_u & 0 & Z_w \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & X_q & 0 \\ Y_p & 0 & Y_r \\ 0 & Z_q & 0 \end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \bar{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{L}_v & 0 \\ \mathcal{M}_u & 0 & \mathcal{M}_w \\ 0 & \mathcal{N}_v & 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_p & 0 & \mathcal{L}_r \\ 0 & \mathcal{M}_q & 0 \\ \mathcal{N}_q & 0 & \mathcal{N}_r \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Si noti la struttura a "scacchiera" delle derivate di stabilità, struttura che traduce il disaccoppiamento longitudinale/latero–direzionale precedentemente annunciato.

1.2.4. *Linearizzazione delle Equazioni Cinematiche.* Per poter completare il quadro di equazioni linearizzate del moto del velivolo rigido attorno ad una configurazione di riferimento, dobbiamo procedere alla linearizzazione delle equazioni cinematiche di traslazione e di rotazione. La linearizzazione delle 34 si scrive

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\dot{\mathbf{x}} &= \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}}, \\ &= \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\alpha}\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}, \end{aligned} \tag{61}$$

mentre la linearizzazione delle 36 risulta essere

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}} &= \mathrm{d}\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q})\mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}, \\ &= \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}\mathbf{q} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q})\mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \tag{62}$$

Limitatamente agli scopi che ci prefiggiamo, risulta inutile specificare ulteriormente la struttura del termine $\mathrm{d}\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \bar{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}\mathbf{q}$. Infatti questo termine andrà valutato in corrispondenza della configurazione di riferimento, che sceglieremo essere una situazione di volo uniforme tale per cui si abbia velocità angolare nulla e quindi $\dot{\mathbf{q}} = 0$.

1.3. **Equazioni Linearizzate.** Avendo ottenuto le espressioni delle linearizzazioni di tutti i termini delle forze inerziali ed esterne oltre che delle quantità cinematiche, possiamo finalmente scrivere la forma finale delle equazioni alle perturbazioni per il velivolo rigido. Le equazioni di equilibrio alla traslazione risultano essere

$$
\begin{aligned}
(63) \quad m\,\mathrm{d}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \left(m\,\bar{\boldsymbol{\omega}} \times - \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \bar{\mathbf{v}}} \right) \mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} - \left(m\,\bar{\mathbf{v}} \times + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}} \right) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\mathbf{f}}^G \times \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}} &= \\
= \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^A}{\partial \boldsymbol{\delta}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^P}{\partial \boldsymbol{\delta}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}&,
\end{aligned}
$$

mentre le equazioni di equilibrio alla rotazione sono

$$
\begin{aligned}
(64) \quad \bar{\mathbf{J}}\mathrm{d}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \bar{\mathbf{v}}}\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} + \left(\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{J}} - (\bar{\mathbf{J}}\bar{\boldsymbol{\omega}}) \times - \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}} \right) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}} &= \\
= \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^A}{\partial \boldsymbol{\delta}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^P}{\partial \boldsymbol{\delta}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}&.
\end{aligned}
$$

2. Disaccoppiamento Longitudinale/Latero–Direzionale

È importante osservare a questo punto che il gruppo di equazioni 63–64 è disaccoppiabile. Il disaccoppiamento traduce il fatto che le equazioni del moto e cinematiche nel piano di simmetria del velivolo non coinvolgono le variabili di stato che descrivono il moto del velivolo fuori del piano stesso, e viceversa. Ciò è facilmente deducibile dall'osservazione del quadro completo 65. Si noti che ciò deriva solo dall'avere considerato un velivolo dotato di simmetria e dall'avere ipotizzato una natura disaccoppiata delle derivate di stabilità, come detto al §1.2.3.

2.1. Equazioni Linearizzate Longitudinali. Dall'esame della 65 otteniamo quindi un primo gruppo di equazioni alle perturbazioni, relative al moto nel piano di simmetria del velivolo. Queste sono

$$
\begin{aligned}
(66) \quad & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}\dot{u} \\ \mathrm{d}\dot{w} \\ \mathrm{d}\dot{q} \\ \mathrm{d}\dot{\theta} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & -X_q & mg\cos\theta \\ -Z_u & -Z_w & -mV - Z_q & mg\sin\theta \\ -\mathcal{M}_u & -\mathcal{M}_w & -\mathcal{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}w \\ \mathrm{d}q \\ \mathrm{d}\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^L \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}.
\end{aligned}
$$

Definiamo quindi un vettore di variabili di stato longitudinali $\mathbf{Y}^L$

$$
\mathbf{Y}^L = (\mathrm{d}u, \mathrm{d}w, \mathrm{d}q, \mathrm{d}\theta)^T,
$$

così che le 66 possono essere scritte in forma compatta come

$$
(67) \qquad \mathbf{A}^L \dot{\mathbf{Y}}^L + \mathbf{B}^L \mathbf{Y}^L = \mathbf{C}^L \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}.
$$

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\dot{u} \\ \mathrm{d}\dot{v} \\ \mathrm{d}\dot{w} \\ \mathrm{d}\dot{p} \\ \mathrm{d}\dot{q} \\ \mathrm{d}\dot{r} \\ \mathrm{d}\dot{\phi} \\ \mathrm{d}\dot{\theta} \\ \mathrm{d}\dot{\psi} \end{Bmatrix} + \tag{65}
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} -X_u & 0 - X_w & \\ 0 & -Y_v & 0 \\ -Z_u & 0 & -Z_w \end{bmatrix} & -m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -V \\ 0 & V & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & X_q & 0 \\ Y_p & 0 & Y_r \\ 0 & Z_q & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -mg\cos\theta & 0 \\ mg\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & -mg\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{L}_v & 0 \\ -\mathcal{M}_u & 0 & -\mathcal{M}_w \\ 0 & -\mathcal{N}_v & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_p & 0 & -\mathcal{L}_r \\ 0 & -\mathcal{M}_q & 0 \\ -\mathcal{N}_p & 0 & -\mathcal{N}_r \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\theta/\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos\theta \end{bmatrix} & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}w \\ \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}q \\ \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\psi \end{Bmatrix} =
$$

$$
= \mathbf{C}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}
$$

TABELLA 1. Equazioni linearizzate.

2.2. **Equazioni Linearizzate Latero–Direzionali.** Il secondo gruppo di equazioni alle perturbazioni risulta essere

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & -I_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{xz} & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}\dot{v} \\ \mathrm{d}\dot{p} \\ \mathrm{d}\dot{r} \\ \mathrm{d}\dot{\phi} \\ \mathrm{d}\dot{\psi} \end{Bmatrix} + \tag{68}$$

$$+ \begin{bmatrix} -Y_v & -Y_p & mV - Y_r & mg\cos\theta & 0 \\ -\mathcal{L}_v & -\mathcal{L}_p & -\mathcal{L}_r & 0 & 0 \\ -\mathcal{N}_v & -\mathcal{N}_p & -\mathcal{N}_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sin\theta/\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}\psi \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^{LD}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}.$$

Anche in questo caso, definiamo un vettore di variabili di stato latero–direzionali $\mathbf{Y}^{LD}$,

$$\mathbf{Y}^{LD} = (\mathrm{d}v, \mathrm{d}p, \mathrm{d}r, \mathrm{d}\phi, \mathrm{d}\psi)^T,$$

così da poter scrivere le 68 nella forma compatta

$$\mathbf{A}^{LD}\dot{\mathbf{Y}}^{LD} + \mathbf{B}^{LD}\mathbf{Y}^{LD} = \mathbf{C}^{LD}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}. \tag{69}$$

2.3. **Trasformazione tra Sistemi di Assi Materiali.** Si consideri la trasformazione fra due sistemi di assi solidali. Siano $\boldsymbol{\alpha}^1$ e $\boldsymbol{\alpha}^2$ le matrici dei coseni direttori della prima e della seconda terna rispetto alla terna di assi fissi. Sia inoltre $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ la matrice dei coseni direttori della prima terna rispetto alla seconda. Si avrà allora la seguente relazione fra le tre matrici di coseni direttori

$$\boldsymbol{\alpha}^1 = \boldsymbol{\alpha}^2\bar{\boldsymbol{\gamma}}. \tag{70}$$

Le componenti $\boldsymbol{\pi}$ del generico vettore $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ nella terna assoluta sono poi esprimibili in funzione delle componenti $\bar{\boldsymbol{\pi}}^1$ e $\bar{\boldsymbol{\pi}}^2$ nelle terne solidali come

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\alpha}^1\bar{\boldsymbol{\pi}}^1, \\ &= \boldsymbol{\alpha}^2\bar{\boldsymbol{\pi}}^2, \end{aligned} \tag{71}$$

da cui otteniamo immediatamente il legame tra le componenti delle due terne

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\pi}}^2 &= \boldsymbol{\alpha}^{2^T}\boldsymbol{\alpha}^1\bar{\boldsymbol{\pi}}^1, \\ &= \bar{\boldsymbol{\gamma}}\bar{\boldsymbol{\pi}}^1. \end{aligned} \tag{72}$$

Differenziando la precedente relazione, si ottiene immediatamente l'espressione della relazione fra gli incrementi delle componenti del vettore $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ nei due sistemi solidali

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\pi}}^2 = \bar{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\pi}}^1, \tag{73}$$

dove si è fatto uso del fatto che, essendo entrambe le terne solidali, si ha $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\gamma}} = 0$.

Tenendo conto della 73, possiamo ora ricavare la legge di trasformazione delle derivate di stabilità al variare della terna solidale

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}^{2^A} &= \bar{\gamma}\mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}^{1^A}, \\
&= \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\bar{\mathbf{v}}^1}\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}}^1 + \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\bar{\boldsymbol{\omega}}^1}\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^1 + \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}, \\
&= \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\bar{\mathbf{v}}^1}\bar{\gamma}^T\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}}^2 + \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\bar{\boldsymbol{\omega}}^1}\bar{\gamma}^T\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^2 + \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Le derivate di stabilità $\partial\bar{\mathbf{f}}^{2^A}/\partial\bar{\mathbf{v}}^2$, $\partial\bar{\mathbf{f}}^{2^A}/\partial\bar{\boldsymbol{\omega}}^2$, $\partial\bar{\mathbf{f}}^{2^A}/\partial\boldsymbol{\delta}$ relative alla seconda terna solidale sono quindi esprimibili in funzione delle derivate di stabilità relative alla prima terna attraverso le relazioni

$$
\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{2^A}}{\partial\bar{\mathbf{v}}^2} = \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\bar{\mathbf{v}}^1}\bar{\gamma}^T, \quad \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{2^A}}{\partial\bar{\boldsymbol{\omega}}^2} = \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\bar{\boldsymbol{\omega}}^1}\bar{\gamma}^T, \quad \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{2^A}}{\partial\boldsymbol{\delta}} = \bar{\gamma}\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}^{1^A}}{\partial\boldsymbol{\delta}}. \tag{75}
$$

2.4. **Angoli Aerodinamici.** Il vettore velocità lineare può essere individuato dalle sue componenti in una terna solidale con il velivolo. In alternativa a questa rappresentazione, è pratica comune identificare lo stesso vettore attraverso il suo modulo e due angoli, l'angolo di incidenza α e l'angolo di deriva β. Tali angoli sono definiti in funzione delle componenti del vettore velocità in assi corpo come

$$
\tan\alpha = \frac{w}{u}, \tag{76}
$$

$$
\sin\beta = \frac{v}{V}. \tag{77}
$$

Entrambi gli angoli sono definiti nell'intervallo $-\pi \leq \alpha, \beta \leq \pi$. Ponendo quindi

$$
\boldsymbol{\nu} = (V, \alpha, \beta)^T,
$$

il legame fra i parametri $\bar{\mathbf{v}}$ e $\boldsymbol{\nu}$ risulta essere

$$
\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}) = \left\{ \begin{array}{c} V\ \cos\alpha\cos\beta \\ V\ \sin\beta \\ V\ \sin\alpha\cos\beta \end{array} \right\}. \tag{78}
$$

La relazione fra gli incrementi dei parametri nelle due rappresentazioni è quindi

$$
\mathrm{d}\bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}. \tag{79}
$$

Lo Jacobiano di trasformazione $\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})/\partial \boldsymbol{\nu}$ si ottiene derivando le 78 e risulta essere

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -V\ \cos\alpha\sin\beta & -V\ \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta & V\ \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -V\ \sin\alpha\sin\beta & V\ \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} u/V & -uv/U & -w \\ v/V & U & 0 \\ w/V & -vw/U & u \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{80}$$

dove si è messa in evidenza la componente U della velocità di traslazione nel piano di simmetria del velivolo

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{u^2 + w^2}, \\ &= V\ \cos\beta. \end{aligned}$$

2.5. **Equazioni Linearizzate di Traslazione in Assi Vento.** Nella trattazione linearizzata della meccanica del volo risulta a volte conveniente riferire la equazioni di traslazione alle perturbazioni in assi vento. La scrittura delle equazioni di rotazione nello stesso sistema d'assi non solidale non risulta però essere conveniente perchè preclude il disaccoppiamento longitudinale/latero–direzionale delle equazioni. Infatti, nel caso di condizione di volo non simmetrico, le nove componenti del tensore d'inerzia $\hat{\mathbf{J}}$ risulterebbero in generale tutte diverse da zero.

Nel caso della trattazione mista assi vento/assi solidali, l'atto di moto del velivolo è quindi espresso mediante i parametri $\boldsymbol{\nu}$ e mediante le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Nelle equazioni di traslazione compaiono le componenti di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ nel sistema assi vento, mentre nelle equazioni di rotazione sono presenti le componenti dello stesso vettore nel sistema solidale. È quindi chiaro che è necessario sviluppare le relazioni intercorrenti fra le componenti della velocità angolare nei due sistemi d'assi.

2.5.1. *Sistema d'Assi Vento.* La terna ortogonale non solidale di assi vento è identificata da tre versori così definiti

$$\vec{\mathbf{k}}_1 = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}, \tag{81}$$

$$\vec{\mathbf{k}}_3 = \frac{\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{j}}_2}{|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{j}}_2|}, \tag{82}$$

$$\vec{\mathbf{k}}_2 = \vec{\mathbf{k}}_3 \times \vec{\mathbf{k}}_1. \tag{83}$$

Il primo versore risulta quindi essere sempre allineato con il vettore velocità di traslazione, mentre il secondo è perpendicolare a $\vec{\mathbf{v}}$ ed al secondo versore della terna solidale. Il terzo versore è poi scelto in modo da identificare una terna destra ortogonale.

2.5.2. *Trasformazioni Assi Stabilità/Assi Vento.* La terna di assi vento è ottenibile a partire dalla terna di assi solidali tramite una rotazione dell'angolo $-\alpha$ attorno al versore $\vec{\mathbf{j}}_2$ seguita da una rotazione dell'angolo β attorno al versore $\vec{\mathbf{k}}_3$. Dalla definizione stessa della terna assi vento, abbiamo che il versore $\vec{\mathbf{k}}_3$ è ottenuto dal versore $\vec{\mathbf{j}}_3$ per rotazione dell'angolo $-\alpha$ attorno al versore $\vec{\mathbf{j}}_2$, ovvero in componenti

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{j}_3. \tag{84}$$

La terna vento può quindi anche essere ottenuta mediante una rotazione di β attorno a $\mathbf{j}_3$ seguita da una rotazione di $-\alpha$ attorno a $\mathbf{j}_2$. Infatti, indicando con $\boldsymbol{\alpha}^w$ e $\boldsymbol{\alpha}^b$ le matrici dei coseni direttori della terna assi vento e della terna solidale rispetto al sistema fisso, si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^w &= \mathbf{R}(\beta\,\mathbf{k}_3)\mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\boldsymbol{\alpha}^b,\\ &= \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}^T(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{k}_3)\mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\boldsymbol{\alpha}^b,\\ &= \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3)\boldsymbol{\alpha}^b.\end{aligned} \tag{85}$$

Le matrici dei coseni direttori delle due terne rispetto al sistema fisso sono legate l'una all'altra attraverso la matrice dei coseni direttori della terna assi vento rispetto a quella solidale

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\alpha}^{b^T}\boldsymbol{\alpha}^w,\\ &= \left[\bar{\mathbf{k}}_1|\bar{\mathbf{k}}_2|\bar{\mathbf{k}}_3\right],\end{aligned} \tag{86}$$

o dalla sua trasposta, ovvero la matrice dei coseni direttori della terna solidale rispetto a quella vento

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\gamma}} &= \bar{\boldsymbol{\gamma}}^T,\\ &= \boldsymbol{\alpha}^{w^T}\boldsymbol{\alpha}^b,\\ &= \left[\hat{\mathbf{j}}_1|\hat{\mathbf{j}}_2|\hat{\mathbf{j}}_3\right],\end{aligned} \tag{87}$$

dove abbiamo usato il simbolo $(\hat{\bullet})$ per indicare le componenti di un vettore in assi vento.

2.5.3. *Legame fra le Velocità Angolari dei Sistemi d'Assi Stabilità e Vento.* Il legame fra le velocità angolari delle due terne si può ricavare differenziando rispetto al tempo una della 85, ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^w = \dot{\mathbf{R}}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3)\boldsymbol{\alpha}^b + \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\dot{\mathbf{R}}(\beta\,\mathbf{j}_3)\boldsymbol{\alpha}^b +&\\ + \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3)\dot{\boldsymbol{\alpha}}^b.&\end{aligned} \tag{88}$$

Siano $\vec{\boldsymbol{\omega}}^w$ e $\vec{\boldsymbol{\omega}}^b$ i vettori velocità angolare delle due terne, ovvero in termini di componenti

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^w\boldsymbol{\alpha}^{w^T} = \boldsymbol{\omega}^w\times, \tag{89}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^b\boldsymbol{\alpha}^{b^T} = \boldsymbol{\omega}^b\times. \tag{90}$$

Si definiscano ora altri due vettori velocità angolare, $\vec{\boldsymbol{\omega}}^2$ e $\vec{\boldsymbol{\omega}}^3$, relativi alle rotazioni attorno al versore $\mathbf{j}_2$ ed al versore $\mathbf{j}_3$, ovvero

$$\dot{\mathbf{R}}(-\alpha\,\mathbf{j}_2) = \boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2), \tag{91}$$

e

$$\dot{\mathbf{R}}(\beta\,\mathbf{j}_3) = \boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3). \tag{92}$$

Le componenti dei due vettori sono anche esprimibili come

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^2 &= \boldsymbol{\Gamma}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)(-\dot{\alpha}\,\mathbf{j}_2 - \alpha\,\dot{\mathbf{j}}_2), \\ &= -\dot{\alpha}\,\mathbf{j}_2 + \boldsymbol{\Gamma}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\alpha\,\mathbf{j}_2 \times \boldsymbol{\omega}^b, \\ &= -\dot{\alpha}\,\mathbf{j}_2 - (\mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2) - \mathbf{I})\boldsymbol{\omega}^b \end{aligned} \tag{93}$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^3 &= \boldsymbol{\Gamma}(\beta\,\mathbf{j}_3)(\dot{\beta}\,\mathbf{j}_3 + \beta\,\dot{\mathbf{j}}_3), \\ &= \dot{\beta}\,\mathbf{j}_3 - \boldsymbol{\Gamma}(\beta\,\mathbf{j}_3)\beta\,\mathbf{j}_3 \times \boldsymbol{\omega}^b, \\ &= \dot{\beta}\,\mathbf{j}_3 - (\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3) - \mathbf{I})\boldsymbol{\omega}^b, \end{aligned} \tag{94}$$

dove si è fatto uso del fatto che

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi} \qquad \text{se} \qquad \boldsymbol{\psi} \parallel \boldsymbol{\phi}, \tag{95}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\psi}\times = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) - \mathbf{I}, \tag{96}$$

oltre che delle equazioni del Poisson

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{j}_i. \tag{97}$$

Sostituendo ora le 89, 90, 93 e 94 nelle 88, otteniamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^w\times = \boldsymbol{\omega}^2 &\times \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3)\boldsymbol{\alpha}^b\boldsymbol{\alpha}^{w^T} + \\ &+ \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3)\boldsymbol{\alpha}^b\boldsymbol{\alpha}^{w^T} + \\ &\qquad + \mathbf{R}(-\alpha\,\mathbf{j}_2)\mathbf{R}(\beta\,\mathbf{j}_3)\boldsymbol{\omega}^b \times \boldsymbol{\alpha}^b\boldsymbol{\alpha}^{w^T} \end{aligned} \tag{98}$$

e quindi

$$\boldsymbol{\omega}^w = \boldsymbol{\omega}^b - \dot{\alpha}\,\mathbf{j}_2 + \dot{\beta}\,\mathbf{k}_3, \tag{99}$$

che esprime la relazione fra le velocità angolari delle due terne in funzione delle derivate temporali di α e β. Passando in componenti in assi vento, queste relazioni divengono

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}}^w &= \boldsymbol{\alpha}^{w^T}(\boldsymbol{\omega}^b - \dot{\alpha}\,\mathbf{j}_2) + \dot{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{w^T}\mathbf{k}_3, \\ &= \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\bar{\boldsymbol{\omega}}^b - \dot{\alpha}\,\bar{\mathbf{j}}_2) + \dot{\beta}\,\hat{\mathbf{k}}_3, \\ &= \hat{\boldsymbol{\gamma}}\left\{\begin{array}{c} p \\ q-\dot{\alpha} \\ r \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{array}\right\}. \end{aligned} \tag{100}$$

La linearizzazione della precedente relazione risulta essere

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}^w = \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\gamma}} \left\{ \begin{array}{c} p \\ q - \dot{\alpha} \\ r \end{array} \right\} + \hat{\boldsymbol{\gamma}} \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}q - \mathrm{d}\dot{\alpha} \\ \mathrm{d}r \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}\dot{\beta} \end{array} \right\}, \tag{101}$$

ovvero, considerando che nella configurazione di riferimento $p = q = r = \dot{\alpha} = 0$ e $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{I}$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}p^w \\ \mathrm{d}q^w \\ \mathrm{d}r^w \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}q - \mathrm{d}\dot{\alpha} \\ \mathrm{d}r + \mathrm{d}\dot{\beta} \end{array} \right\}, \tag{102}$$

che è la relazione cercata fra gli incrementi di componenti nei due sistemi d'assi. A queste vanno aggiunte le equazioni cinematiche linearizzate

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}^w = \mathrm{d}\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}^w)\dot{\mathbf{q}}^w + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}^w)\mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}, \tag{103}$$

che, una volta valutate in corrispondenza della configurazione di riferimento, divengono semplicemente

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}^w = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}\dot{\phi}^w - \sin\theta^w \mathrm{d}\dot{\psi}^w \\ \mathrm{d}\dot{\theta}^w \\ \cos\theta^w \mathrm{d}\dot{\psi}^w \end{array} \right\}. \tag{104}$$

Ponendo, come è consuetudine in letteratura,

$$\theta^w = \gamma,$$

ove γ rappresenta quindi l'angolo di rampa, si ha la seguente semplice relazione fra gli incrementi di $\dot{\alpha}$, $\dot{\gamma}$ e q

$$\mathrm{d}\dot{\alpha} + \mathrm{d}\dot{\gamma} = \mathrm{d}q. \tag{105}$$

2.5.4. *Equazioni di Traslazione in Assi Vento.* Avendo derivato le relazioni intercorrenti fra le due terne, assi vento ed assi solidali, possiamo quindi procedere a ricavare le equazioni alle perturbazioni in assi vento. Le equazioni che traducono le condizioni di equilibrio dinamico per il corpo rigido espresse in funzione di componenti in assi vento sono date dalle

$$m\,\dot{\hat{\mathbf{v}}} + m\,\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}}, \tag{106}$$

dove le $\hat{\mathbf{f}}$ sono, come già detto in precedenza, somme di forze di natura gravitazionale, propulsiva ed aerodinamica, ovvero $\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}^G + \hat{\mathbf{f}}^P + \hat{\mathbf{f}}^A$. Inoltre, sempre assumendo per semplicità un modello stazionario dell'aerodinamica, abbiamo che le forze aerodinamiche possono essere considerate come funzioni istantanee dei parametri $\boldsymbol{\nu}$, delle componenti della velocità angolare $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, oltre che dei comandi $\boldsymbol{\delta}$ e di ulteriori parametri $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\hat{\mathbf{f}}^A(t) = \hat{\mathbf{f}}^A(\boldsymbol{\nu}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \boldsymbol{\sigma}). \tag{107}$$

2.5.5. *Linearizzazione delle Equazioni di Traslazione in Assi Vento.* Possiamo procedere alla linearizzazione delle forze esterne come fatto in precedenza. In particolare, per le forze di natura gravitazionale si avrà

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\mathbf{f}}^G &= \mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha}^{w^T}\mathbf{f}^G), \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}^{w^T}\mathbf{f}^G, \\ &= \boldsymbol{\alpha}^{w^T}\mathbf{f}^G \times \boldsymbol{\theta}^w_{\mathrm{d}}, \\ &= \hat{\mathbf{f}}^G \times \hat{\boldsymbol{\theta}}^w_{\mathrm{d}}, \end{aligned} \tag{108}$$

mentre per le forze di natura propulsiva si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\hat{\mathbf{f}}^P &= \mathrm{d}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}\bar{\mathbf{f}}^P), \\ &= \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\bar{\mathbf{f}}^P + \hat{\boldsymbol{\gamma}}\frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^P}{\partial \delta_T}\mathrm{d}\delta_T. \end{aligned} \tag{109}$$

La linearizzazione delle forze aerodinamiche risulta poi essere

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{f}}^A = \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^A}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\boldsymbol{\nu} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^A}{\partial \hat{\boldsymbol{\omega}}}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^A}{\partial \boldsymbol{\delta}}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}, \tag{110}$$

dove anche in questo caso, sotto le ipotesi che abbiamo enunciato in precedenza, possiamo invocare un disaccoppiamento longitudinale/latero–direzionale insito nella struttura a "scacchiera" delle derivate di stabilità

(111)
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^A}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} -D_V & 0 & -D_\alpha \\ 0 & C_\beta & 0 \\ -L_V & 0 & -L_\alpha \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^A}{\partial \hat{\boldsymbol{\omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & -D_{q^w} & 0 \\ C_{p^w} & 0 & C_{r^w} \\ 0 & -L_{q^w} & 0 \end{bmatrix}.$$

Nella relazione precedente, L indica la portanza e D la resistenza.

2.5.6. *Equazioni Linearizzate di Traslazione Miste Assi Vento/Assi Stabilità.* È a questo punto possibile scrivere le equazioni longitudinali di equilibrio dinamico alle perturbazioni, che risultano essere

$$\begin{bmatrix} m & -D_{q^w} & 0 & 0 \\ 0 & mV - L_{q^w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}\dot{V} \\ \mathrm{d}\dot{\alpha} \\ \mathrm{d}\dot{q} \\ \mathrm{d}\dot{\gamma} \end{Bmatrix} + \tag{112}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_v & D_\alpha - \bar{\mathbf{j}}_3 \cdot \bar{\mathbf{f}}^P & D_{q^w} & mg\cos\gamma \\ L_V & L_\alpha + \bar{\mathbf{j}}_1 \cdot \bar{\mathbf{f}}^P & -mV + L_{q^w} & mg\sin\gamma \\ -\mathcal{M}_V & -\mathcal{M}_\alpha & -\mathcal{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}V \\ \mathrm{d}\alpha \\ \mathrm{d}q \\ \mathrm{d}\gamma \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^{L^w}\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}.$$

A queste vanno aggiunte le equazioni latero–direzionali 68.