

Università degli Studi di Milano
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Fisica

Dissipazione di uno scalare passivo in moti turbolenti di parete

Relatore Interno: Prof. Guido Parravicini
Relatore Esterno: Prof. Maurizio Quadrio

Studente: Luca Galantucci
Matricola: 684792
Codice PACS:47.27.-i

Anno Accademico 2005-2006

Indice

Introduzione	4
1 Equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi	10
1.1 Fluidi ideali	10
1.1.1 Equazione di continuità	10
1.1.2 Equazione di Eulero	12
1.1.3 Legge di conservazione dell'Energia	13
1.1.4 Legge di conservazione della quantità di moto	16
1.2 Fluidi reali	18
1.2.1 Equazioni di Navier-Stokes	20
1.2.2 Equazione generale della trasmissione del calore	20
1.2.3 Secondo principio della termodinamica	25
1.2.4 Equazioni di chiusura	28
1.2.5 Fluidi incomprimibili	29
1.2.6 Fluidi a proprietà costanti	30
1.2.7 Dissipazione di Energia	32
2 Natura aleatoria delle correnti turbolente	36
2.1 Introduzione ai fenomeni turbolenti	36
2.2 Equazioni mediate di Reynolds	38
2.2.1 Equazioni mediate per il campo di uno scalare passivo	42
2.3 Equazioni di bilancio	43
2.3.1 Energia cinetica turbolenta	44
2.3.2 Varianza dello scalare passivo	47
3 Teoria di Kolmogorov	49
3.1 Cascata energetica di Richardson	49
3.2 Le ipotesi di Kolmogorov,1941	50
3.3 Risultati della teoria di Kolmogorov	55
3.3.1 Spettro di energia cinetica turbolenta	55
3.3.2 Funzioni di struttura	57

3.4	Teoria di Kolmogorov per il campo di uno scalare passivo	60
4	Flussi turbolenti all'interno di un canale piano	64
4.1	Geometria e simmetrie del sistema	64
4.2	Equazioni mediate di Reynolds per il canale piano . .	66
4.2.1	Campo di velocità	66
4.2.2	Campo scalare passivo	70
4.3	Scale caratteristiche dei moti turbolenti di parete . .	71
4.3.1	Campo di velocità	71
4.3.2	Campo scalare passivo	74
4.4	Profili medi di velocità	75
4.4.1	Campo di velocità	75
4.4.2	Campo scalare passivo	82
5	Soluzioni numeriche e loro validazione	87
5.1	Architettura e caratteristiche del codice numerico . .	87
5.1.1	Equazioni adimensionali dei campi di velocità e scalare passivo	88
5.1.2	Rappresentazione di Fourier	89
5.1.3	Equazioni nello spazio di Fourier	90
5.1.4	Discretizzazione in direzione y e risoluzione numerica delle equazioni	94
5.2	Validazione dell'algoritmo	97
5.3	Risoluzioni spaziali delle DNS	98
6	Risultati	102
6.1	Campo di fluttuazione	103
6.1.1	Analisi del campo di fluttuazione in funzione della distanza dalla parete	103
6.1.2	Accoppiamento con il campo di velocità	108
6.2	Campo di dissipazione	109
6.3	Analisi statistica del campo di dissipazione $\tilde{\epsilon}_\phi$	112
6.4	Effetto della risoluzione computazionale sul campo di $\tilde{\epsilon}_\phi$	117
	Conclusioni	121
	Ringraziamenti	123
	Bibliografia	125

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è lo studio mediante simulazioni numeriche dirette delle caratteristiche del campo di fluttuazione e del campo di dissipazione della varianza di uno scalare passivo, quale la temperatura o la concentrazione di una qualunque specie chimica, in flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani in presenza di un gradiente medio di scalare. Con il termine "passivo", s'intende una qualunque grandezza fisica che ha un'influenza trascurabile sul campo di moto.

La quasi totalità delle correnti di interesse pratico sono turbolente: si pensi ad esempio ai flussi di un fluido attorno a dei profili alari, ai flussi che si sviluppano all'interno di condotti piani o cilindrici, alle scie, ma anche alle correnti marine ed atmosferiche. Oltre a queste rilevanti applicazioni pratiche, però, lo studio delle correnti turbolente è motivato anche da un genuino interesse scientifico.

Ancora oggi infatti molti degli aspetti fondamentali dei flussi turbolenti restano ancora privi di descrizioni certe: di conseguenza, la turbolenza è considerata come l'ultimo grande problema irrisolto della fisica classica. È tutt'ora non completamente noto, ad esempio, perché e come, a determinati valori del numero di Reynolds, si verifichi la transizione dal regime di moto laminare al regime turbolento, con la comparsa di fenomeni di natura aleatoria. Questo comportamento profondamente diverso del flusso, determinato dalle equazioni del moto che pure sono valide anche nel regime laminare, è forse l'aspetto più incomprensibile dei flussi turbolenti. A tale proposito, Richard Feynmann, nelle sue *Lectures on Physics* [2], commenta:

“...una formidabile varietà di comportamenti si nasconde nel semplice sistema di equazioni che regola il sistema. Tutte le soluzioni valgono per le stesse equazioni, soltanto con diversi valori del numero di Reynolds, Re . Non ci sono ragioni di pensare che in queste equazioni manchino dei termini. L'unica difficoltà è che non abbiamo oggi il potere matematico di analizzarle, eccetto che per nume-

ri di Reynolds piccolissimi, cioè nel caso completamente viscoso. L'aver scritto un'equazione non toglie al flusso dei fluidi il suo fascino, il suo mistero o il suo potere di sorprenderci.

...Si sono descritte le equazioni del flusso dell'acqua. Dall'esperienza si è ricavato un sistema di concetti ed approssimazioni utili per discutere la soluzione - scie di vortici, scie turbolente, strati limite. Quando si hanno simili equazioni in una situazione meno familiare e nella quale non si può ancora effettuare esperimenti, si tenta di risolvere le equazioni in modo primitivo, zoppicante e confuso per determinare quali caratteristiche possono manifestarsi oppure quali nuove forme qualitative sono conseguenza delle equazioni del moto. ...Eppure tutte queste cose sono in realtà presenti nelle equazioni, solo che non abbiamo trovato il modo di tirarle fuori.

...Oggi non possiamo vedere che le equazioni del flusso dell'acqua contengono cose come la struttura a insegna di barbiere della turbolenza che si manifesta fra due cilindri rotanti. ...”

La scelta di concentrare principalmente l'attenzione sulle caratteristiche che contraddistinguono il campo di fluttuazione ϕ' ed il campo di dissipazione ϵ_ϕ della varianza di uno scalare passivo è dovuta principalmente a tre motivi. Il primo consiste nell'importante ruolo rivestito da tali grandezze nelle applicazioni industriali ed ambientali. Una descrizione statistica molto accurata dello scalare passivo è infatti indispensabile, in quanto eventi di fluttuazione e di dissipazione molto lontani dal proprio valor medio possono, ad esempio, determinare l'innescò di reazioni chimiche (se lo scalare passivo è la concentrazione di una specie chimica reagente). Questa caratteristica può essere sfruttata dal punto di vista industriale nei processi produttivi, ma può anche essere la causa di danni ambientali rilevanti (se lo scalare passivo è la concentrazione di un inquinante). E' evidente in entrambi i casi la necessità di predire correttamente anche momenti statistici di ordine elevato per lo scalare passivo.

In secondo luogo, la scelta di analizzare il campo di dissipazione è dovuta anche al fatto che la grandezza ϵ_ϕ è molto difficile da modellare nel contesto delle equazioni mediate di Reynolds: di conseguenza, lo studio compiuto in questa tesi può fornire qualche elemento importante a tale scopo.

Il terzo motivo, infine, consiste nell'esistenza, per i campi scalari passivi, di un numero elevato di questioni irrisolte. Questa mino-

re conoscenza della dinamica di uno scalare passivo solo in parte è dovuta all'interesse recente della comunità scientifica verso questo ramo della fisica. Un'altra importante ragione della presenza di numerose zone d'ombra è la maggiore intermittenza interna mostrata da questi ultimi rispetto al campo di velocità (si vedano al riguardo i lavori di Warhaft [10] e Sreenivasan *et al.* [11])

Questa maggiore intermittenza interna dei campi scalari, indice di una maggiore caoticità, ha origine nella profonda anisotropia di piccola scala che caratterizza tali campi ([10]). Questa anisotropia rende molto difficile uno studio statistico dei campi di scalare attraverso le equazioni mediate di Reynolds le quali, peraltro, sono in grado di offrire unicamente informazioni riguardanti il campo medio di scalare e di dissipazione, trascurando i valori istantanei e puntuali di tali grandezze. Un'osservazione del tutto analoga è valida per il metodo numerico noto con il nome di *LES*, Large Eddy Simulation. Quest'ultimo, infatti, pur modellando l'interazione delle grandi scale del flusso con le scale più piccole del moto, non è in grado di risolvere queste ultime, che devono essere modellate.

Alla luce delle caratteristiche dei campi di scalare passivo appena illustrate, risulta chiaro che lo strumento computazionale di indagine più adatto ad analizzare il campo di fluttuazione e di dissipazione di uno scalare passivo è la *simulazione numerica diretta* (o *DNS*, Direct Numerical Simulation). Essa permette infatti di risolvere direttamente tutte le scale del moto, anche le più fini, e consente anche di determinarne l'evoluzione temporale nel caso non stazionario. È opportuno puntualizzare che questo strumento necessita di potenze di calcolo considerevoli e, di conseguenza, solo l'eccezionale progresso che ha contraddistinto il settore informatico negli ultimi anni ha reso possibile il conseguimento di importanti e rilevanti risultati mediante la tecnica DNS.

La capacità attuale di risolvere scale molto piccole di moti turbolenti caratterizzati da valori del numero di Reynolds relativamente elevati, ha, dunque, reso possibile un recentissimo sviluppo negli studi riguardanti le caratteristiche dei campi scalari passivi. Questo attuale e crescente interesse del mondo scientifico verso tali campi è testimoniato dalla recente comparsa, negli ultimi anni, di numerosi articoli scientifici, quali, ad esempio, Shumacher *et al.* [6], Brethouwer *et al.* [7] e Johansson *et al.* [13].

La maggior parte delle simulazioni numeriche dirette realizzate negli ultimi anni per studiare gli scalari passivi riguarda, tuttavia, una classe molto particolare di flussi turbolenti: le correnti omogenee ed isotrope, [6] e [7]. Solo infatti una esigua minoranza di studi sono stati progettati con lo scopo di osservare il comportamento di

uno scalare passivo in moti turbolenti di parete. Perlopiù, in quest'ultima circostanza l'attenzione è stata principalmente focalizzata sullo studio di grandezze quali il flusso di scalare in direzione parallela e normale alle pareti con lo scopo di realizzarne dei modelli statistici. Di conseguenza, al giorno d'oggi nessun lavoro di ricerca è stato effettuato sulla morfologia dei campi di fluttuazione e dissipazione di scalari passivi che caratterizzano moti turbolenti di parete, quali ad esempio flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani o condotti cilindrici.

È stata proprio questa mancanza di studi ed approfondimenti riguardanti la struttura dei campi di fluttuazione e dissipazione in moti turbolenti di parete a costituire la motivazione di questo lavoro di tesi, che si concentrerà prevalentemente su due aspetti del campo di scalare. In primo luogo, verranno analizzate le strutture dei campi di fluttuazione e dissipazione, mentre successivamente l'attenzione verrà focalizzata sull'individuazione di una corretta risoluzione spaziale da impiegare nelle simulazioni numeriche dirette, in modo da poter osservare ed analizzare tutte le più fini microstrutture dissipative di scalare.

Il lavoro si articola in due parti principali. Nella prima viene dapprima introdotto il concetto di correnti turbolente, ne vengono illustrate alcune peculiarità avvalendosi dei contributi più rilevanti e significativi di alcuni studiosi che hanno consentito una parziale comprensione teorica degli aspetti fondamentali della turbolenza e si descrive lo stato attuale dell'arte per quanto riguarda la diffusione degli scalari passivi accoppiata alla dinamica caotica dei campi di moto turbolenti. La seconda parte del lavoro di tesi è dedicata invece alla descrizione delle caratteristiche specifiche delle correnti turbolente che si sviluppano fra due lastre piane parallele, all'esposizione della struttura del codice numerico elaborato per la simulazione computazionale di tali flussi, alla validazione scientifica del modello impiegato nella tesi ed all'illustrazione dei risultati ottenuti.

Entrando più in dettaglio nell'architettura della tesi, il primo capitolo svolge un ruolo tanto introduttivo quanto fondamentale in quanto nel corso di esso vengono illustrate e ricavate le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi. Queste ultime sono derivate in primo luogo per una classe molto particolare ed importante di fluidi, i *fluidi perfetti*, per poi essere generalizzate in presenza di *fluidi reali*.

Successivamente, si intraprende un'analisi approfondita degli elementi distintivi delle correnti turbolente ponendo l'accento sulla natura caotica di queste ultime e sulla conseguente necessità di un approccio statistico allo studio della turbolenza. Viene quindi esposta

la prima descrizione statistico-probabilistica dei fenomeni turbolenti, compiuta da O.Reynolds che intuì per primo l'essenza aleatoria dei fenomeni turbolenti e formulò le famose *equazioni mediate di Reynolds*, che vengono dedotte e riportate nel secondo capitolo insieme alle equazioni di bilancio per l'*energia cinetica media*, l'*energia cinetica turbolenta* e la *varianza di scalare*.

Il lavoro di tesi prosegue con l'illustrazione delle teorie di Richardson (1922) e Kolmogorov (1941), che congiuntamente, a dispetto dell'età, costituiscono forse l'unica descrizione organica del fenomeno della turbolenza. In questo terzo capitolo sono infatti introdotti ed esposti i concetti di *cascata energetica* e di *separazione delle scale* del moto ed inoltre vengono riportate l'ipotesi di *isotropia locale* e le due ipotesi di *similarità* di Kolmogorov. In coda all'esposizione sintetica dei punti fondamentali di tali teorie vengono elencati gli importantissimi risultati raggiunti dalle stesse non mancando, tuttavia, di sottolineare i loro limiti di applicabilità dovuti all'intermittenza interna che caratterizza i campi di velocità delle correnti turbolente.

La prima parte si conclude mostrando che la teoria di Kolmogorov certamente non è applicabile ai campi scalari passivi a causa della presenza di una più intensa intermittenza di piccola scala rispetto ai campi di velocità, intermittenza che trae origine da una profonda e spiccata anisotropia delle scale piccole di scalare che persiste anche a numeri di Reynolds elevatissimi.

La seconda parte della tesi, dopo aver esposto le ragioni che hanno ispirato il lavoro, si concentra sulla descrizione delle particolarità proprie dei moti turbolenti che si sviluppano all'interno di un canale piano, soffermandosi soprattutto sulle simmetrie possedute da tale sistema e sulle ripercussioni che queste ultime hanno sulle equazioni mediate di Reynolds, le quali, in tali circostanze, si semplificano notevolmente. Successivamente, vengono introdotte le scale caratteristiche di lunghezza e velocità di tali moti turbolenti ed attraverso di esse il canale piano viene suddiviso in diverse regioni, ciascuna delle quali contraddistinta da specifici profili medi di velocità e scalare.

In seguito, si illustra l'impianto e la filosofia del codice computazionale elaborato per effettuare le simulazioni numeriche dirette dei flussi turbolenti presi in considerazione in questa tesi. Sono, infatti, ricavate e riportate le equazioni differenziali che vengono risolte numericamente nello spazio di Fourier, congiuntamente all'algoritmo pseudo-spetttrale che ne consente un'efficiente simulazione numerica. Vengono inoltre brevemente richiamati i metodi numerici impiegati per risolvere computazionalmente le equazioni differenziali sopra citate e gli schemi alle differenze finite compatte che hanno reso

possibile la parallelizzazione del codice numerico, consentendo una drastica diminuzione dei tempi di calcolo.

Successivamente, viene esposto il procedimento che ha permesso di validare l'implementazione numerica impiegata nel presente studio. A tale proposito è stata, in primo luogo, progettata ed effettuata una simulazione numerica diretta avente esattamente gli stessi parametri di una simulazione diretta compiuta da Johansson *et al.* [13] e, in secondo luogo, si sono confrontati i risultati di tali simulazioni focalizzando l'attenzione sull'andamento in funzione della distanza dalla parete del profilo medio dello scalare, della deviazione standard di quest'ultimo e della dissipazione della varianza dello scalare. La perfetta consistenza dei risultati riguardanti le grandezze appena elencate è la dimostrazione che il codice numerico elaborato nel corso di questa tesi simula correttamente il comportamento di uno scalare passivo in moti turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani in presenza di un gradiente medio di scalare.

Nell'ultimo capitolo della tesi sono infine illustrati i risultati raggiunti in questo lavoro. All'interno di questa ultima parte della tesi vengono, infatti, in primo luogo riportate numerose visualizzazioni istantanee, bidimensionali e tridimensionali, dei campi di fluttuazione e dissipazione dello scalare passivo. In secondo luogo, vengono presentate le analisi statistiche del campo dissipazione in funzione della distanza dalla parete e della risoluzione computazionale impiegata nelle simulazioni numeriche.

Capitolo 1

Equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi

In questo primo capitolo della tesi saranno illustrate e ricavate le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi. Queste ultime verranno inizialmente derivate per una classe molto importante di fluidi, i *fluidi perfetti* (noti anche con il nome di *fluidi ideali*) per poi essere generalizzate in presenza di *fluidi reali*.

1.1 Fluidi ideali

I fluidi ideali sono fluidi soggetti a moti nei quali intervengono unicamente processi reversibili, sia dal punto di vista termodinamico che dal punto di vista meccanico. Ciò implica l'assenza di fenomeni di dissipazione di energia e comporta, in particolare, che il tensore degli sforzi $\underline{\underline{\sigma}}$ sia diagonale ed abbia la seguente espressione:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\delta_{ik} \quad (1.1)$$

dove con $p(\mathbf{x}, t)$ si è indicato il campo scalare di pressione e con δ_{ik} la delta di Krönecker.

1.1.1 Equazione di continuità

In primo luogo è fondamentale dimostrare che per una qualunque tipologia di fluido (sia ideale che reale) vale l'equazione di continuità. Quest'ultima viene dedotta dal principio di conservazione della massa. Si consideri, a tale scopo, una regione di spazio R occupata da un volume V di fluido e sia $\Sigma(R)$ la frontiera della regione R . La massa di fluido $M(t)$ presente all'istante t all'interno della superficie chiusa $\Sigma(R)$ si ottiene mediante il seguente integrale:

$$M(t) = \int_R \rho(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.2)$$

dove $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità del fluido nel punto di coordinate \mathbf{x} all'istante t . La massa di fluido che fluisce attraverso $\Sigma(R)$ per unità di tempo è data dal flusso Φ_Σ del vettore densità di flusso di massa $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ attraverso la superficie chiusa $\Sigma(R)$, dove $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è il campo di velocità del fluido. L'espressione di Φ_Σ , per definizione, è la seguente

$$\Phi_\Sigma = \oint_{\Sigma(R)} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Sigma \quad (1.3)$$

dove $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ è il versore normale uscente alla superficie Σ e $d\Sigma$ è l'area dell'elemento infinitesimo di superficie.

La variazione della massa di fluido $M(t)$ presente all'interno di Σ per unità di tempo è espressa dalla seguente relazione:

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.4)$$

Osservando che la quantità di massa di fluido che fluisce attraverso la superficie chiusa $\Sigma(R)$ per unità di tempo coincide con la diminuzione di $M(t)$ per unità di tempo è possibile uguagliare il secondo membro della (1.3) con il secondo membro della (1.4) cambiato di segno, ottenendo la seguente relazione:

$$\oint_{\Sigma(R)} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.5)$$

L'integrale a primo membro della (1.5) si può trasformare in un integrale di volume mediante l'impiego del teorema della divergenza e, conseguentemente, la (1.5) può essere riscritta nel seguente modo (omettendo la dipendenza dei campi densità e velocità dalla posizione \mathbf{x} e dal tempo t per alleggerire la notazione):

$$\int_R \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) d^3x = - \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x \quad (1.6)$$

dove con ∇ si è indicato l'operatore differenziale gradiente. Dalla (1.6) riordinando i termini, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\int_R \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right] d^3x = 0 \quad (1.7)$$

Dato che la (1.7) deve essere soddisfatta qualunque sia il dominio di integrazione R , l'integrando deve essere identicamente nullo, ovvero

deve valere la seguente equazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.8)$$

La (1.8) è l'uguaglianza nota con il nome di **equazione di continuità** ed è valida, è bene puntualizzarlo, per ogni continuo.

1.1.2 Equazione di Eulero

Si consideri una regione di spazio R occupata da un volume V di fluido. Sia $\Sigma(R)$ la superficie chiusa che delimita la regione R . La forza $d\mathbf{F}$ che il fluido presente all'esterno di $\Sigma(R)$ esercita sul volume V attraverso un elemento infinitesimo di superficie $d\Sigma$ è dato da

$$d\mathbf{F} = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Sigma \quad (1.9)$$

dove $p(\mathbf{x}, t)$ è la pressione presente nel punto di coordinate \mathbf{x} all'istante t e $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ è il versore normale uscente alla superficie. Di conseguenza, la forza complessiva \mathbf{F} che il fluido esterno a $\Sigma(R)$ esercita sul volume di fluido V racchiuso da $\Sigma(R)$ è data dalla seguente relazione

$$\mathbf{F} = - \oint_{\Sigma(R)} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Sigma \quad (1.10)$$

Trasformando l'integrale della (1.10) in un integrale di volume si ha la seguente uguaglianza:

$$\mathbf{F} = - \int_R \nabla p(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.11)$$

La relazione (1.11) comporta che la forza infinitesima che viene esercitata su un elemento infinitesimo di volume di fluido d^3x è data dall'espressione $-\nabla p(\mathbf{x}, t) d^3x$. CiÚ implica che la seconda equazione della dinamica che descrive il moto di un elemento infinitesimo di volume di fluido è la seguente:

$$-\nabla p(\mathbf{x}, t) d^3x = \rho \mathbf{a} d^3x \quad (1.12)$$

la quale diventa

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (1.13)$$

dove con $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ si è indicata la derivata sostanziale della velocità rispetto al tempo. Dall'analisi vettoriale si vede che la derivata

sostanziale $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ è data dalla seguente espressione:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (1.14)$$

La (1.13) diventa quindi:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (1.15)$$

L'equazione (1.15) è nota anche con il nome di **Equazione di Eulero** (1755). Nel caso in cui vi sia un campo conservativo esterno con potenziale per unità di massa $\phi(\mathbf{x})$, la (1.15) diventa:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p(\mathbf{x}, t) - \nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (1.16)$$

1.1.3 Legge di conservazione dell'Energia

Dopo aver ricavato le due equazioni differenziali basilari che governano la dinamica dei fluidi ideali, è necessario prendere in considerazione due fenomeni che rivestono una grandissima importanza nella fluidodinamica: il flusso di energia, che verrà analizzato approfonditamente in questo sottoparagrafo della tesi ed il flusso di quantità di moto, che verrà affrontato nel sottoparagrafo successivo e che permetterà successivamente di formulare le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi viscosi, *le equazioni di Navier-Stokes*.

Si consideri, come nei due sottoparagrafi precedenti, una regione R dello spazio, non dipendente dal tempo, la cui frontiera sia la superficie chiusa $\Sigma(R)$. Si ipotizzi l'assenza di forze esterne conservative. In queste condizioni, l'energia di un elemento infinitesimo di fluido è data dalla somma della sua energia interna con la sua energia cinetica, vale, quindi, la seguente relazione:

$$E_{tot}(t) = \int_R \left[\rho(\mathbf{x}, t)\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}, t)v^2(\mathbf{x}, t) \right] d^3x \quad (1.17)$$

dove ε è l'energia interna per unità di massa.

La variazione per unità di tempo dell'energia complessiva del fluido che occupa la regione R di spazio all'istante t è data, quindi, dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}E_{tot}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_R \left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) d^3x \\ &= \int_R \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) d^3x \end{aligned} \quad (1.18)$$

Si calcolino ora separatamente le due derivate parziali temporali presenti nella funzione integranda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1.19)$$

Impiegando l'equazione di continuità (1.8) e l'equazione di Eulero in assenza di campi conservativi esterni (1.15), la (1.19) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \left[-\frac{1}{\rho} \nabla p - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.20)$$

È opportuno introdurre a questo stadio il potenziale termodinamico entalpia H definito dalla seguente relazione:

$$H = U + pV \quad (1.21)$$

dove U è l'energia interna. Dalla (1.21) si ottiene la seguente relazione differenziale $dH = dU + V dp + p dV$ la quale, ricordando il primo principio della termodinamica $dU = \delta Q - \delta L = T dS - p dV$, assume la seguente forma:

$$dH = T dS + V dp \quad (1.22)$$

dove T è la temperatura del fluido ed S è l'entropia. Introducendo i potenziali termodinamici per unità di massa w ed s (rispettivamente entalpia ed entropia per unità di massa) si ottiene la seguente uguaglianza differenziale:

$$\nabla p = \rho \nabla w - \rho T \nabla s \quad (1.23)$$

Dall'analisi vettoriale si ha la seguente identità:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.24)$$

Impiegando le (1.23) e (1.24) e sostituendo le quantità corrispondenti nella (1.20) si ha la seguente espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w + \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (1.25)$$

Si consideri ora il termine $\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}$. Il numeratore del termine appena riportato può essere riscritto nella seguente forma:

$$d(\rho\varepsilon) = \rho d\varepsilon + \varepsilon d\rho \quad (1.26)$$

Dal primo principio della termodinamica segue la seguente espressione per $d\varepsilon$:

$$d\varepsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.27)$$

Sostituendo l'espressione appena determinata per il differenziale dell'energia interna per unità di massa nella (1.26) si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$d(\rho\varepsilon) = \rho T ds + \left(\frac{p}{\rho} + \varepsilon \right) d\rho = \rho T ds + w d\rho \quad (1.28)$$

dove si è utilizzata la seguente uguaglianza $w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ derivante direttamente dalla definizione di entalpia (1.21). Alla luce della relazione differenziale (1.28), vale la seguente equazione:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.29)$$

La definizione di fluido reale dal punto di vista meccanico, oltre ad avere come conseguenza la forma diagonale del tensore degli sforzi $\underline{\underline{\sigma}}$ (si veda la (1.1)), implica l'assenza della viscosità interna e, quindi, della dissipazione di energia per effetto di attriti interni dovuti allo scivolamento di elementi elementari di fluido aventi velocità diverse. Per quanto riguarda l'aspetto termodinamico, l'idealità di un fluido consiste nel considerare che gli elementi infinitesimi di fluido non scambino calore con il fluido circostante, ovvero che il moto di ciascun elemento di fluido sia *adiabatico*, in quanto la conduzione del calore è un fenomeno irreversibile. Ciò implica che l'entropia (o, equivalentemente, l'entropia per unità di massa) di ogni elemento di fluido è una costante del moto di ciascuno di essi. Nel caso in cui, come accade frequentemente, l'entropia per unità di massa s sia uniforme in un dato istante, il valore di s si conserva e rimane uniforme nel fluido in ogni istante successivo. In queste circostanze, la condizione di moto adiabatico si traduce nella seguente espressione:

$$s(\mathbf{x}, t) = cost \quad (1.30)$$

la quale implica la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0 \quad (1.31)$$

Di conseguenza, utilizzando la (1.31) e l'equazione di continuità, è possibile una formulazione alternativa della (1.29):

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = -\rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s - w \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (1.32)$$

Avendo ricavato le uguaglianze riportate precedentemente, è ora possibile riscrivere l'espressione della variazione per unità di tempo dell'energia complessiva posseduta dal fluido presente all'interno della superficie chiusa $\Sigma(R)$ all'istante t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_{tot}(t) &= - \int_R \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] d^3x \\ &= - \int_R \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \rho \mathbf{v} \right] d^3x \\ &= - \oint_{\Sigma(R)} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \\ &= - \oint_{\Sigma(R)} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma(R)} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \end{aligned} \quad (1.33)$$

Di conseguenza, la variazione per unità di tempo dell'energia complessiva del fluido occupante la regione di spazio R all'istante t è dovuta a due fenomeni, ciascuno dei quali riconducibile direttamente ai due integrali della (1.33). Il primo integrale, infatti, rappresenta la variazione di energia dovuta all'attraversamento di Σ da parte di elementi di fluido (termine *convettivo*), mentre il secondo integrale traduce matematicamente il lavoro di pressione compiuto dal fluido esterno a Σ sul fluido interno. Dalla (1.33) si deduce che il vettore $\left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \rho \mathbf{v}$ è il *vettore densità di flusso convettivo di energia per un fluido perfetto*.

1.1.4 Legge di conservazione della quantità di moto

La componente i -esima della quantità di moto complessiva \mathbf{P} posseduta dal volume di fluido V presente all'interno della superficie chiusa $\Sigma(R)$ all'istante t è data dal seguente integrale:

$$P_i(t) = \int_R \rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.34)$$

Per ottenere la variazione per unità di tempo della componente i -esima del vettore \mathbf{P} è sufficiente effettuare la derivata parziale

rispetto al tempo della (1.34):

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i(t) = \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) d^3x \quad (1.35)$$

Sviluppando la funzione integranda impiegando l'equazione di continuità (1.8) e l'equazione di Eulero in assenza di campi conservativi esterni (1.15) si ottiene la seguente sequenza di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ &= -v_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i \end{aligned} \quad (1.36)$$

La (1.36) si può riscrivere esplicitando gli operatori differenziali divergenza e gradiente ottenendo la seguente relazione dove sono stati omessi i simboli di sommatoria (così come nel seguito del lavoro di tesi) in modo tale da alleggerire la notazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= -v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial (p \delta_{ik})}{\partial x_k} - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ &= - \left[\frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (p \delta_{ik})}{\partial x_k} \right] \\ &= - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.37)$$

dove

$$\Pi_{ik} \equiv \rho v_i v_k + p \delta_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik} \quad (1.38)$$

è il *tensore densità di flusso di quantità di moto per un fluido perfetto* . Alla luce di questo risultato la (1.35) può essere riformulata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_i(t) &= - \int_R \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} d^3x \\ &= - \oint_{\Sigma(R)} \Pi_{ik} n_k d\Sigma \end{aligned} \quad (1.39)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema della divergenza.

È proprio in base a quest'ultima formulazione della legge di conservazione della quantità di moto (1.39) che il tensore $\underline{\underline{\Pi}}$ prende il nome sopra citato. Il prodotto $\underline{\underline{\Pi}} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$, infatti, equivale alla quantità di moto vettoriale che attraversa per unità di tempo l'elemento

infinitesimo di superficie avente versore normale pari ad \mathbf{n} ed area uguale a $d\Sigma$. Analogamente all'osservazione effettuata nel paragrafo precedente, è possibile individuare il contributo convettivo ($\rho v_i v_k$) ed il termine $p\delta_{ik}$ derivante dal lavoro di pressione compiuto dal fluido esterno Σ sul fluido interno. Alla luce delle relazioni (1.38) e (1.39) è opportuno notare che nel caso in cui la regione di spazio R sia isolata, il vettore quantità di moto \mathbf{P} si conserva.

1.2 Fluidi reali

Dopo aver analizzato alcuni aspetti riguardanti la dinamica dei fluidi perfetti, verranno ora presi in considerazione i fluidi reali. A differenza dei primi, all'interno di questi ultimi avvengono processi irreversibili quali, ad esempio, la dissipazione di energia per effetto di attriti interni dovuti alla viscosità del fluido. La presenza di quest'ultima modifica la struttura molto semplice (diagonale) del tensore degli sforzi. Questi ultimi, infatti, nel caso dei fluidi reali non sono unicamente riconducibili al campo di pressione, ma sono anche dovuti alle forze viscosi ora presenti nel fluido. Il tensore degli sforzi assume quindi la seguente espressione:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (1.40)$$

dove σ'_{ik} è il *tensore degli sforzi viscosi* per un fluido *newtoniano*.

Di conseguenza, il tensore degli sforzi $\underline{\underline{\sigma}}$ è ora composto da una parte isotropa e da una parte viscosa. L'espressione generale di σ'_{ik} è deducibile effettuando due considerazioni fisiche.

- Fra due elementi infinitesimi di fluidi adiacenti, le cui posizioni differiscono per un vettore infinitesimo $d\mathbf{x}$, vi è attrito se e solo se i due elementi di fluido scivolano l'uno sull'altro, ovvero se le loro velocità sono diverse. Questa condizione si traduce nel seguente requisito: $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \neq 0$ per almeno una coppia di indici (i, k) . Di conseguenza, σ'_{ik} deve essere funzione delle derivate spaziali delle componenti del vettore velocità. Supponendo i gradienti del campo di velocità sufficientemente piccoli, si può ipotizzare una dipendenza lineare di σ'_{ik} dai termini $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$. Il vincolo che il tensore degli sforzi viscosi debba annullarsi per un campo di velocità uniforme comporta che nell'espressione di σ'_{ik} non possano comparire termini indipendenti dai gradienti del campo di velocità. Queste ultime due affermazioni implicano che l'espressione di σ'_{ik} deve necessariamente essere una

combinazione lineare delle derivate spaziali delle componenti della velocità.

- Nel caso in cui il fluido sia in rotazione uniforme attorno ad un asse il tensore degli sforzi viscosi deve annullarsi in quanto non sono presenti attriti interni dato che il fluido appare in quiete se osservato da un osservatore solidale con un sistema di riferimento non inerziale. Il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ di un fluido in rotazione uniforme è dato dalla seguente espressione $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \Omega \times \mathbf{x}$ con Ω vettore velocità angolare di rotazione il quale in condizioni di rotazione uniforme è indipendente dalla posizione \mathbf{x} . Un campo di velocità dato dalla relazione precedente soddisfa le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0 \quad \forall(i, k) \quad (1.41)$$

Quest'ultima osservazione implica che σ'_{ik} deve essere combinazione lineare non delle singole derivate parziali $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ ma delle loro combinazioni simmetriche $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ (è opportuno puntualizzare, tuttavia, che quest'ultima affermazione non è valida per i continui polari).

Il più generico tensore di rango due che soddisfa le precedenti considerazioni ha la seguente espressione:

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.42)$$

dove μ e ζ sono i cosiddetti coefficienti di viscosità (ζ è frequentemente denominato anche coefficiente di seconda viscosità). μ e ζ sono grandezze fisiche scalari ed indipendenti dalla velocità nell'ipotesi in cui il fluido abbia proprietà isotrope ed in generale sono funzioni della temperatura T e della pressione p . Inoltre, come verrà dimostrato successivamente nel lavoro di tesi, μ e ζ sono entrambi strettamente positivi. Nella (1.42) i termini sono stati riarrangiati in modo tale da far sì che il tensore fra parentesi sia un tensore a traccia nulla. Di conseguenza, il tensore degli sforzi complessivo nel caso di fluidi viscosi ha la seguente espressione:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.43)$$

1.2.1 Equazioni di Navier-Stokes

A questo stadio è possibile ricavare le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi viscosi note anche universalmente con il nome di *equazioni di Navier-Stokes* dai nomi dei due studiosi che giunsero, indipendentemente l'uno dall'altro, alla loro prima formulazione. Per giungere a tali equazioni è sufficiente sostituire il tensore degli sforzi ideale nell'espressione (1.38) con il tensore degli sforzi contenente al proprio interno anche il contributo viscoso (1.43). L'espressione per il *tensore densità di flusso di quantità di moto per i fluidi reali* è quindi la seguente:

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik} &= \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) - \\ &- \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Alla luce di questo risultato, si è ora in grado di riscrivere l'equazione che afferma la conservazione della quantità di moto (1.37) in presenza di un fluido reale. Basta, infatti, sostituire nel secondo membro della (1.37) l'espressione di Π_{ik} appena riportata ed utilizzare l'equazione di continuità (1.8), ottenendo la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Compiendo un ulteriore passaggio si giunge alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Le (1.46) sono la forma più generale delle equazioni del moto di un fluido viscoso: le celebri equazioni differenziali di Navier-Stokes.

1.2.2 Equazione generale della trasmissione del calore

All'interno dei fluidi reali, come già illustrato precedentemente, hanno luogo dei processi termodinamici irreversibili, quali la dissi-

pazione di energia per effetto degli attriti interni viscosi presenti fra elementi di fluido aventi velocità diverse (fenomeno analizzato in profondità nei sottoparagrafi precedenti) e la *conduzione termica*. Quest'ultimo fenomeno fisico interviene qualora nel fluido in esame il campo di temperatura in un dato istante non sia uniforme, nel caso in cui, ovvero, siano presenti all'interno del fluido gradienti di temperatura.

Il processo di conduzione termica consiste in un trasferimento molecolare di energia (calore) da punti nel fluido a temperatura maggiore a punti a temperatura inferiore ed è completamente disaccoppiato dal moto macroscopico del fluido, intervenendo anche nella circostanza di fluido in quiete. Supponendo che i gradienti di temperatura presenti nel fluido siano sufficientemente piccoli, si è in grado di determinare l'espressione per il vettore densità di flusso di calore \mathbf{q} . Si consideri, a tale scopo, l'espansione di \mathbf{q} in serie di potenze del gradiente della temperatura ∇T . Nelle condizioni elencate precedentemente è lecito troncare la serie di potenze al termine lineare, trascurando le potenze di ∇T superiori alla prima in quanto infinitesimi di ordine superiore. Osservando, inoltre che il flusso di calore per effetto della conduzione termica ha luogo se e solo se è presente un gradiente di temperatura, si giunge alla conclusione che il termine costante nell'espansione di \mathbf{q} deve necessariamente essere nullo. Alla luce delle considerazioni appena effettuate, il *vettore densità di flusso di calore dovuto alla conduzione termica* ha la seguente espressione matematica:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (1.47)$$

dove κ è il *coefficiente di conduzione termica* il quale, in generale, è funzione della temperatura T e della pressione p . Imponendo il vincolo fisico che il flusso di calore sia antiparallelo al gradiente della temperatura si deduce che κ deve necessariamente essere strettamente positivo.

Dalla definizione di \mathbf{q} segue direttamente che il termine $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$ rappresenta la quantità di calore che attraversa per unità di tempo l'elemento infinitesimo di superficie avente versore normale pari ad \mathbf{n} ed area uguale a $d\Sigma$. Di conseguenza, nel caso in cui il fluido reale sia in quiete, la variazione per unità di tempo dell'energia complessiva presente all'interno della frontiera di R all'istante t è data dalla seguente relazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{tot}(t) = \oint_{\Sigma(R)} \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_R \nabla \cdot (\kappa \nabla T) d^3x \quad (1.48)$$

Tuttavia, la quasi totalità dei sistemi fluidodinamici analizza-

ti non presenta un campo di velocità identicamente nullo in ogni punto del dominio spazio-temporale nel quale ha luogo il moto del fluido. La situazione più abituale consiste, infatti, in un fluido reale i cui campi di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ sono variabili nello spazio e nel tempo, caratterizzati solitamente dalla presenza di gradienti esigui. Questa non uniformità dei campi \mathbf{v} e T , oltre a collocare il sistema al di fuori dall'equilibrio termodinamico, ha ovviamente delle ripercussioni sulla legge di conservazione dell'energia (1.48), la quale, si ricorda, è valida unicamente per sistemi fluidodinamici in cui il fluido si trovi in stato di quiete. Nel caso in cui, invece, il fluido sia in moto, il trasferimento di energia, oltre ad essere dovuto al fenomeno della conduzione termica, è frutto di tre diversi processi:

- trasferimento di energia legato direttamente allo spostamento di masse di fluido (contributo convettivo)
- lavoro delle forze di pressione sulla frontiera di R
- lavoro delle forze viscosi, sempre sulla frontiera di R

I contributi dei primi due fenomeni, essendo presenti anche nei fluidi ideali, sono stati illustrati nel paragrafo 1.1 e sono riportati nella (1.33), la quale è anche il punto di partenza per determinare il contributo viscoso. Per il secondo integrale della (1.33) vale, infatti, la seguente uguaglianza:

$$-\oint_{\Sigma(R)} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \oint_{\Sigma(R)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (1.49)$$

Sostituendo ora al tensore degli sforzi ideale $\underline{\underline{\sigma}}$ presente nella relazione appena riportata il tensore degli sforzi reale (1.40) si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(R)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma &= \oint_{\Sigma(R)} [(-p\mathbb{I} + \underline{\underline{\sigma}}') \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Sigma \\ &= - \int_R \nabla \cdot (p\mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v}) d^3x \end{aligned} \quad (1.50)$$

dove \mathbb{I} è il tensore identità. La (1.50) rappresenta la variazione per unità di tempo dell'energia complessiva presente all'interno di Σ per effetto della potenza sviluppata sulla frontiera di R dalle forze presenti all'interno del fluido.

Mettendo insieme i diversi contributi (trasformando il termine convettivo presente nella (1.33) in un integrale di volume) si giunge alla seguente *formulazione integrale della legge di conservazione*

dell'energia per un fluido reale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} E_{tot}(t) &= - \int_R \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \rho \mathbf{v} + p \mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v} - \kappa \nabla T \right] d^3x \\ &= - \int_R \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \rho \mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v} - \kappa \nabla T \right] d^3x\end{aligned}\quad (1.51)$$

La (1.51) ammette un'equivalente *formulazione differenziale* la quale è d'immediata deduzione impiegando la (1.18):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) = - \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \rho \mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v} - \kappa \nabla T \right] \quad (1.52)$$

Per effettuare alcune considerazioni fisiche su alcuni processi caratteristici dei fluidi reali e per riuscire a dedurre l'equazione generale della trasmissione del calore (nota anche con il nome di equazione per l'entropia) è necessario trasformare il primo membro della (1.52) mediante le equazioni del moto ed alcune relazioni termodinamiche, seguendo un procedimento del tutto analogo al metodo utilizzato nel sottoparagrafo 1.1.3.

In primo luogo, è opportuno riscrivere le equazioni di Navier-Stokes (1.46) nella seguente forma alternativa:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \quad (1.53)$$

A questo stadio, impiegando la (1.53) e l'equazione di continuità (1.8), si è in grado di scrivere la seguente sequenza di uguaglianze:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) &= \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + v_i \left(- \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \right) - \\ &\quad - \varepsilon \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.54)$$

Se si svolgono i prodotti e si riordinano i termini in modo tale da consentire una più agevole lettura si giunge alla seguente equazione:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) &= - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] - \mathbf{v} \cdot \nabla p + \\ &\quad + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \varepsilon \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.55)$$

Avvalendosi delle relazioni (1.23), (1.24) e (1.27) dedotte nel sottoparagrafo 1.1.3 è possibile riformulare la (1.55):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) + \\ &+ \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Il termine viscoso presente nella (1.56) può essere facilmente riscritto nella seguente forma

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (1.57)$$

mentre gli altri termini assumono una forma più compatta impiegando alcune identità differenziali. Alla luce di queste osservazioni, aggiungendo e sottraendo $\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$, il primo membro della (1.52) assume, infine, la seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) &= -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \rho \mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v} - \kappa \nabla T \right] + \\ &+ \rho T \frac{Ds}{Dt} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Confrontando la relazione appena determinata con la (1.52), si è in grado di ricavare l'equazione generale della trasmissione del calore:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (1.59)$$

L'equazione generale della trasmissione del calore permette di compiere alcune considerazioni fisiche molto importanti e significative riguardo agli scambi termici che coinvolgono ciascun elemento infinitesimo di volume di fluido lungo la propria traiettoria. Il primo membro della (1.59) rappresenta, infatti, il calore scambiato per unità di tempo e volume da ciascun elemento infinitesimo di fluido durante il proprio moto. Di conseguenza, l'equazione generale della trasmissione del calore afferma che il calore scambiato dagli elementi di fluido nel corso degli spostamenti da loro compiuti trae origine da due fenomeni propri dei fluidi reali: la dissipazione di energia sotto forma di calore per effetto degli attriti interni viscosi (primo termine del secondo membro della (1.59)) e la conduzione termica la quale interviene nel caso in cui l'elemento di fluido attraversi regioni di fluido a temperature diverse dalla propria.

Le affermazioni appena compiute sono coerenti con quanto affermato nel paragrafo 1.1 riguardo alle caratteristiche peculiari dei fluidi ideali. Se, infatti, il fluido in esame fosse un fluido perfetto, non presentando quest'ultimo, per definizione, alcuna viscosità interna e fenomeni di conduzione termica, il secondo membro della (1.59) risulterebbe essere nullo, riottenendo così l'equazione di moto adiabatico (1.31) illustrata nel sottoparagrafo 1.1.3 nel corso della trattazione dei fluidi ideali.

1.2.3 Secondo principio della termodinamica

In questa sezione verranno determinati i segni dei due coefficienti di viscosità μ e ζ impiegando l'equazione generale della trasmissione del calore (1.59) ed il secondo principio della termodinamica.

Come primo passo si espliciti il tensore degli sforzi viscosi σ'_{ik} con l'aiuto della relazione (1.42) ottenendo la seguente uguaglianza:

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.60)$$

È facile dimostrare che per il primo termine della relazione precedente sussiste la seguente uguaglianza

$$\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 \quad (1.61)$$

mentre per il secondo termine vale la relazione:

$$\zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad (1.62)$$

Alla luce dei risultati appena ottenuti è possibile riscrivere l'equazione generale della trasmissione del calore (1.59) nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \rho T \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \\ &+ \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \end{aligned} \quad (1.63)$$

Si consideri ora l'entropia totale di un volume di fluido il quale occupa una regione di spazio arbitraria R . L'espressione per questa grandezza fisica è la seguente:

$$S(t) = \int_R \rho s \, d^3x \quad (1.64)$$

La derivata sostanziale rispetto al tempo dell'entropia complessiva posseduta dal fluido che occupa la regione R all'istante t , tenendo conto che la regione di spazio R è fissata (ovvero non dipende dal tempo), ha quindi la seguente espressione:

$$\frac{DS(t)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_R \rho s d^3x = \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) d^3x \quad (1.65)$$

Sviluppando la funzione integranda impiegando l'equazione di continuità e la formulazione (1.63) dell'equazione generale della trasmissione del calore si ottiene la seguente sequenza di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) &= s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial s}{\partial t} = -s \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{1}{T} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla s \\ &= -\nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) + \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{1}{T} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Mediante l'utilizzo della (1.66) è ora banale riscrivere l'espressione della derivata sostanziale rispetto al tempo dell'entropia totale posseduta dal fluido nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{DS(t)}{Dt} &= - \int_R \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) d^3x + \int_R \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 d^3x + \\ &\quad + \int_R \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 d^3x + \int_R \frac{1}{T} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) d^3x \end{aligned} \quad (1.67)$$

È facile osservare che per l'ultimo integrale della (1.67) sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \int_R \frac{1}{T} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) d^3x &= \int_R \nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{T} \nabla T \right) d^3x + \int_R \frac{\kappa}{T^2} (\nabla T)^2 d^3x \\ &= \oint_{\Sigma(R)} \frac{\kappa}{T} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_R \frac{\kappa}{T^2} (\nabla T)^2 d^3x \end{aligned} \quad (1.68)$$

Alla luce del risultato appena ottenuto la (1.67) assume la seguente

veste:

$$\begin{aligned} \frac{DS(t)}{Dt} = & - \oint_{\Sigma(R)} \rho s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_R \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 d^3x + \\ & + \int_R \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 d^3x + \oint_{\Sigma(R)} \frac{\kappa}{T} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_R \frac{\kappa}{T^2} (\nabla T)^2 d^3x \end{aligned} \quad (1.69)$$

Si supponga adesso che il volume di fluido considerato sia non limitato (si faccia tendere, ovvero, la regione di spazio R all'intero spazio \mathbb{R}^3) ed abbia la caratteristica di essere in uno stato di quiete all'infinito. In queste circostanze, il primo dei due integrali di superficie presenti nella (1.69) dà un contributo nullo. Assumendo inoltre che la temperatura T del fluido tenda abbastanza rapidamente ad un valore costante all'infinito, anche il valore del secondo integrale di superficie è pari a zero. Nelle condizioni sopra elencate l'espressione per la derivata sostanziale rispetto al tempo dell'entropia totale posseduta dal fluido è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{DS(t)}{Dt} = & \int_R \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 d^3x + \\ & + \int_R \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 d^3x + \int_R \frac{\kappa}{T^2} (\nabla T)^2 d^3x \end{aligned} \quad (1.70)$$

Il secondo principio della termodinamica afferma che qualora in un sistema isolato intervengano processi termodinamicamente irreversibili l'entropia complessiva del sistema deve necessariamente aumentare. Questo enunciato del secondo principio implica che il secondo membro della (1.70) deve inevitabilmente essere strettamente positivo per un fluido reale dati i fenomeni di dissipazione di energia, dovuti alla viscosità del fluido, e gli scambi di calore per conduzione che ne caratterizzano il moto. Le considerazioni appena compiute hanno come risultato il vincolo che ciascun integrale presente nel secondo membro della precedente equazione debba essere strettamente maggiore di zero. Da questa osservazione e dalle espressioni delle funzioni integrande, segue che i coefficienti di viscosità μ e ζ devono necessariamente essere positivi (così come κ , come già illustrato precedentemente).

1.2.4 Equazioni di chiusura

Nella maggior parte dei problemi di dinamica dei fluidi affrontati, le grandezze fisiche sulle quali viene focalizzata l'attenzione sono le seguenti:

- campo vettoriale di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$;
- campo scalare di densità $\rho(\mathbf{x}, t)$;
- campo scalare di temperatura $T(\mathbf{x}, t)$;
- campo scalare di pressione $p(\mathbf{x}, t)$;
- campo scalare di entropia $S(\mathbf{x}, t)$ (o, equivalentemente, campo scalare di entropia per unità di massa $s(\mathbf{x}, t)$).

I quattro campi scalari presenti nell'elenco soprastante riguardano quantità termodinamiche. Questa particolarità implica che due delle suddette grandezze termodinamiche possono essere determinate dalle due restanti mediante l'equazione termodinamica di stato del fluido, la quale, ovviamente, dipende dalla natura del fluido considerato. Le relazioni così ricavate possono, ad esempio, essere le seguenti:

$$p = p(\rho, T) \quad (1.71)$$

$$s = s(\rho, T) \quad (1.72)$$

Il numero di incognite del problema fluidodinamico per caratterizzare completamente lo stato di un fluido in movimento scende, quindi, a cinque. Sono necessarie, conseguentemente, non meno di cinque equazioni per descrivere matematicamente in modo univoco lo stato del fluido. Queste cinque equazioni fondamentali sono deducibili da principi primi della fisica quali la legge di conservazione della massa, il vincolo di conservazione dell'energia ed il teorema della quantità moto. Naturalmente, nel caso di fluido reale, le equazioni ricavate dall'applicazione dei principi fisici appena riportati differiscono dal caso di fluido ideale.

Per i fluidi perfetti, infatti, il sistema di equazioni fondamentali dedotte dalle leggi di conservazione è costituito dalle relazioni (1.8), (1.15) e (1.31). Questo sistema di equazioni differenziali, unito alle relazioni termodinamiche (1.71), (1.72) ed alle opportune condizioni al contorno (le quali per un fluido perfetto sono l'impermeabilità delle superfici solide al fluido) consentono di descrivere in modo completo lo stato di un fluido ideale in movimento.

Il discorso riguardante i fluidi reali risulta essere, invece, leggermente più complesso. Il sistema è composto dalle equazioni differenziali (1.8), (1.46) e (1.59) (o, per quanto riguarda quest'ultima, in modo del tutto equivalente, la sua versione più esplicita (1.63)). In queste relazioni compaiono dei campi scalari incogniti, quali i coefficienti di viscosità μ e ζ ed il coefficiente di conduttività termica κ . Di conseguenza, per chiudere il sistema di equazioni fondamentali per un fluido reale sono necessarie le seguenti relazioni costitutive:

$$\mu = \mu(\rho, T) \quad (1.73)$$

$$\zeta = \zeta(\rho, T) \quad (1.74)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \quad (1.75)$$

Queste ulteriori relazioni, unite al sistema di equazioni differenziali sopra illustrato ed alle relazioni termodinamiche (1.71) e (1.72) sono sufficienti a determinare completamente lo stato di un fluido reale in moto una volta specificate opportunamente le condizioni al contorno per il campo di temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ ed il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Queste ultime, per un fluido reale, consistono nell'impossibilità degli strati di fluido a contatto con superfici solide di essere in moto relativo rispetto a queste ultime. In altre parole, gli elementi di fluido a contatto con superfici solide sono vincolati ad aderirvi completamente, non sono contemplabili cioè nè lo scivolamento su superfici solide nè la permeabilità di queste ultime al fluido.

1.2.5 Fluidi incomprimibili

In un grandissimo ventaglio di circostanze, alcune anche critiche quali, ad esempio, il flusso subsonico attorno ad un profilo sottile, i fluidi possono essere considerati *incomprimibili*. I requisiti che, infatti, devono essere soddisfatti affinché un fluido possa essere considerato incomprimibile sono i seguenti:

- la velocità del fluido deve essere sufficientemente piccola rispetto alla velocità del suono;
- le variazioni massime ed assolute di temperatura all'interno del fluido devono essere sufficientemente piccole.

In tali condizioni, ciascun elemento di volume di fluido conserva il valore della propria densità lungo la propria traiettoria. La densità è quindi costante del moto degli elementi di fluido e, di conseguenza, sussiste la seguente relazione:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1.76)$$

Questa uguaglianza consente di semplificare l'espressione dell'equazione di continuità (1.8) nel caso incomprimibile. Si consideri, infatti, la seguente formulazione alternativa dell'equazione di continuità:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.77)$$

Nelle ipotesi di validità della (1.76), la (1.77) assume la seguente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.78)$$

L'equazione appena riportata è l'*equazione di continuità per un fluido incomprimibile* e, di conseguenza, sostituisce nel caso incomprimibile l'equazione di continuità nel sistema di equazioni fondamentali per un fluido reale. Inoltre, la solenoidalità del campo di velocità ha delle ripercussioni notevoli sulle altre equazioni appartenenti al suddetto sistema. Le equazioni di Navier-Stokes (1.46), infatti, si semplificano considerevolmente, trasformandosi nelle seguenti uguaglianze

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.79)$$

mentre l'equazione generale della trasmissione del calore (1.63) assume, invece, la seguente veste:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (1.80)$$

Una conseguenza diretta e lampante della solenoidalità del campo di velocità (e, dunque, dell'incomprimibilità di un fluido) è la scomparsa del secondo coefficiente di viscosità ζ dal sistema di equazioni fondamentali.

1.2.6 Fluidi a proprietà costanti

Semplificazioni ulteriori delle equazioni fondamentali si verificano nel caso (assai frequente) in cui il fluido, oltre ad essere incomprimibile, possieda un campo di densità uniforme in un dato istante. In questa circostanza, infatti, il valore della densità $\rho(\mathbf{x}, t)$ risulta essere indipendente sia dalla posizione \mathbf{x} che dal tempo t . Vale, quindi, la seguente relazione:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = cost \quad (1.81)$$

La presenza di un campo di densità costante, per effetto congiunto dell'incomprimibilità del fluido e dell'esistenza di un campo di densità uniforme in un dato istante, ha delle importanti implicazioni sulle

espressioni di $\mu(\rho, T)$ e $\kappa(\rho, T)$. Questi ultimi campi scalari, infatti, possono ragionevolmente considerarsi anch'essi costanti all'interno del fluido, dato il valore costante della densità e tenuto conto dei valori esigui che le variazioni di temperatura potenzialmente assumono all'interno del fluido (nel caso contrario il fluido non potrebbe essere considerato incompressibile, cfr.1.2.5). Di conseguenza, le (1.73) e (1.75) assumono la seguente forma:

$$\mu(\rho, T) = \text{cost} \quad (1.82)$$

$$\kappa(\rho, T) = \text{cost} \quad (1.83)$$

Un fluido caratterizzato dalla presenza di campi scalari densità ρ , viscosità μ e conduttività κ costanti all'interno del fluido stesso (un fluido, ovvero, per il quale sono valide le (1.81), (1.82) e (1.83)) è un *fluido a proprietà costanti*.

L'equazione di conservazione della quantità di moto per un fluido incompressibile (1.79) si trasforma nella seguente espressione nel caso in cui il fluido sia a proprietà costanti:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i \quad (1.84)$$

La relazione precedente è abitualmente riportata nella forma vettoriale seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.85)$$

dove è stata introdotta la *viscosità cinematica* ν definita dalla relazione $\nu = \mu/\rho$.

L'equazione generale della trasmissione del calore per un fluido a proprietà costanti assume, invece, la seguente veste:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \kappa \nabla^2 T \quad (1.86)$$

Di conseguenza, il sistema di equazioni necessario per determinare in modo completo ed univoco lo stato di un fluido reale a proprietà costanti in movimento è composto dalle relazioni (1.78), (1.85) e (1.86). A questo sistema differenziale è necessario aggiungere le terne di relazioni (1.81), (1.82) e (1.83), dove le ultime due uguaglianze sostituiscono le relazioni costitutive (1.73) e (1.75) mentre, come già illustrato precedentemente e come si può facilmente osservare dalle espressioni delle equazioni fondamentali, non è più necessario specificare la relazione costitutiva per il secondo coefficiente di viscosità

ζ in quanto quest'ultimo non è più presente nel sistema differenziale sopra menzionato.

Oltre ai valori della densità e dei coefficienti di viscosità e conduttività, per chiudere il sistema di equazioni per un fluido reale a proprietà costanti è indispensabile l'espressione dell'entropia per unità di massa s in funzione della temperatura T e della pressione p .

A questo punto è doveroso compiere una considerazione riguardo al ruolo ricoperto dal campo di pressione nel caso in cui il sistema studiato sia costituito da un fluido reale a proprietà costanti. In tali circostanze, infatti, la pressione perde qualunque significato termodinamico in quanto la propria espressione matematica non viene più determinata mediante l'utilizzo dell'equazione termodinamica di stato, bensì è soluzione, insieme al campo di velocità, del sistema differenziale composto dall'equazione (1.85) e dal vincolo di incomprimibilità (1.78). La pressione assume, quindi, il significato di parametro matematico presente nell'equazione di conservazione della quantità di moto la cui funzione consiste nel far sì che il campo di velocità soddisfi istantaneamente il vincolo di solenoidalità.

Una volta noto, infatti, il campo di velocità \mathbf{v} di un fluido reale a proprietà costanti, il campo di pressione p è determinabile risolvendo la seguente equazione di Poisson, ottenuta applicando l'operatore differenziale divergenza ad ambo i membri della (1.85):

$$\begin{aligned}\nabla^2 p &= -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\ &= -\rho \frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_k \partial x_i}\end{aligned}\tag{1.87}$$

Alla luce delle ultime considerazioni formulate, è importante notare il disaccoppiamento dell'equazione generale della trasmissione del calore (1.86) dalle altre equazioni costituenti il sistema.

1.2.7 Dissipazione di Energia

Quest'ultimo paragrafo del primo capitolo è dedicato alla deduzione dell'espressione matematica della dissipazione di energia cinetica per un fluido incomprimibile a proprietà costanti, di fondamentale importanza per lo studio compiuto in questo lavoro di tesi. Per ricavare tale espressione è stata considerata una regione di spazio R fissata. L'energia cinetica $E_{cin(R)}$ del fluido presente all'interno della

frontiera di R $\Sigma(R)$ è data dal seguente integrale:

$$E_{cin(R)} = \int_R \frac{1}{2} \rho v^2 d^3x \quad (1.88)$$

Di conseguenza, la variazione rispetto al tempo di $E_{cin(R)}$ ha la seguente espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)} = \int_R \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) d^3x \quad (1.89)$$

Sviluppando la derivata parziale presente sotto il segno di integrale tenendo conto dell'equazione di continuità nel caso incomprimibile (1.78) e della formulazione (1.53) delle equazioni di Navier-Stokes si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.90)$$

A questo stadio tornano utili alcune relazioni introdotte nei paragrafi precedenti quali l'identità vettoriale (1.24) e l'uguaglianza (1.57). Con l'aiuto di tali identità e ricordando che il campo di densità è indipendente dalla posizione e dal tempo la (1.90) assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ &= -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v} \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.91)$$

È ora possibile riscrivere l'espressione (1.89) per la variazione rispetto al tempo dell'energia cinetica posseduta dal fluido presente all'interno di $\Sigma(R)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)} = - \oint_{\Sigma(R)} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{v} - \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \int_R \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} d^3x \quad (1.92)$$

L'integrale di superficie presente a secondo membro della (1.92) rappresenta il contributo al flusso di energia cinetica attraverso $\Sigma(R)$ di tre diversi fenomeni fisici. Il primo termine esprime il flusso di energia cinetica direttamente legato al flusso di massa (termine convettivo). Il secondo ed il terzo, invece, rappresentano il flusso di energia cinetica attraverso $\Sigma(R)$ dovuto alla potenza sviluppata sulla frontiera di R dalle forze di pressione e dalle forze viscosse.

L'integrale di volume che appare nella (1.92) possiede invece il seguente significato: rappresenta la diminuzione per unità di tempo dell'energia cinetica del fluido per effetto della dissipazione che trae origine dalla presenza di fenomeni viscosi.

Se si suppone di far tendere la regione di spazio limitata R all'intero spazio \mathbb{R}^3 e si sceglie come sistema di riferimento un sistema nel quale il fluido è in uno stato di quiete all'infinito, l'integrale di superficie presente nella (1.92) dà un contributo nullo e, come conseguenza, la (1.92) assume la seguente forma molto più compatta:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)} = - \int_R \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} d^3x \quad (1.93)$$

Si giunge ad una formulazione del tutto analoga di $\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)}$ nel caso in cui il fluido sia confinato in una regione di spazio limitata. In tali circostanze, infatti, la frontiera della regione occupata dal fluido è costituita da superfici solide sulle quali la velocità del fluido è necessariamente nulla a causa delle condizioni al contorno.

Sfruttando la simmetria del tensore degli sforzi viscosi, la (1.93) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)} = -\frac{1}{2} \int_R \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) d^3x \quad (1.94)$$

Sostituendo nella (1.94) al tensore degli sforzi viscosi σ'_{ik} l'espressione di quest'ultimo in condizioni di incomprimibilità data dalla relazione

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.95)$$

si ottiene la seguente uguaglianza per l'evoluzione temporale dell'energia cinetica del fluido:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)} = -\frac{1}{2} \int_R \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 d^3x \quad (1.96)$$

Quest'ultimo risultato subisce una leggera trasformazione nel caso in cui il fluido, oltre ad essere incomprimibile, sia caratterizzato da un campo di densità e da coefficienti di viscosità e conduttività indipendenti dalla posizione e dal tempo. In tali condizioni, la (1.96) assume la seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin(R)} = -\frac{1}{2} \mu \int_R \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 d^3x \quad (1.97)$$

L'equazione appena dedotta costituisce una verifica di quanto affermato nel paragrafo 1.2.3 riguardo al segno del coefficiente di viscosità dinamica μ . Dalla (1.97) segue, infatti, che μ deve necessariamente essere positivo in quanto, per effetto della dissipazione dovuta a fenomeni viscosi, l'energia cinetica posseduta da un fluido può solo diminuire nel tempo.

La formulazione della (1.97) rende possibile l'introduzione di una grandezza fisica di primaria importanza per il presente lavoro di tesi, la dissipazione di energia cinetica per unità di massa $\chi(\mathbf{x}, t)$. Per dedurre l'espressione matematica di questa quantità è sufficiente osservare che il termine $-\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 d^3x$ rappresenta l'energia cinetica dissipata da un singolo elemento infinitesimo di volume di fluido. Alla luce di questa considerazione, l'espressione di χ è di banale derivazione:

$$\chi = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.98)$$

Capitolo 2

Natura aleatoria delle correnti turbolente

2.1 Introduzione ai fenomeni turbolenti

Il fenomeno della turbolenza è considerato al giorno d'oggi uno degli ultimi problemi irrisolti della fisica classica nonostante abbia suscitato interesse negli studiosi già nel corso del diciannovesimo secolo. I primi tentativi di dominio del fenomeno delle correnti turbolente risalgono, infatti, alla seconda metà del 1800 durante la quale furono condotti i primi studi quantitativi del fenomeno. I pionieri dell'analisi fisico-matematica della turbolenza furono Boussinesq e Reynolds e fondamentale fu soprattutto il contributo fornito da quest'ultimo mediante la progettazione e la realizzazione di un esperimento che illustrò per la prima volta nella storia le condizioni nelle quali si verifica la transizione da regimi laminari a regimi turbolenti.

Nel 1883 Osborne Reynolds condusse, infatti, il seguente celebre esperimento. Egli analizzò il flusso di un fluido in un condotto cilindrico variando opportune condizioni al contorno ed osservò le proprietà caratteristiche dei diversi regimi che si instauravano nel cilindro. Per compiere questa analisi Reynolds ricorse ad un tracciante colorato il quale veniva iniettato nel flusso mediante un dispositivo posto sull'asse del cilindro. La diffusione ed il trasporto di questo tracciante nel campo di moto del fluido era ovviamente funzione delle condizioni al contorno e Reynolds osservò principalmente due comportamenti, molto distinti fra loro. A parità di fluido e diametro del condotto cilindrico, a basse velocità del fluido, le linee di corrente risultavano essere tutte parallele fra loro ed indipendenti dal tempo ed il diametro della striscia di tracciante giacente sull'asse del cilindro aumentava lentamente all'aumentare della distanza dal

dispositivo iniettante (regime laminare).

Nel caso in cui invece la velocità del fluido superava un certo valore critico, la situazione appariva molto più complessa e confusa della precedente. Il tracciante colorato era infatti diffuso e trasportato molto più rapidamente rispetto al caso laminare e la distribuzione del tracciante nel condotto cilindrico era molto più irregolare e disorganizzata, oltre ad essere significativamente variabile nel tempo.

La conclusione alla quale Reynolds giunse un anno dopo per spiegare questo diverso comportamento del fluido all'interno del cilindro nelle due circostanze fu la seguente: egli affermò l'esistenza di un unico parametro adimensionale il cui valore determina le caratteristiche del flusso che si instaura. Questo parametro oggi è universalmente noto con il nome di *Numero di Reynolds*, Re , in onore dello studioso britannico, e svolge proprio la funzione attribuitagli da quest'ultimo.

In generale, il numero di Reynolds è definito dalla seguente relazione

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.1)$$

dove U ed L sono rispettivamente le scale caratteristiche di velocità e lunghezza del flusso, mentre ν è la viscosità cinematica del fluido. Nel caso del flusso analizzato da Reynolds nel corso del suo esperimento U è il valor medio della velocità assiale effettuato su una qualunque sezione del condotto ortogonale all'asse di quest'ultimo ed L è il diametro di tale sezione.

Per il flusso di un fluido che si sviluppa all'interno di un dominio a simmetria cilindrica i valori soglia del numero di Reynolds sono 2300 e 4000. Il flusso, infatti, risulta essere laminare fino ad un valore di Re pari a 2300, mentre invece presenta le caratteristiche proprie di un regime turbolento completamente sviluppato per valori di Re superiori a 4000 (fra i due valori esiste una regione in cui è presente un regime transitorio).

L'esperimento di Reynolds evidenzia unicamente una delle innumerevoli differenze che intercorrono fra una corrente laminare ed una turbolenta dovute alla marcata difformità fra i campi di velocità del fluido nelle due circostanze. Infatti, mentre il campo di moto laminare di un fluido è deterministico (ovvero i valori delle grandezze fluidodinamiche sono determinabili in ogni punto del sistema in qualunque istante a partire dalle equazioni di Navier-Stokes avendo fissato opportune condizioni al contorno ed iniziali) questo non risulta più essere vero per un flusso turbolento. Il campo di velocità in quest'ultima situazione è infatti totalmente imprevedibile. Questo

comportamento completamente differente dei due campi di velocità è ben sintetizzato nella figura 2.1. Da tale figura emerge infatti in

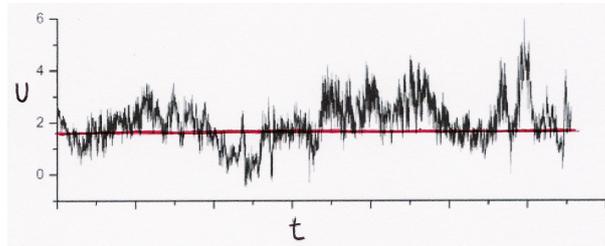


Figura 2.1: Andamento della componente del campo di velocità parallela al moto medio U in funzione del tempo t .

modo chiaro e netto la natura caotica delle correnti turbolente. Il segnale turbolento (rappresentato in nero), infatti, a differenza del caso laminare (in rosso), varia rapidamente nel tempo senza obbedire ad alcuna legge, in maniera del tutto aleatoria. Dall'evoluzione temporale della componente della velocità parallela al moto medio si deduce, quindi, una totale incapacità di prevederne il valore in un dato istante in una qualunque posizione del sistema persino nel caso in cui sia nota l'evoluzione temporale precedente. Dalla 2.1 è anche possibile osservare come sia presente una vastissima gamma di scale temporali che caratterizza le fluttuazioni del campo di velocità.

Nonostante queste caratteristiche aleatorie delle variabili fluidodinamiche, impiegando le equazioni deterministiche di Navier-Stokes è tuttavia possibile dedurre l'espressione esatta per alcune grandezze statistiche, quali, ad esempio, valori medi e fluttuazioni, le quali possiedono simmetrie dettate dalla geometria del sistema in esame. Si può quindi affermare che mentre nel caso laminare l'intero campo di velocità gode di alcune simmetrie determinate dal sistema preso in considerazione, nel caso turbolento sono le medie statistiche a fruire di tali simmetrie. Nella transizione da regimi laminari a regimi turbolenti si verifica, quindi, una rottura di simmetria, la quale viene ristabilita per le grandezze statistiche a valori del numero di Reynolds molto elevati.

2.2 Equazioni mediate di Reynolds

La natura caotica dei fenomeni turbolenti illustrate nel paragrafo precedente hanno indotto nel 1894 Reynolds ad effettuare il primo approccio statistico allo studio della turbolenza. L'analisi condotta dallo studioso britannico consiste nella seguente decomposizione del

campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (decomposizione ora nota con il nome di *decomposizione di Reynolds*):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

dove $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle$ è il valor medio (inteso in un senso opportuno da chiarire più avanti) del campo di velocità nel punto \mathbf{x} del sistema all'istante t e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è la rispettiva fluttuazione.

Tutte le equazioni dedotte nel capitolo 1 possono essere riscritte impiegando la decomposizione di Reynolds per scomporre, oltre al campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, i campi di pressione $p(\mathbf{x}, t)$, densità $\rho(\mathbf{x}, t)$, temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ ed entropia per unità di massa $s(\mathbf{x}, t)$. Con questo procedimento si è in grado di ricavare le corrispondenti equazioni per i campi medi e fluttuanti delle grandezze fisiche sopra elencate.

Nel corrente lavoro di tesi, come già anticipato nell'Introduzione, si è studiato il comportamento di uno scalare passivo in moti turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani nel caso in cui il fluido presente fra le due lastre piane parallele sia un fluido reale a proprietà costanti. Di conseguenza, le equazioni che governano la dinamica di quest'ultimo sono le uguaglianze riportate nel paragrafo 1.2.6 alle quali è possibile applicare la decomposizione di Reynolds.

Prima di procedere con tale operazione, è tuttavia necessario definire la notazione impiegata, in modo tale da rendere più scorrevole e chiara la lettura e la comprensione dei prossimi paragrafi di questa tesi. Scelta una terna di versori ortonormali $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, siano:

- $U(\mathbf{x}, t), V(\mathbf{x}, t), W(\mathbf{x}, t)$ le componenti del campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ lungo i tre assi coordinati individuati dai versori \mathbf{e}_i e $U_i(\mathbf{x}, t)$ la generica componente di $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ nella direzione i -esima;
- $\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle, \langle V(\mathbf{x}, t) \rangle, \langle W(\mathbf{x}, t) \rangle$ le componenti del campo medio di velocità $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle$ e $\langle U_i(\mathbf{x}, t) \rangle$ la componente di quest'ultimo nella direzione individuata dal versore \mathbf{e}_i ;
- $u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)$ le tre componenti del campo fluttuante di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ed $u_i(\mathbf{x}, t)$ la componente i -esima generica di quest'ultimo;
- $\langle p(\mathbf{x}, t) \rangle$ e $p'(\mathbf{x}, t)$ rispettivamente campo medio e campo fluttuante di pressione.

È ora possibile, avvalendosi della notazione sopra illustrata, trasformare le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi reali a proprietà costanti con l'ausilio della decomposizione di Rey-

nolds focalizzando soprattutto l'attenzione sull'equazione di continuità (1.78) e sulle equazioni di Navier-Stokes (1.85). È utile, a questo stadio, ricordare che le operazioni di media temporale indicate con $\langle \cdot \rangle$ commutano con le operazioni di derivazione spaziale $\frac{\partial}{\partial x_i}$, valgono ovvero le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\partial \langle A(\mathbf{x}, t) \rangle}{\partial x_i} \equiv \left\langle \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall i \quad (2.3)$$

dove $A(\mathbf{x}, t)$ è un generico campo scalare.

Alla luce delle puntualizzazioni appena compiute, è possibile riscrivere l'equazione di continuità per un fluido reale a proprietà costanti (1.78). Applicando, infatti, alla (1.78) l'operatore di media temporale si ottengono le seguenti relazioni le quali affermano che anche il campo medio di velocità è solenoidale:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = 0$$

da cui segue

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (2.4)$$

A questo punto, scomponendo il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ mediante la decomposizione di Reynolds ed utilizzando le proprietà lineari dell'operatore differenziale divergenza, la (1.78) assume la seguente veste:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

Queste ultime due relazioni, (2.4) e (2.5), hanno come conseguenza la solenoidalità del campo di fluttuazione della velocità \mathbf{u} , espressa dalla seguente uguaglianza:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

Si prendano ora in esame le equazioni di Navier-Stokes per i fluidi reali a proprietà costanti (1.84) ricavate nel paragrafo 1.2.6. In questa circostanza, effettuare un procedimento analogo a quello seguito per l'equazione di continuità (1.78) risulta essere leggermente più complesso a causa della presenza del termine convettivo non lineare. Applicando, infatti, l'operatore di media temporale alle (1.84) e tenendo conto della solenoidalità del campo di velocità e della notazione sopra introdotta si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle U_k U_i \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \langle U_i \rangle \quad (2.7)$$

Impiegando la decomposizione di Reynolds per scomporre il campo di velocità, la (2.7) assume la seguente forma:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_k \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \langle U_i \rangle \quad (2.8)$$

dove sono state utilizzate alcune proprietà dei campi di fluttuazione. Le covarianze delle componenti del campo di velocità (i termini $\langle u_i u_k \rangle$) sono frequentemente noti con il nome di *sforzi di Reynolds* per ragioni che verranno illustrate a breve.

La (2.8) può essere ulteriormente trasformata manipolando il termine non lineare associato al campo medio di velocità ricordando la solenoidalità di quest'ultimo, ottenendo le *equazioni mediate di Reynolds*:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k \mathbf{u} \rangle \quad (2.9)$$

Le equazioni mediate di Reynolds appena determinate possiedono una caratteristica sorprendente. Infatti, se non fosse presente il termine $\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k \mathbf{u} \rangle$ derivante dagli sforzi di Reynolds, le equazioni per il campo medio di velocità $\langle \mathbf{v} \rangle$ coinciderebbero con le equazioni per il campo di velocità \mathbf{v} , (1.85). Questa differenza, tuttavia, risulta essere fondamentale e le evidenti differenze nel comportamento di $\langle \mathbf{v} \rangle$ e \mathbf{v} sono riconducibili proprio agli effetti degli sforzi di Reynolds i quali giocano, quindi, un ruolo cruciale nella determinazione del campo medio.

Le equazioni mediate di Reynolds (2.9) possono essere agevolmente riscritte nella seguente forma

$$\rho \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle U_i \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \right) - \langle p \rangle \delta_{ik} - \rho \langle u_i u_k \rangle \right] \quad (2.10)$$

dalla quale risulta evidente il motivo per il quale i termini $\langle u_i u_k \rangle$ vengano denominati *sforzi* di Reynolds. Gli altri termini presenti oltre agli sforzi di Reynolds all'interno delle parentesi quadre nel secondo membro della (2.10) rappresentano infatti il valor medio del tensore degli sforzi σ_{ik} definito dalla (1.40) in presenza di fluidi reali a proprietà costanti. Il primo addendo è infatti la traduzione matematica degli sforzi viscosi medi causati dalla non uniformità del campo medio di velocità, mentre il secondo rappresenta lo sforzo isotropo dovuto al campo medio di pressione.

Il significato fisico del tensore degli sforzi di Reynolds è facilmente deducibile integrando ambo i membri della (2.10) su una regione di

spazio fissa. Procedendo in questo modo si deduce infatti che gli sforzi di Reynolds sono responsabili di un flusso medio convettivo di quantità di moto causato dalla presenza di un campo fluttuante di velocità sulla frontiera del dominio di integrazione.

In modo del tutto analogo al procedimento seguito nel capitolo 1 per ricavare l'equazione di Poisson per il campo di pressione nel caso di fluidi reali a proprietà costanti (1.87), è ora possibile dedurre l'equazione di Poisson per il campo medio di pressione prendendo la divergenza delle equazioni mediate di Reynolds (2.9), ottenendo la seguente relazione:

$$\nabla^2 \langle p \rangle = -\rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_i \partial x_k} \quad (2.11)$$

Conformemente a quanto osservato per le equazioni mediate di Reynolds, anche in questa circostanza la somiglianza formale delle equazioni di Poisson per il campo di pressione ed il rispettivo campo medio è quasi completa. L'unica differenza formale fra la (1.87) e la (2.11) è, infatti, costituita dalla presenza in quest'ultima equazione di un termine proveniente dal tensore degli sforzi di Reynolds.

2.2.1 Equazioni mediate per il campo di uno scalare passivo

Analogamente a quanto compiuto per il campo di velocità, è possibile derivare delle equazioni per il campo medio di uno scalare passivo $\phi(\mathbf{x}, t)$. A tale scopo, è opportuno e fondamentale notare che anche nel caso di uno scalare passivo è legittimo e soprattutto efficace scomporre $\phi(\mathbf{x}, t)$ nel proprio campo medio $\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle$ e nel rispettivo campo di fluttuazione $\phi'(\mathbf{x}, t)$. È utile, ovvero, la seguente decomposizione *alla Reynolds*:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle + \phi'(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

È ora possibile dedurre l'equazione per $\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle$ partendo dalla seguente equazione differenziale (nota anche con il nome di *equazione di diffusione*) che governa il comportamento di uno scalare passivo nel caso in cui, come in questo lavoro di tesi, la diffusività $\gamma(\mathbf{x}, t)$ sia considerata costante all'interno del fluido:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \gamma \nabla^2 \phi \quad (2.13)$$

Alla luce della solenoidalità del campo di velocità la (2.13) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \gamma \nabla^2 \phi \quad (2.14)$$

In modo del tutto affine al procedimento seguito nel paragrafo precedente per ricavare le equazioni mediate di Reynolds, per formulare l'equazione differenziale che descrive la distribuzione spaziale e temporale del campo medio di scalare $\langle\phi(\mathbf{x}, t)\rangle$ si applica l'operatore di media temporale alla (2.14) e si scompongono i campi di velocità e scalare nei rispettivi campi medi e fluttuanti, ottenendo la seguente relazione:

$$\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle(\langle\phi\rangle + \phi')(\langle\mathbf{v}\rangle + \mathbf{u})\rangle] = \gamma\nabla^2\langle\phi\rangle \quad (2.15)$$

Impiegando nuovamente le proprietà dei campi di fluttuazione e la solenoidalità del campo medio di velocità si giunge all'*equazione mediata per uno scalare passivo*:

$$\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial t} + \langle\mathbf{v}\rangle \cdot \nabla\langle\phi\rangle + \nabla \cdot (\langle\phi'\mathbf{u}\rangle) = \gamma\nabla^2\langle\phi\rangle \quad (2.16)$$

L'equazione appena dedotta mostra come anche nel caso dello scalare passivo compaiano delle covarianze, $\langle\phi'\mathbf{u}\rangle$. Questo termine, inoltre, svolge un ruolo simile alla funzione svolta dagli sforzi di Reynolds nelle equazioni mediate per il campo di velocità. Infatti, anche in questa circostanza, se non fosse presente l'addendo contenente la covarianza sopra menzionata l'equazione per il campo medio di scalare $\langle\phi(\mathbf{x}, t)\rangle$ sarebbe formalmente identica all'equazione per $\phi(\mathbf{x}, t)$ una volta sostituito il campo di velocità con il rispettivo campo medio.

Oltre a rivestire un analogo ruolo formale nelle rispettive equazioni mediate, i termini $\langle\phi'\mathbf{u}\rangle$ e $\langle u_i u_k \rangle$ hanno anche un significato fisico molto simile. Il vettore covarianza scalare-velocità è infatti responsabile di un flusso medio convettivo di scalare causato dalla presenza dei campi fluttuanti di velocità e scalare, come si può agevolmente dedurre integrando entrambi i membri della (2.16) su una regione di spazio fissa.

2.3 Equazioni di bilancio

In questo paragrafo del capitolo 2 verranno dedotte ed illustrate le equazioni di bilancio delle due grandezze fisiche che rivestono un ruolo centrale in questa tesi:

- l'energia cinetica turbolenta k ;
- la varianza dello scalare passivo Θ .

2.3.1 Energia cinetica turbolenta

L'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) costituisce la parte turbolenta dell'energia cinetica media del flusso ed è definita dalla seguente relazione:

$$k(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.17)$$

Prima di essere in grado di dedurre l'equazione differenziale che determina l'evoluzione temporale dell'energia cinetica turbolenta è tuttavia necessario ricavare l'equazione che governa l'evoluzione del campo di fluttuazione della velocità. Per raggiungere tale scopo è sufficiente sottrarre le equazioni mediate di Reynolds (2.9) alle equazioni di Navier-Stokes per i fluidi reali a proprietà costanti (1.85), ottenendo la seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u_j + \mathbf{u} \cdot \nabla \langle U_j \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle \quad (2.18)$$

Si prenda ora una regione di spazio fissa R la cui frontiera sia $\Sigma(R)$. L'energia cinetica turbolenta complessiva $K_R(t)$ presente all'interno di $\Sigma(R)$ all'istante t è data dalla seguente relazione:

$$K_R(t) = \int_R \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle d^3x \quad (2.19)$$

A questo punto, per determinare l'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta è necessario ricavare un'espressione che descriva l'evoluzione temporale di $K_R(t)$. A tale scopo, è utile effettuare la derivata parziale rispetto al tempo della (2.19), conseguendo la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_R \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle d^3x &= \rho \int_R \langle u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} \rangle d^3x \\ &= \rho \int_R \langle \left\{ -\frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} - u_j \mathbf{u} \cdot \nabla \langle U_j \rangle + u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle - \right. \\ &\quad \left. - u_j \mathbf{v} \cdot \nabla u_j + \nu u_j \nabla^2 u_j \right\} \rangle d^3x \end{aligned} \quad (2.20)$$

Per poter decifrare il significato fisico di questa apparentemente complessa ed articolata equazione è essenziale manipolare ciascun termine costituente la funzione integranda.

Per il primo addendo valgono le seguenti relazioni:

$$\left\langle \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla p' \right\rangle = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\langle p' \mathbf{u} \rangle) \quad (2.21)$$

Il secondo termine assume invece la seguente veste:

$$-\langle u_j \mathbf{u} \cdot \nabla \langle U_j \rangle \rangle = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \quad (2.22)$$

A questa espressione viene frequentemente attribuito il nome di *produzione* di energia cinetica turbolenta, \mathcal{P} , in quanto in generale risulta essere sempre strettamente positivo.

Il terzo termine non ha bisogno di nessun tipo di manipolazioni in quanto l'operatore di media temporale ne annulla il contributo. Gli ultimi due termini richiedono, invece, passaggi tutt'altro che banali.

Per il quarto, infatti, vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \langle u_j \mathbf{v} \cdot \nabla u_j \rangle &= \langle u_i u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rangle + \langle U_i \rangle \langle u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \frac{1}{2} u_i u_j^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla k \\ &= \nabla \cdot \left(\langle \tilde{k} \mathbf{u} \rangle \right) + \nabla \cdot (k \langle \mathbf{v} \rangle) \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove con \tilde{k} si è indicata l'energia cinetica turbolenta istantanea definita dalla relazione $\tilde{k} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Per quanto riguarda il termine viscoso presente nella (2.20), è conveniente riscriverlo nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \nu u_j \nabla^2 u_j &= \nu \left[u_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \\ &\quad - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \tilde{\epsilon} \\ &= \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \mathbf{u} \right) - \tilde{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove:

- con $\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ si è indicato il *tensore degli sforzi viscosi turbolenti*, ovvero l'oggetto matematico che modella gli sforzi viscosi causati dall'eventuale non uniformità del campo di fluttuazione della velocità;

- con $\tilde{\epsilon} = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$ si è invece evidenziata la *dissipazione istantanea di energia cinetica turbolenta*. Il motivo per cui $\tilde{\epsilon}$ possiede la denominazione appena riportata consiste nel fatto che, essendo per definizione sempre positivo o nullo, tale termine (presente con un segno meno nell'equazione di bilancio (2.20)) costituisce un *pozzo* di energia cinetica turbolenta in quanto tende a far diminuire quest'ultima nel tempo.

Alla luce dei risultati sopra esposti, si è ora in grado di riscrivere la (2.20) in una forma meno ermetica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_R \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle d^3x &= - \int_R \rho \left[\nabla \cdot \left(\left\langle \frac{p'}{\rho} \mathbf{u} \right\rangle + \langle \tilde{k} \mathbf{u} \rangle + k \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{\rho} \langle \underline{\underline{\sigma}}'_t \cdot \mathbf{u} \rangle \right) \right] d^3x + \\ &+ \int_R \rho (\mathcal{P} - \epsilon) d^3x \end{aligned} \quad (2.25)$$

dalla quale è di immediata deduzione l'*equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta*:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \mathcal{P} - \epsilon - \nabla \cdot \left(\left\langle \frac{p'}{\rho} \mathbf{u} \right\rangle + \langle \tilde{k} \mathbf{u} \rangle + k \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{\rho} \langle \underline{\underline{\sigma}}'_t \cdot \mathbf{u} \rangle \right) \quad (2.26)$$

Il significato fisico dei termini presenti nella (2.26) (oltre a \mathcal{P} ed ϵ la cui funzione è già stata illustrata precedentemente) è deducibile trasformando il primo integrale di volume presente nel secondo membro della (2.25) in un integrale di superficie esteso alla frontiera di R . Eseguendo tale operazione tale integrale di volume assume la seguente forma:

$$- \oint_{\Sigma(R)} \langle p' \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma(R)} \rho \langle \tilde{k} \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma(R)} \rho k \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \oint_{\Sigma(\bar{R})} \langle \underline{\underline{\sigma}}'_t \cdot \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (2.27)$$

A questo stadio, l'interpretazione fisica dei diversi termini è di facile deduzione. Il primo integrale rappresenta, infatti, il flusso di energia cinetica turbolenta attraverso la frontiera di R dovuto alla potenza sviluppata su quest'ultima dalle forze del campo fluttuante di pressione accoppiate con il campo fluttuante di velocità.

La somma del secondo e del terzo integrale presenti nella (2.27) costituisce, invece, l'espressione matematica del flusso convettivo complessivo di energia cinetica turbolenta attraverso $\Sigma(R)$ determinato in primo luogo dal campo di fluttuazione della velocità (il primo dei due integrali) ed in secondo luogo dal moto medio.

L'ultimo integrale di superficie della (2.27) esprime, infine, il flusso di k attraverso $\Sigma(R)$ per effetto della potenza sviluppata su quest'ultima dalle forze viscosse turbolente accoppiate con il campo fluttuante di velocità.

2.3.2 Varianza dello scalare passivo

La varianza $\Theta(\mathbf{x}, t)$ dello scalare passivo $\phi(\mathbf{x}, t)$ è definita dalla seguente relazione:

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = \langle \phi'^2(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.28)$$

La varianza dello scalare Θ ricopre per il campo scalare esattamente lo stesso ruolo rivestito dall'energia cinetica turbolenta per il campo di velocità. Infatti, oltre alla somiglianza dell'espressione formale, così come l'energia cinetica turbolenta caratterizza l'energia del campo fluttuante di velocità, in modo del tutto analogo, Θ è indice del livello delle fluttuazioni del campo scalare.

Il procedimento che consente la derivazione dell'equazione di bilancio di Θ è del tutto simile a quello seguito nel paragrafo precedente per ricavare l'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta. Sottraendo, infatti, all'equazione di diffusione (2.13) l'equazione mediata per un campo scalare (2.16) si giunge all'equazione che governa l'evoluzione temporale delle fluttuazioni del campo scalare:

$$\frac{D\phi'}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \langle \phi \rangle - \nabla \cdot (\langle \phi' \mathbf{u} \rangle) = \gamma \nabla^2 \phi' \quad (2.29)$$

A questo stadio, sfruttando le proprietà dei campi di fluttuazione, moltiplicando ambo i membri della (2.29) per $2\phi'$, utilizzando l'uguaglianza $\nabla^2 (\phi'^2) = 2\nabla \phi' \cdot \nabla \phi' + 2\phi' \nabla^2 \phi'$ ed applicando l'operatore di media temporale si ottiene l'*equazione di bilancio della varianza di uno scalare passivo*:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -2\langle \phi' \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \phi \rangle - 2\gamma \langle \nabla \phi' \cdot \nabla \phi' \rangle + \nabla \cdot (\gamma \nabla \Theta - \langle \phi'^2 \mathbf{u} \rangle - \Theta \langle \mathbf{v} \rangle) \quad (2.30)$$

L'interpretazione fisica dei termini presenti nell'equazione differenziale appena dedotta risulta essere elementare in virtù delle considerazioni effettuate nel paragrafo precedente riguardo ai diversi termini che determinano l'evoluzione temporale dell'energia cinetica turbolenta.

Il termine contenente la dipendenza dal gradiente del campo medio dello scalare è il termine di *produzione*, \mathcal{P}_ϕ , in quanto in generale è sempre maggiore di zero. Inoltre, l'espressione formale di \mathcal{P}_ϕ è identica all'espressione di \mathcal{P} , (2.22), sostituendo, ovviamente, il campo scalare al posto del campo di velocità ove necessario.

Il secondo addendo appartenente al secondo membro della (2.30) può risciversi nel seguente modo:

$$2\gamma\langle\nabla\phi'\cdot\nabla\phi'\rangle=2\gamma\left\langle\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x_i}\right)^2\right\rangle\quad(2.31)$$

Da questa uguaglianza risulta evidente che il termine in questione è sempre esclusivamente positivo o nullo e di conseguenza per la varianza dello scalare rappresenta un *pozzo* in quanto responsabile della diminuzione di Θ nel tempo. In analogia col corrispondente termine presente nell'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta, a tale termine viene attribuito il nome di *dissipazione della varianza dello scalare*, frequentemente denominata semplicemente anche *dissipazione di scalare* e viene indicata con ϵ_ϕ .

I restanti addendi presenti nella (2.30) sono i termini che caratterizzano il flusso della varianza dello scalare passivo. Il termine di diffusione molecolare $\gamma\nabla\Theta$ rappresenta il vettore densità di flusso di varianza causato dalla presenza di un campo di varianza non uniforme. I rimanenti termini regolano, invece, il flusso convettivo della varianza causato in una circostanza dal campo fluttuante di velocità (rappresentata dall'addendo $\langle\phi'^2\mathbf{u}\rangle$) e nell'altra dal moto medio.

Capitolo 3

Teoria di Kolmogorov

Questo capitolo della tesi è dedicato all'illustrazione delle teorie di Richardson (1922) e Kolmogorov (1941), che congiuntamente, a dispetto dell'età, costituiscono forse l'unica descrizione organica del fenomeno della turbolenza. Nei successivi paragrafi sono infatti introdotti ed esposti i concetti di *cascata energetica di energia cinetica turbolenta* e di *separazione delle scale del moto* ed inoltre vengono riportate le ipotesi d'*isotropia locale* e di *similitudine* formulate da Kolmogorov. In coda all'esposizione sintetica dei punti fondamentali di tali teorie vengono elencati gli importantissimi risultati raggiunti dalle stesse non mancando, tuttavia, di sottolineare con enfasi i loro limiti di applicabilità dovuti all'intermittenza interna che caratterizza i campi di velocità delle correnti turbolente.

3.1 Cascata energetica di Richardson

Il concetto fondamentale introdotto da Lewis Fry Richardson nel 1922 che rappresentò il punto di partenza per la successiva formulazione della sua celeberrima teoria della cascata energetica e che rivoluzionò lo studio dei fenomeni turbolenti aprendo nuovi orizzonti agli studiosi di tale materia consiste nel considerare i moti turbolenti composti da una vastissima gamma di scale spaziali. Secondo il quadro dipinto da Richardson, infatti, le correnti turbolente presentano al proprio interno strutture (quali, ad esempio, vortici e altri moti caratterizzati da una qualche coerenza spaziale) le cui lunghezze caratteristiche possono differire enormemente essendo, in alcune circostanze, paragonabili alle dimensioni caratteristiche del flusso (diametro d di un condotto cilindrico, altezza h di un canale piano ecc.) mentre in altre così piccole da essere confrontabili con

le scale viscoso dissipative (una definizione più rigorosa di queste ultime verrà fornita a breve).

I moti di più grande scala, come già parzialmente anticipato, sono contraddistinti da lunghezze e velocità caratteristiche (rispettivamente ℓ_0 ed u_0) confrontabili con le dimensioni e le velocità caratteristiche del flusso (le quali verranno qui di seguito indicate rispettivamente con \mathcal{L} ed \mathcal{U}). Il numero di Reynolds corrispondente a tali moti risulta essere, dunque, molto elevato a testimonianza del fatto che l'incidenza dei fenomeni viscosi sui processi di grande scala è trascurabile. È proprio al livello di tali scale che, secondo Richardson, ha luogo il primo stadio della cascata di energia cinetica turbolenta: il fenomeno della *Produzione*. Il fisico britannico, infatti, suppone (ipotesi poi confermata da dati sperimentali e simulazioni numeriche) che l'azione contrastante dei gradienti del moto medio e degli sforzi di Reynolds (fenomeno che dà luogo al termine di produzione \mathcal{P} dato dalla (2.22)) sia prevalentemente concentrato nei moti di grande scala, attribuendo a questi ultimi, quindi, il ruolo di introdurre l'energia cinetica del campo fluttuante di velocità nella turbolenza.

Queste strutture turbolente di grande scala, tuttavia, secondo la teoria della cascata energetica, sono instabili e di conseguenza tendono a smembrarsi trasferendo (mediante processi non viscosi) la propria energia cinetica turbolenta a strutture più piccole le quali a loro volta sono soggette al medesimo processo di disgregazione. Questo fenomeno di trasferimento di energia a scale via via più piccole ("a cascata", per l'appunto), prosegue fino al raggiungimento di scale il cui numero di Reynolds associato, $\text{Re}(\ell) = \frac{u(\ell)\ell}{\nu}$, sia sufficientemente piccolo da rendere stabile il moto delle strutture turbolente e dominante il ruolo dissipativo svolto dai processi viscosi. Sono proprio questi ultimi due fenomeni illustrati, il trasferimento inerziale di energia cinetica turbolenta dalle grandi scale a strutture coerenti via via più piccole e la dissipazione di k ad opera di queste ultime, a costituire i due stadi conclusivi della cascata energetica di Richardson.

3.2 Le ipotesi di Kolmogorov, 1941

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) può essere indubbiamente considerato, al giorno d'oggi, lo studioso che più ha contribuito ad elaborare una descrizione organica della turbolenza. Lo scenario dipinto da Richardson, infatti, pur costituendo una svolta

epocale nell'ambito degli studi volti a comprendere la natura fondamentale dei fenomeni turbolenti, rimane, tuttavia, una spiegazione essenzialmente qualitativa di questi ultimi. Vi era, quindi, la necessità di formulare una teoria capace di descrivere in maniera meno ambigua le diverse caratteristiche delle correnti turbolente. Esigenza soddisfatta, a distanza di quasi venti anni, da Kolmogorov.

Lo studioso russo a tale scopo formulò, sulla base di argomentazioni essenzialmente di natura dimensionale, tre ipotesi basilari a partire delle quali egli elaborò la teoria la quale, ancora oggi, nonostante siano trascorsi più di sessantacinque anni, costituisce l'unica descrizione organica del fenomeno della turbolenza.

Per motivare la formulazione della sua prima ipotesi, l'*ipotesi di isotropia locale*, Kolmogorov argomentò che il processo caotico mediante il quale le scale del moto turbolento vanno via via riducendosi comporta la progressiva scomparsa delle anisotropie di grande scala dettate dalle condizioni al contorno del flusso turbolento. Le immediate conseguenze del processo appena descritto sono racchiuse nell'enunciato dell'**ipotesi d'isotropia locale**:

A numeri di Reynolds sufficientemente elevati, i moti turbolenti di piccola scala ($\ell \ll \ell_0$) sono statisticamente isotropi.

È necessario, a questo punto, introdurre una lunghezza caratteristica ℓ_{EI} , linea di demarcazione fra le strutture turbolente anisotrope di grande scala ($\ell > \ell_{EI}$) e le strutture coerenti di piccola scala ($\ell < \ell_{EI}$). In base ad argomentazioni legate alla teoria della cascata energetica di Richardson, il valore universalmente accettato di ℓ_{EI} coincide con $\frac{1}{6}\ell_0$.

Sulla falsariga dei ragionamenti esposti in occasione della formulazione dell'ipotesi d'isotropia locale, Kolmogorov argomentò che tutte le informazioni riguardanti la geometria delle strutture turbolente di grande scala (determinata dalla geometria del sistema all'interno del quale ha luogo il flusso turbolento, dalle condizioni al contorno di quest'ultimo e dal moto medio) vengono gradualmente perse nel processo di trasferimento di energia cinetica turbolenta a scale via via più piccole (mediante il fenomeno della cascata energetica di Richardson) fino a scomparire del tutto una volta giunti a scale sufficientemente piccole. Di conseguenza, se analizzati al livello di queste ultime, tutti i moti turbolenti il cui numero di Reynolds sia sufficientemente elevato presentano le stesse caratteristiche, appaiono ovvero simili (in senso statistico, ovviamente).

Secondo Kolmogorov, quindi, le statistiche dei moti turbolenti le

cui dimensioni caratteristiche ℓ appartengono alla gamma di scale $\ell < \ell_{EI}$ sono in un certo senso universali, indipendenti dal tipo di flusso turbolento considerato (a condizione che il valore del numero di Reynolds sia sufficientemente elevato). Kolmogorov, tuttavia, non si limitò a sostenere l'universalità delle scale piccole (ipotesi, già di per sé, di enorme portata viste le potenziali implicazioni). Il matematico russo indicò anche i parametri fisici che secondo la sua teoria compaiono nell'espressione matematica universale delle statistiche delle piccole scale. Coerentemente con il quadro dipinto da Richardson, Kolmogorov osservò che i due processi dominanti per $\ell < \ell_{EI}$ sono il trasferimento inerziale di energia cinetica turbolenta (il cui flusso viene indicato con \mathcal{T}_{EI}) e la dissipazione ϵ di quest'ultima ad opera dei processi viscosi.

Di conseguenza, lo studioso russo affermò che gli unici parametri fisici rilevanti per la determinazione delle statistiche dei moti turbolenti di piccola scala sono la viscosità cinematica ν ed il tasso di trasferimento \mathcal{T}_{EI} . Essendo quest'ultimo approssimativamente uguale ad ϵ (come verrà dimostrato a breve), l'enunciato della **prima ipotesi di similitudine di Kolmogorov** è il seguente:

In tutti i flussi turbolenti caratterizzati da un numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti turbolenti di piccola scala ($\ell < \ell_{EI}$) hanno una espressione matematica universale determinata dai soli parametri ν ed ϵ .

La gamma di scale $\ell < \ell_{EI}$ è spesso denominata *regione di equilibrio universale* in quanto in tale regione il tempo caratteristico di evoluzione $\tau(\ell) = \frac{\ell}{u(\ell)}$ è sensibilmente inferiore alla scala dei tempi macroscopica $\tau_0 = \frac{\ell_0}{u_0}$. Ciò comporta che le scale piccole sono in grado di reagire in un intervallo di tempo brevissimo a qualsiasi perturbazione proveniente dalle grandi scale e, di conseguenza, il loro stato può costantemente considerarsi di equilibrio dinamico.

È del tutto spontaneo, a questo punto, determinare le scale caratteristiche di lunghezza, velocità e tempo proprie della regione di equilibrio universale impiegando i soli parametri fisici ν ed ϵ , come suggerito dall'enunciato della prima ipotesi di similitudine di Kolmogorov. Sulla base di considerazioni di natura prettamente dimensionale, risulta evidente che per ciascuna grandezza sopra elencata esiste una ed una sola combinazione possibile di ν ed ϵ . Indicando con η , u_η e τ_η rispettivamente le scale caratteristiche di lunghezza,

velocità e tempo sussistono le seguenti relazioni:

$$\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (3.1)$$

$$u_\eta \equiv (\epsilon\nu)^{1/4} \quad (3.2)$$

$$\tau_\eta \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad (3.3)$$

Alle grandezze sopra definite, in onore al grande matematico russo, è attribuito il nome di *scale di Kolmogorov*. È importante notare che il numero di Reynolds associato a tali scale, $\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu}$, è pari a uno, a conferma del fatto che i fenomeni viscosi dissipativi giocano un ruolo centrale al livello delle piccole scale.

Nell'ipotesi che per la dissipazione di energia cinetica turbolenta ϵ valga la seguente relazione $\epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0}$ (congettura formulata in base ad argomenti inerenti alla stabilità del sistema) fra le scale caratteristiche delle strutture turbolente appartenenti alle diverse scale valgono le seguenti stime:

$$\frac{\eta}{\ell_0} \sim \text{Re}^{-3/4} \quad (3.4)$$

$$\frac{u_\eta}{u_0} \sim \text{Re}^{-1/4} \quad (3.5)$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (3.6)$$

È evidente, quindi, che all'aumentare del numero di Reynolds le scale di Kolmogorov diventano sempre più piccole rispetto alle scale caratteristiche dei moti di grande scala.

Conseguentemente, a numeri di Reynolds sufficientemente elevati, esiste una gamma di scale ℓ le quali sono molto piccole rispetto alle dimensioni caratteristiche delle strutture turbolente di grande scala ℓ_0 e simultaneamente molto grandi se confrontate con la scala di Kolmogorov η . Sono, ovvero, contemporaneamente soddisfatte entrambe le relazioni d'ordine $\ell \ll \ell_0$ e $\ell \gg \eta$.

Alla luce di quest'ultima relazione, è lecito supporre che il numero di Reynolds associato a tali scale, $\text{Re}(\ell) = \frac{u(\ell)\ell}{\nu}$, sia grande rispetto a Re_η e che, quindi, i moti turbolenti che interessano tali scale siano influenzati in maniera trascurabile dai processi viscosi dissipativi. Di conseguenza, appare del tutto ragionevole ipotizzare che le statistiche dei moti turbolenti di queste scale "intermediè"

siano indipendenti dalla viscosità ν , come affermato da Kolmogorov nella **seconda ipotesi di similitudine di Kolmogorov** di cui si riporta qui di seguito l'enunciato:

In tutti i flussi turbolenti caratterizzati da un numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti turbolenti aventi dimensioni caratteristiche pari ad ℓ con $\eta \ll \ell \ll \ell_0$ hanno una espressione matematica universale determinata dal solo parametro ϵ ed indipendente dalla viscosità ν .

Un'immediata conseguenza della seconda ipotesi di similitudine di Kolmogorov è l'esistenza all'interno della regione di equilibrio universale di due distinte gamme di scale le quali esibiscono caratteristiche assai diverse:

- le scale dissipative $\ell \sim \eta$, alle quali è dovuta la quasi totalità della dissipazione dell'energia cinetica turbolenta;
- la regione inerziale $\eta \ll \ell \ll \ell_0$, entro la quale il fenomeno preponderante è il trasferimento inerziale di k a scale via via più piccole.

Alla luce di questa suddivisione della regione di equilibrio universale, è necessaria l'introduzione di una scala di lunghezze, ℓ_{DI} , la cui funzione consta nel separare le due gamme di scale appena introdotte. In base ad elaborazioni di dati sperimentali e numerici volte a determinare le dimensioni caratteristiche delle strutture turbolente responsabili approssimativamente della totalità della dissipazione di energia cinetica turbolenta, ad ℓ_{DI} si attribuisce il valore di 60η .

È ora possibile, quindi, definire quantitativamente le diverse gamme di scale nelle quali è possibile suddividere le strutture coerenti che caratterizzano i flussi turbolenti:

- le scale dissipative $\ell < \ell_{DI}$;
- la regione inerziale $\ell_{DI} < \ell < \ell_{EI}$;
- la regione energetica $\ell > \ell_{EI}$.

Alle grandi scale anisotrope del moto turbolento ($\ell > \ell_{EI}$) è stato attribuito il nome di regione "energetica" in quanto l'energia cinetica turbolenta è quasi interamente concentrata in tale regione.

Oltre a contribuire all'individuazione dell'insieme delle scale del moto nelle quali si articolano i moti turbolenti, la seconda ipotesi di similitudine consente di determinare, mediante considerazioni

di natura dimensionale, le espressioni delle scale caratteristiche di velocità e tempo proprie della regione inerziale:

$$u(\ell) \sim (\epsilon\ell)^{1/3} \quad (3.7)$$

$$\tau(\ell) \sim (\ell^2/\epsilon)^{1/3} \quad (3.8)$$

Dalle precedenti uguaglianze è d'immediata deduzione l'espressione matematica del tasso di trasferimento inerziale di energia cinetica turbolenta che caratterizza la regione inerziale:

$$\mathcal{T}_{EI} = \mathcal{T}(\ell) \sim \frac{u(\ell)^2}{\tau(\ell)} = \frac{(\epsilon\ell)^{2/3}}{(\ell^2/\epsilon)^{1/3}} = \epsilon \quad (3.9)$$

La catena di uguaglianze appena riportata dimostra quanto affermato precedentemente riguardo all'equivalenza del tasso di trasferimento di k e la dissipazione di quest'ultima.

3.3 Risultati della teoria di Kolmogorov

In questo paragrafo verranno dedotti ed illustrati gli importantissimi risultati ottenuti da Kolmogorov applicando le ipotesi di isotropia locale e di similitudine riportate nel paragrafo precedente.

3.3.1 Spettro di energia cinetica turbolenta

Il campo di moto di un flusso turbolento può essere descritto in modo del tutto equivalente nello spazio delle configurazioni o nello spazio delle trasformate. Nel caso in cui si impieghi la rappresentazione di Fourier, la variabile indipendente è costituita dal vettore numero d'onda $\boldsymbol{\kappa}$. L'orientamento del vettore $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\kappa}/|\boldsymbol{\kappa}|$, contiene tutte le informazioni direzionali riguardanti il campo di velocità \boldsymbol{v} del flusso turbolento, mentre il modulo κ del vettore numero d'onda è strettamente legato alle dimensioni delle strutture turbolente presenti all'interno del flusso. A strutture turbolente di dimensioni caratteristiche pari ad ℓ sono, infatti, associati numeri d'onda $\boldsymbol{\kappa}$ il cui modulo è dato dalla relazione $\kappa = \frac{2\pi}{\ell}$.

A questo stadio è possibile introdurre la funzione *spettro stazionario di energia cinetica turbolenta*, $E(\boldsymbol{\kappa})$, definito dalla seguente relazione:

$$k = \int_{\boldsymbol{\kappa}} E(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} \quad (3.10)$$

dove \mathcal{K} rappresenta l'intero spazio delle trasformate. Dalla definizione (3.10) si deduce che $E(\boldsymbol{\kappa})$ è il contributo per unità di volume nello spazio delle trasformate all'energia cinetica turbolenta k dei numeri d'onda $\boldsymbol{\kappa}'$ compresi fra $\boldsymbol{\kappa}$ e $\boldsymbol{\kappa} + d\boldsymbol{\kappa}$. Integrando $E(\boldsymbol{\kappa})$ su una superficie sferica $\mathcal{S}(\kappa)$ centrata nell'origine dello spazio delle trasformate ed avente raggio pari ad un valore fissato di κ , si ottiene $E(\kappa)$, il contributo, per unità di κ , all'energia cinetica turbolenta dei numeri d'onda $\boldsymbol{\kappa}$ aventi un modulo compreso fra κ e $\kappa + d\kappa$. Fra le due grandezze $E(\boldsymbol{\kappa})$ e $E(\kappa)$ sussiste ovvero la seguente relazione matematica:

$$E(\kappa) = \oint_{\mathcal{S}(\kappa)} E(\boldsymbol{\kappa}) d\mathcal{S}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (3.11)$$

Alla luce della precedente uguaglianza, la (3.10) può essere riscritta nella seguente forma dalla quale si evince il significato di $E(\kappa)$ illustrato precedentemente:

$$k = \int_0^\infty \left(\oint_{\mathcal{S}(\kappa)} E(\boldsymbol{\kappa}) d\mathcal{S}(\boldsymbol{\kappa}) \right) d\kappa = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa \quad (3.12)$$

Di conseguenza, $E(\kappa)$ è uno strumento statistico molto importante in quanto consente di determinare la frazione di energia cinetica turbolenta posseduta dalle diverse scale del moto turbolento.

Allo spettro stazionario di energia $E(\kappa)$ (come a qualunque altro oggetto statistico) è possibile applicare le ipotesi formulate da Kolmogorov nel 1941. Ciò fu compiuto dallo stesso studioso russo il quale effettuò i seguenti ragionamenti volti a determinare l'espressione matematica di $E(\kappa)$ nella regione di equilibrio universale, $\ell < \ell_{EI}$.

Come affermato da Kolmogorov nell'enunciato della sua prima ipotesi di similitudine, per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, le statistiche dei moti turbolenti di piccola scala ($\ell \ll \ell_0$) hanno un'espressione matematica universale dipendente dai soli parametri ν ed ϵ . Conseguentemente, l'espressione di $E(\kappa)$ per la regione di equilibrio universale deve necessariamente assumere (in seguito ad argomentazioni di natura esclusivamente dimensionale) la seguente forma:

$$E(\kappa) = \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \Psi(\kappa\eta) \quad (3.13)$$

dove $\Psi(\kappa\eta)$ è una funzione adimensionale universale, indipendente, ovvero, dal tipo di flusso turbolento considerato. La presenza di tale funzione adimensionale è essenziale in quanto senza di essa non sarebbe presente alcuna dipendenza da ν , la quale è invece richiesta dalla prima ipotesi di similitudine di Kolmogorov.

Dedotta l'espressione di $E(\kappa)$ per la regione di equilibrio universale ed impiegando la seconda ipotesi di similitudine, si è ora in grado di determinare l'espressione matematica universale di $E(\kappa)$ nella regione inerziale, $\kappa_{EI} < \kappa < \kappa_{DI}$ (con κ_{EI} e κ_{DI} definiti dalle seguenti relazioni: $\kappa_{EI} = \frac{2\pi}{\ell_{EI}}$ e $\kappa_{DI} = \frac{2\pi}{\ell_{DI}}$). Dalla seconda ipotesi di similitudine segue infatti (sempre nel caso in cui il numero di Reynolds sia sufficientemente elevato) che l'espressione matematica di $E(\kappa)$ deve essere universale e dipendente unicamente dal parametro ϵ (oltre che da κ , naturalmente).

Di conseguenza, data la validità della (3.13) per la regione inerziale (si ricordi infatti che quest'ultima è parte integrante della regione di equilibrio universale), si giunge alla conclusione che nel limite $\kappa\eta \rightarrow 0$ la funzione adimensionale $\Psi(\kappa\eta)$ deve tendere ad un valore costante, C . L'espressione matematica di $E(\kappa)$ per la regione inerziale risulta quindi essere la seguente:

$$E(\kappa) = C\epsilon^{2/3}\kappa^{-5/3} \quad (3.14)$$

La (3.14) è anche nota con il nome di *legge dei* $-\frac{5}{3}$ di Kolmogorov ed è supportata da dati sperimentali (si veda ad esempio Saddoughi e Veeravalli [16]).

3.3.2 Funzioni di struttura

Un secondo e relevantissimo risultato conseguito da Kolmogorov applicando le ipotesi da lui stesso formulate riguarda le *funzioni di struttura*. Queste ultime sono degli oggetti statistici i quali, come ne suggerisce anche il nome, forniscono informazioni inerenti alla struttura del campo di velocità del flusso turbolento.

In primo luogo verranno dedotte ed illustrate le conclusioni ottenute da Kolmogorov per quanto riguarda le funzioni di struttura del secondo ordine ed in secondo luogo verranno invece solo riportati e citati i risultati concernenti funzioni di struttura di ordine più elevato.

La funzione di struttura del secondo ordine $D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ è definita dalla seguente relazione:

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle (u_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_\alpha(\mathbf{x})) (u_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_\beta(\mathbf{x})) \rangle \quad (3.15)$$

Applicando l'ipotesi di isotropia locale all'oggetto statistico $D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ si giunge alla conclusione che nella regione di equilibrio universale $\ell < \ell_{EI}$ per numeri di Reynolds sufficientemente elevati la funzione di struttura del secondo ordine deve essere isotropa, deve ovvero

possedere le proprietà di omogeneità (invarianza traslazionale) e di invarianza rispetto a rotazioni e riflessioni.

L'omogeneità di $D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ implica l'indipendenza di quest'ultima dalla variabile \mathbf{x} . Sussiste quindi la seguente relazione:

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

Di conseguenza, $D_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ nella regione di equilibrio universale deve necessariamente essere una funzione isotropa di \mathbf{r} . Quest'ultima osservazione consente di poter scrivere immediatamente l'espressione generale di $D_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$:

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = D_{NN}(r)\delta_{\alpha\beta} + [D_{LL}(r) - D_{NN}(r)] \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2} \quad (3.17)$$

dove $D_{LL}(r)$ e $D_{NN}(r)$ sono rispettivamente le funzioni di struttura longitudinale e trasversale. Questa denominazione deriva dal fatto che scegliendo un sistema di riferimento ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tale che $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1$ valgono le seguenti uguaglianze:

$$D_{11}(\mathbf{r}) = D_{LL}(r) \quad (3.18)$$

$$D_{22}(\mathbf{r}) = D_{NN}(r) \quad (3.19)$$

$$D_{33}(\mathbf{r}) = D_{NN}(r) \quad (3.20)$$

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{per } \alpha \neq \beta \quad (3.21)$$

Il vincolo di incomprimibilità del campo di velocità permette di ricavare un'importante equazione che mette in relazione $D_{NN}(r)$ con $D_{LL}(r)$:

$$D_{NN}(r) = D_{LL}(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r) \quad (3.22)$$

Un'immediata conseguenza dell'uguaglianza appena riportata consiste nel fatto che per numeri di Reynolds sufficientemente elevati nella regione di equilibrio universale $D_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ è completamente determinata dalla sola funzione scalare $D_{LL}(r)$ e quindi è sufficiente determinare quest'ultima per avere informazioni riguardo alla struttura del campo di velocità.

A questo scopo, si consideri l'enunciato della prima ipotesi di similitudine di Kolmogorov. Secondo quest'ultima, nelle circostanze sopra elencate, $D_{LL}(r)$ ha un'espressione matematica universale nella quale compaiono unicamente i parametri fisici ν ed ϵ e la variabile r . Di conseguenza, seguendo ragionamenti del tutto simili a quelli

illustrati nel sottoparagrafo precedente, si è in grado di determinare l'espressione matematica di $D_{LL}(r)$ per la regione di equilibrio universale:

$$D_{LL}(r) = (\epsilon r)^{2/3} \widehat{D}_{LL}(r/\eta) \quad (3.23)$$

dove $\widehat{D}_{LL}(r/\eta)$, in modo del tutto analogo alla funzione $\Psi(\kappa\eta)$ introdotta nel sottoparagrafo 3.3.1, è una funzione adimensionale universale.

La (3.23) costituisce già di per sé un relevantissimo risultato ed è, inoltre, il punto di partenza per la determinazione dell'espressione di $D_{LL}(r)$ nella regione inerziale. Applicando, infatti, la seconda ipotesi di similitudine di Kolmogorov si è in grado di concludere che l'espressione matematica di $D_{LL}(r)$ per $\eta \ll r \ll \ell_0$ è universale e dipende unicamente dalla dissipazione ϵ e dalla distanza r . Conseguentemente, dall'espressione (3.23) deve scomparire qualunque dipendenza da ν . Ciò si traduce nella condizione che nel limite $r/\eta \gg 1$ la funzione $\widehat{D}_{LL}(r/\eta)$ deve necessariamente tendere ad un valore costante, B . L'espressione di $D_{LL}(r)$ nella regione inerziale assume quindi la seguente forma universale:

$$D_{LL}(r) = B (\epsilon r)^{2/3} \quad (3.24)$$

Quest'ultima equazione, nota anche con il nome di *legge dei $\frac{2}{3}$* di Kolmogorov, consente, utilizzando le relazioni (3.17) e (3.22), di dedurre l'espressione generale di $D_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ nella regione inerziale:

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = B (\epsilon r)^{2/3} \left(\frac{4}{3} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2} \right) \quad (3.25)$$

Anche in questa circostanza, esattamente come nel caso dello spettro stazionario di energia cinetica turbolenta, i risultati conseguiti da Kolmogorov sono supportati da dati sperimentali (si veda, a tale scopo, lo stesso articolo menzionato precedentemente).

Come già anticipato, Kolmogorov focalizzò la propria attenzione anche su funzioni di struttura di ordine più elevato. Senza entrare nei dettagli delle rispettive deduzioni sono qui di seguito riportate due delle più notevoli conclusioni formulate dallo studioso russo. Entrambi questi risultati riguardano le espressioni matematiche delle funzioni di struttura longitudinali nella regione inerziale. Secondo Kolmogorov, infatti, per la funzione di struttura longitudinale del terzo ordine sussiste la seguente uguaglianza

$$D_{LLL}(r) = -\frac{4}{5} \epsilon r \quad (3.26)$$

mentre per le funzioni di struttura longitudinali di ordine n generico la relazione valida nella regione inerziale risulta essere la seguente

$$D_n(r) = C_n (\epsilon r)^{n/3} \quad (3.27)$$

dove C_n è una costante universale dipendente dall'ordine della funzione di struttura considerata.

Fra gli ultimi due risultati della teoria di Kolmogorov appena riportati ((3.26) e (3.27)) esiste una sostanziale e fondamentale differenza riguardante la consistenza di tali relazioni con i dati sperimentali e numerici in possesso della comunità scientifica internazionale. Mentre infatti l'espressione (3.26) è in buon accordo con i dati provenienti da esperimenti e simulazioni computazionali, ciò risulta essere vero per la (3.27) unicamente per valori di $n \leq 5$.

Il motivo di questa inconsistenza della (3.27) con gli esperimenti e le simulazioni numeriche per valori di $n \geq 6$ è da ricercarsi nella marcata intermittenza interna che caratterizza i campi di velocità dei flussi turbolenti. Ecco, dunque, illustrato uno dei limiti di applicabilità più noti ed importanti della teoria formulata nel 1941 da Kolmogorov. Ulteriori inesattezze di tale teoria verranno descritte ed analizzate nel paragrafo successivo nel quale ne verranno illustrate le applicazioni al campo di uno scalare passivo.

3.4 Teoria di Kolmogorov per il campo di uno scalare passivo

Le ipotesi d'isotropia locale e di similitudine formulate da Kolmogorov nel 1941 rimangono inalterate se applicate al campo di uno scalare passivo, quale ad esempio la temperatura o la concentrazione di una qualunque specie chimica. Tuttavia anche in questa circostanza, in modo del tutto analogo a quanto si verifica per la velocità, le ipotesi di Kolmogorov si rivelano inesatte, mostrando, anzi, limiti di applicabilità ed imprecisioni ancora più evidenti rispetto al caso del campo di velocità.

La ragione di questo maggior discostamento della teoria di Kolmogorov dai dati sperimentali e numerici nel caso del campo di uno scalare passivo consiste nella maggior intermittenza interna che caratterizza il campo scalare rispetto al campo di velocità. Questa maggior intermittenza posseduta dal campo scalare è stata evidenziata all'interno di due articoli scientifici comparsi entrambi nel 1994 ad opera di Kraichnan [14] e Holzer e Siggia [15].

Un'analisi approfondita ed una descrizione del fenomeno dell'intermittenza interna che caratterizza il campo di uno scalare passivo

viene effettuato da Z. Warhaft, [10], il quale, oltre ad effettuare una rassegna dei dati sperimentali e numerici presenti in letteratura, evidenzia, inoltre, il legame presente fra l'intermittenza del campo scalare e l'inesattezza della teoria di Kolmogorov. A tale scopo, Warhaft studia l'andamento del momento quarto della differenza di scalare $K_{\Delta\phi'}(r)$ in funzione della distanza di separazione r . Il momento quarto della differenza di scalare è definito dalla seguente relazione:

$$K_{\Delta\phi'}(r) = \frac{\langle \Delta\phi'(r)^4 \rangle}{\langle \Delta\phi'(r)^2 \rangle^2} \quad (3.28)$$

dove $\Delta\phi'(r)$ è la differenza della fluttuazione del campo di scalare passivo effettuata in punti separati da una distanza pari ad r . I risultati di questa analisi compiuta da Warhaft sono riportati in figura 3.1.

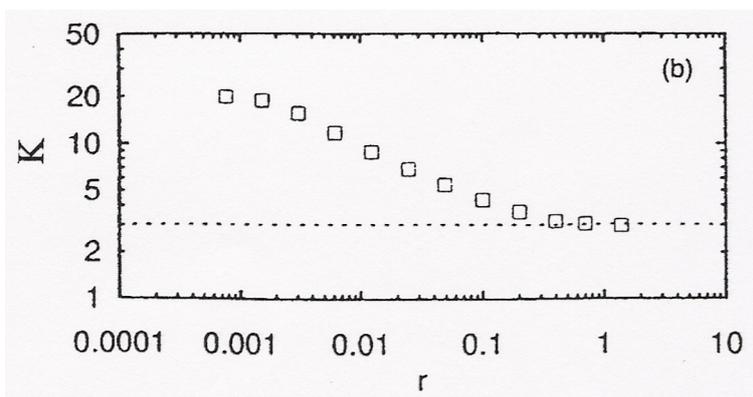


Figura 3.1: Momento quarto della differenza di scalare K in funzione della distanza di separazione r normalizzata con la scala integrale. Tratto da [10]

Dalla figura 3.1 è possibile osservare come per distanze di separazione dell'ordine della scala integrale il valore di $K_{\Delta\phi'}(r)$ è confrontabile con il valore gaussiano pari a 3 (rappresentato nella figura 3.1 dalla linea orizzontale tratteggiata). Prendendo in considerazione, invece, scale via via più piccole il valore di $K_{\Delta\phi'}(r)$ aumenta, a testimonianza del fatto che l'intermittenza maggiore è presente al livello delle scale più piccole.

La figura 3.1 costituisce inoltre una prima dimostrazione dell'inesattezza della teoria di Kolmogorov per il campo di uno scalare passivo. Secondo infatti la teoria elaborata dallo studioso russo, $K_{\Delta\phi'}(r)$ dovrebbe essere indipendente da r , tesi evidentemente smentita dall'andamento di $K_{\Delta\phi'}(r)$ riportato in figura 3.1. Da quest'ultima, infine, è possibile dedurre anche un'ulteriore caratteristica

propria del campo di uno scalare passivo. L'alto valore di $K_{\Delta\phi'}(r)$ presente al livello delle scale più piccole è infatti indice dell'elevata intermittenza che caratterizza il gradiente dello scalare passivo.

Quest'ultimo è l'argomento centrale della seconda parte del lavoro di Warhaft [10] nella quale viene illustrata la spiccata anisotropia del gradiente dello scalare passivo la quale persiste anche a numeri di Reynolds molto elevati evidenziando ulteriori debolezze e fallimenti della teoria di Kolmogorov.

In questa seconda parte, infatti, Warhaft analizza principalmente il comportamento del momento terzo del gradiente di scalare, $S_{\partial\phi'/\partial r}$, definito dalla relazione

$$S_{\partial\phi'/\partial r} = \frac{\langle \left(\frac{\partial\phi'}{\partial r}\right)^3 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial\phi'}{\partial r}\right)^2 \rangle^{3/2}} \quad (3.29)$$

Secondo l'ipotesi d'isotropia locale di Kolmogorov, $S_{\partial\phi'/\partial r}$ per valori di Reynolds sufficientemente elevati dovrebbe essere pari a zero, dovendo mostrare un comportamento isotropo. In realtà, numerosi esperimenti riguardanti strati limite turbolenti e turbolenza di griglia in presenza di un gradiente medio di scalare rivelano che anche in presenza di numeri di Reynolds molto elevati $S_{\partial\phi'/\partial r}$ è di ordine uno, contraddicendo quindi l'ipotesi d'isotropia locale.

La non validità di quest'ultima ipotesi ha come naturale e diretta conseguenza l'illegittimità delle ipotesi di similitudine di Kolmogorov in quanto le statistiche delle scale piccole non possono più esibire un comportamento universale data la ripercussione su di esse delle anisotropie di grande scala.

La marcata anisotropia di piccola scala caratterizzante il campo di uno scalare passivo è dovuta, secondo Warhaft, alla particolare morfologia del campo scalare. Quest'ultimo presenta, infatti, delle strutture a gradino le quali, in presenza di un gradiente medio di scalare, tendono ad allinearsi rispetto a quest'ultimo. La singolare e, per alcuni aspetti, eccezionale morfologia esibita dal campo di uno scalare passivo è stata oggetto di numerosi studi alcuni dei quali recentissimi (Schumacher *et al.* [6], Bretouwer *et al.* [7]) oltre al già citato lavoro di Holzer e Siggia [15]).

Nonostante l'interesse del mondo scientifico verso lo studio degli scalari passivi sia cresciuto negli ultimi anni, nessun lavoro di ricerca è stato effettuato riguardo alla morfologia dei campi di scalari passivi caratterizzanti moti turbolenti di parete, quali ad esempio flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani o condotti cilindrici.

È stata proprio questa carenza di studi ed investigazioni concernenti i moti di parete a costituire la principale fonte d'ispirazione di questa tesi. Lo scopo primario di quest'ultima consiste, infatti, nell'analisi dei diversi aspetti e caratteristiche esibiti dal campo di fluttuazione e dal campo di dissipazione della varianza di uno scalare passivo in flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani in presenza di un gradiente medio di scalare.

Capitolo 4

Flussi turbolenti all'interno di un canale piano

Questo capitolo della tesi è interamente dedicato all'illustrazione delle principali caratteristiche che contraddistinguono i flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di un canale piano. Particolare enfasi verrà data alle simmetrie possedute da tale sistema e alle ripercussioni che queste ultime hanno sul campo di velocità e sul campo di uno scalare passivo focalizzando l'attenzione soprattutto sulla notevole semplificazione subita dalle equazioni mediate di Reynolds in ragione di tali simmetrie.

In seguito, impiegando tale versione semplificata delle equazioni mediate di Reynolds verranno dedotti ed illustrati il profilo medio degli sforzi di taglio e le equazioni che governano i flussi turbolenti confinati in un canale piano. Successivamente, nella parte finale di questo capitolo verranno introdotte le scale caratteristiche di lunghezza e velocità dei suddetti moti turbolenti ed attraverso di esse il canale piano verrà suddiviso in diverse regioni ciascuna delle quali caratterizzata da specifici profili medi di velocità e scalare i quali verranno a loro volta ricavati mediante argomentazioni di natura prettamente dimensionale.

4.1 Geometria e simmetrie del sistema

La geometria del sistema considerato nel presente lavoro di tesi è illustrato nella figura 4.1. La lunghezza e la larghezza del canale, rispettivamente L_x ed L_z , sono molto grandi se confrontate con l'altezza 2δ ($L_x/\delta \gg 1$ e $L_z/\delta \gg 1$). Questa asimmetria ha come diretta conseguenza l'indipendenza statistica da x e da z del campo di moto del flusso turbolento nella regione centrale del canale. La

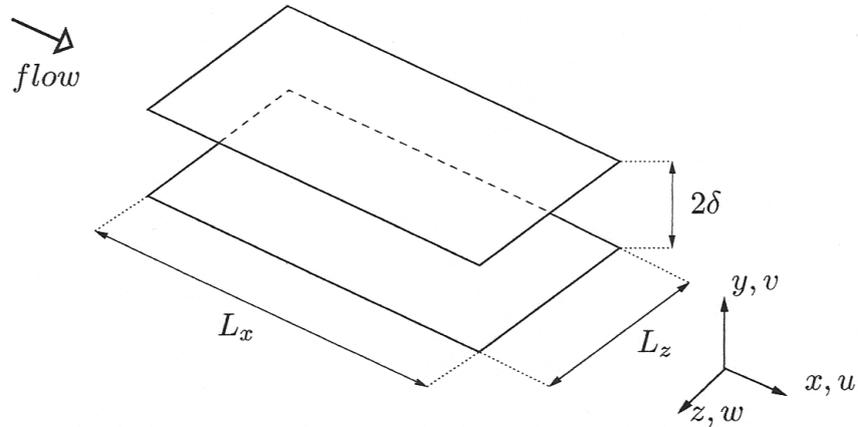


Figura 4.1: Canale piano

suddetta regione del canale, infatti, può considerarsi sufficientemente lontana dalle pareti laterali da non risentirne più l'influsso e, di conseguenza, i campi di velocità e scalare risultano essere invariante rispetto a traslazioni trasversali del sistema.

Un discorso analogo vale per la direzione x , parallela al moto medio. In questa direzione, infatti, dopo una regione (nelle immediate vicinanze dell'imbocco del canale) all'interno della quale il flusso turbolento non è ancora completamente sviluppato a causa della persistenza degli effetti di bordo, per distanze sufficientemente grandi dall'entrata del condotto l'influenza di questi ultimi risulta essere trascurabile conferendo al campo di moto l'omogeneità anche in direzione x .

L'invarianza statistica dei campi di velocità e scalare passivo rispetto a traslazioni parallele alle pareti $y = 0$ e $y = \delta$ attribuisce ai due suddetti campi una proprietà notevole. Entrambi i campi risultano infatti statisticamente monodimensionali in quanto sia le statistiche delle componenti del campo di velocità che le statistiche dello scalare passivo dipendono unicamente dalla coordinata normale alle pareti y . Perlopiù, il sistema di riferimento (indicato in figura) scelto per descrivere il flusso turbolento considerato ha come immediata e naturale conseguenza la totale assenza di un moto medio trasversale, vale ovvero la seguente uguaglianza:

$$\langle W \rangle = 0 \quad (4.1)$$

La geometria del sistema, inoltre, conferisce un'ulteriore importante caratteristica ai moti turbolenti che si sviluppano all'interno di ca-

nali piani: la simmetria statistica rispetto al piano mediano $y = \delta$. In termini matematici, questa proprietà si traduce nell'equivalenza delle statistiche di $\{U, V, W, \phi\}$ alla quota y con le statistiche di $\{U, -V, W, -\phi\}$ alla quota $2\delta - y$.

Inoltre, supponendo trascorso un intervallo di tempo sufficientemente lungo dall'istante in cui il moto ha avuto inizio, il flusso turbolento preso in esame può considerarsi statisticamente stazionario.

4.2 Equazioni mediate di Reynolds per il canale piano

4.2.1 Campo di velocità

Le simmetrie possedute dal sistema preso in esame, semplificano in modo rilevante le equazioni mediate di Reynolds dedotte nel paragrafo 2.2 ed il vincolo d'incompressibilità per il campo medio di velocità espresso dalla (2.4). Quest'ultimo, infatti, in virtù dell'indipendenza statistica del campo di velocità dalle coordinate x e z , si trasforma nella seguente uguaglianza:

$$\frac{d\langle V \rangle}{dy} = 0 \quad (4.2)$$

Di conseguenza, $\langle V \rangle$ è costante all'interno di tutto il canale. Sfruttando ora la condizione al contorno secondo la quale $\langle V \rangle(y)|_{y=0} = 0$ si giunge alla conclusione che il campo medio di velocità normale alle pareti è nullo in ogni punto del canale.

Le tre componenti delle equazioni mediate di Reynolds (2.10), alla luce delle proprietà elencate nel paragrafo precedente e del risultato appena conseguito, assumono, invece, la seguente forma:

$$\frac{d}{dy}\langle vw \rangle = 0 \quad (4.3)$$

$$\mu \frac{d^2\langle U \rangle}{dy^2} - \rho \frac{d}{dy}\langle uv \rangle - \frac{\partial\langle p \rangle}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

$$-\frac{\partial\langle p \rangle}{\partial y} - \rho \frac{d\langle v^2 \rangle}{dy} = 0 \quad (4.5)$$

La (4.3) ha come immediata conseguenza la seguente uguaglianza $\langle vw \rangle = \text{cost}$ la quale, utilizzando le condizioni al contorno, si riduce alla relazione $\langle vw \rangle = 0$. La (4.5), invece, integrandone ambo i membri fra $y = 0$ ed una generica quota y ed utilizzando la condizione al

contorno ($\langle v^2 \rangle(y)|_{y=0} = 0$), si trasforma nella seguente uguaglianza:

$$-\langle p \rangle(x, y) + p_w(x) - \rho \langle v^2 \rangle(y) = 0 \quad (4.6)$$

dove si sono esplicitate le variabili indipendenti e con $p_w(x)$ si è indicato il valore del campo medio di pressione sulla parete inferiore per un generico valore di x ($p_w(x) = \langle p \rangle(x, 0)$).

Un'importante osservazione che scaturisce dalla (4.6) è l'uniformità della componente del gradiente del campo medio di pressione parallela al moto medio su una qualunque superficie normale all'asse x , come testimoniato dalla seguente relazione ottenuta derivando la (4.6) rispetto ad x :

$$\frac{dp_w}{dx} = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} \quad (4.7)$$

La (4.4) può invece essere riscritta nella seguente veste:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = \frac{d}{dy} \left[\mu \frac{d \langle U \rangle}{dy} - \rho \langle uv \rangle \right] \quad (4.8)$$

L'espressione presente fra le parentesi quadre nella (4.8) è la somma di $\langle \sigma_{12} \rangle$ con la componente (1, 2) del tensore degli sforzi di Reynolds e rappresenta, quindi, lo sforzo di taglio medio complessivo agente in direzione parallela al moto medio su ciascuna superficie di fluido parallela alla parete inferiore.

Il primo termine, $\mu \frac{d \langle U \rangle}{dy}$, costituisce, infatti, lo sforzo di taglio agente su ciascuna superficie di fluido orizzontale dovuto al profilo medio di velocità $\langle U \rangle$ (il quale, si ricorda, è l'unico non identicamente nullo in tutto il canale), mentre il termine rimanente, $\rho \langle uv \rangle$, è lo sforzo di taglio turbolento causato dalla non uniformità del campo fluttuante di velocità. Indicando lo sforzo di taglio medio complessivo con $\tau(y)$ ed impiegando l'uguaglianza (4.7), la (4.8) si trasforma nella seguente relazione:

$$\frac{dp_w}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \quad (4.9)$$

Quest'ultima uguaglianza possiede un significato dinamicamente molto importante in quanto esprime il bilancio delle forze in direzione parallela al moto medio. Il primo membro della (4.9) costituisce, infatti, la componente x del gradiente medio di pressione la quale è il "motorè" del flusso turbolento senza il quale quest'ultimo non sarebbe in grado di auto sostenersi. Trattandosi di sforzi di pressione, è utile ricordare che questi ultimi sono sforzi che si esercitano in

direzione normale alle superfici. Questo sforzo di pressione, in virtù della (4.9), è bilanciato dal gradiente normale alle pareti dello sforzo di taglio complessivo.

Oltre a rivestire un ruolo dinamico molto rilevante, la (4.9) consente inoltre di dedurre l'espressione che descrive l'andamento di $\tau(y)$ in funzione della distanza dalla parete. Dalla (4.9), infatti, emerge esplicitamente il fatto che entrambi i membri sono costanti. Sfruttando ora l'antisimmetria di $\tau(y)$ rispetto al piano mediano del canale (dalla quale discende che $\tau(y)|_{y=\delta} = 0$), la (4.9) integrata fra la parete inferiore ed il piano mediano del canale assume la seguente veste:

$$\frac{dp_w}{dx} = -\frac{\tau_w}{\delta} \quad (4.10)$$

dove con τ_w si è indicato lo sforzo di taglio complessivo sulla parete inferiore del canale ($\tau_w = \tau(y)|_{y=0}$). Le ultime due relazioni ricavate, la (4.9) e la (4.10), consentono di scrivere la seguente uguaglianza:

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{\tau_w}{\delta} \quad (4.11)$$

la quale integrata fra $y = 0$ ed una generica quota y costituisce la legge che esprime l'evoluzione dello sforzo di taglio complessivo all'allontanarsi dalla parete inferiore:

$$\tau(y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \quad (4.12)$$

Dopo aver dedotto l'andamento dello sforzo di taglio medio complessivo al quale è soggetto ciascun elemento infinitesimo di superficie di fluido parallelo alle pareti orizzontali del canale, è ragionevole, oltre che interessante, illustrare l'evoluzione in funzione della distanza dalla parete dei contributi viscosi e turbolenti a $\tau(y)$. In primo luogo, è opportuno notare che a parete lo sforzo di taglio è unicamente dovuto a fenomeni di tipo viscoso. Infatti, in virtù delle condizioni al contorno, il termine turbolento $\langle uv \rangle$ presente nella (4.8) è identicamente nullo per $y = 0$ e di conseguenza vale la seguente relazione:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{d\langle U \rangle}{dy} \right|_{y=0} \quad (4.13)$$

Con l'ausilio di simulazioni numeriche si è successivamente in grado di determinare l'evoluzione del termine viscoso e turbolento in funzione di y . I loro andamenti sono riportati nelle figure 4.2 e 4.3.

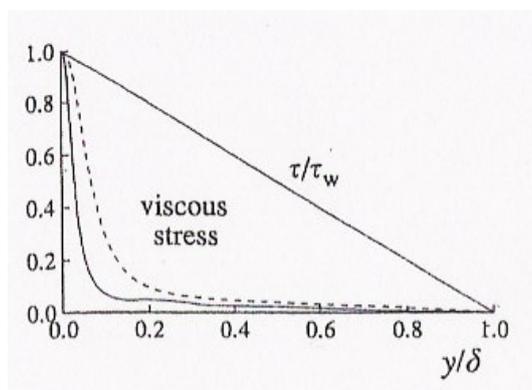


Figura 4.2: Andamento in funzione della distanza dalla parete y del contributo viscoso allo sforzo di taglio complessivo $\tau(y)$. Linea tratteggiata $Re=5600$, linea continua $Re=13750$. Dati provenienti da simulazioni numeriche effettuate da Kim *et al* [17]. Tratto da [3].

Da tali figure emerge un quadro chiaro ed esplicito riguardo alla preponderanza dei due contributi nelle diverse regioni del canale. Mentre, infatti, nelle immediate vicinanze della parete i fenomeni viscosi prevalgono dinamicamente sui fenomeni turbolenti, determinando interamente gli sforzi taglio a parete (cfr. (4.13)), avvicinandosi al piano mediano del canale il contributo turbolento diventa predominante arrivando a costituire la totalità dello sforzo di taglio per $y = \delta$.

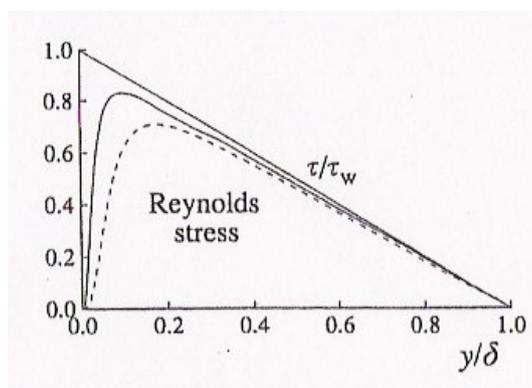


Figura 4.3: Andamento in funzione della distanza dalla parete y del contributo turbolento allo sforzo di taglio complessivo $\tau(y)$. Linea tratteggiata $Re=5.600$, linea continua $Re=13.750$. Dati provenienti da simulazioni numeriche effettuate da Kim *et al* [17]. Tratto da [3].

4.2.2 Campo scalare passivo

In modo del tutto analogo al ragionamento svolto nel paragrafo precedente, è possibile dedurre le equazioni mediate del campo dello scalare passivo per i moti turbolenti che si sviluppano all'interno di un canale piano. Prima di intraprendere il procedimento di derivazione di tali equazioni, è necessario tuttavia specificare le condizioni al contorno per il campo dello scalare passivo. Mentre, infatti, per il campo di velocità queste ultime sono dettate dalla viscosità del fluido oltre che dalla natura delle superfici delimitanti il sistema preso in considerazione (impenetrabilità delle superfici solide e impossibilità di scivolamento del fluido su queste ultime), per il campo dello scalare passivo in letteratura scientifica sono contemplate principalmente due eventualità:

- pareti isoscalari;
- pareti isoflusso.

La prima circostanza, che coincide con le condizioni al contorno impiegate in questo lavoro di tesi, consiste nell'imporre un valore costante dello scalare passivo su ciascuna parete. Valore che può essere diverso fra le due pareti (come in questa tesi) oppure coincidente. Nella seconda evenienza viene invece imposto su ambedue le pareti il flusso dello scalare passivo.

Illustrate le condizioni al contorno scelte per lo studio effettuato nel corso di questa tesi, è ora possibile ricavare le equazioni che caratterizzano il campo medio dello scalare passivo in presenza di moti turbolenti che si sviluppano all'interno di un canale piano.

Le simmetrie del sistema preso in esame (e le rispettive indipendenze statistiche dei campi di velocità e scalare che ne discendono) consentono di riscrivere la (2.16) nella seguente forma:

$$\frac{d\langle\phi'v\rangle}{dy} = \gamma \frac{d^2\langle\phi\rangle}{dy^2} \quad (4.14)$$

La precedente relazione si può facilmente riformulare nella seguente veste

$$\frac{d}{dy} \left[\gamma \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} - \langle\phi'v\rangle \right] = 0 \quad (4.15)$$

la quale ha come conseguenza che, nella regione centrale del canale dove il flusso turbolento è completamente sviluppato, l'espressione presente fra parentesi quadre risulta essere uniforme e costante nel

tempo. Vale ovvero la seguente uguaglianza:

$$\gamma \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} - \langle\phi'v\rangle = C \quad (4.16)$$

dove con C si è indicata una grandezza costante nello spazio e nel tempo. Per determinare tale costante C è sufficiente valutare il primo membro della (4.16) sulla parete inferiore. Infatti, le condizioni al contorno di completa adesione del fluido alla parete e di isoscalarità comportano che il termine $\langle\phi'v\rangle$ sia sempre identicamente nullo per $y = 0$. Sussiste quindi la seguente relazione:

$$C = \gamma \left. \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} \right|_{y=0} \quad (4.17)$$

Alla luce di quest'ultima uguaglianza, la (4.16) può risciversi nella seguente forma:

$$\gamma \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} - \langle\phi'v\rangle = \gamma \left. \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} \right|_{y=0} \quad (4.18)$$

Il secondo membro della (4.18) riveste un ruolo molto importante in quanto, oltre a rappresentare la densità di flusso medio di scalare in direzione normale alle pareti per $y = 0$, è in stretta relazione con la scala caratteristica dello scalare passivo in moti turbolenti di parete, come verrà a breve illustrato.

4.3 Scale caratteristiche dei moti turbolenti di parete

In questo paragrafo verranno esposte le scale caratteristiche di lunghezza, velocità e scalare passivo che contraddistinguono i moti turbolenti di parete.

4.3.1 Campo di velocità

In primo luogo è opportuno osservare che i parametri fisici, cinematici e dinamici, e geometrici che determinano completamente i moti turbolenti che si sviluppano in sistemi contraddistinti dalla presenza di pareti sono i seguenti:

- densità del fluido ρ ;
- viscosità cinematica del fluido ν ;
- semi altezza del canale δ ;

- gradiente medio di pressione a parete $\frac{dp_w}{dx}$.

In virtù della (4.10) è del tutto equivalente considerare al posto di $\frac{dp_w}{dx}$ come parametro specifico del flusso turbolento lo sforzo di taglio medio a parete τ_w .

È ora possibile, definiti i parametri specifici dei flussi turbolenti di parete, dedurre le scale caratteristiche di velocità e lunghezza in prossimità di quest'ultima. Nelle immediate vicinanze della parete, come testimoniato dalla (4.13), i fenomeni viscosi giocano un ruolo centrale ed essenziale. Di conseguenza, appare del tutto naturale e ragionevole, oltre appropriato, definire le *scale viscosi* del moto mediante la viscosità cinematica ν e lo sforzo di taglio medio a parete τ_w (oltre che la densità ρ). La scala caratteristica di velocità in prossimità delle pareti u_τ , sulla base di argomenti di natura esclusivamente dimensionale, è definita dalla seguente relazione:

$$u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.19)$$

La *scala di lunghezza viscosa* risulta invece essere definita dalla seguente espressione:

$$\delta_\nu \equiv \frac{\nu}{u_\tau} \quad (4.20)$$

È opportuno notare a questo stadio che il numero di Reynolds valutato in base alle scale viscosi appena introdotte $\frac{u_\tau \delta_\nu}{\nu}$ è pari ad uno, a conferma del fatto che nella regione vicina alle pareti i fenomeni viscosi giocano un ruolo fondamentale. Attraverso la velocità di parete u_τ è possibile definire il “numero di Reynolds di parete”, Re_τ , definito dalla seguente relazione:

$$Re_\tau \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \frac{\delta}{\delta_\nu} \quad (4.21)$$

Mediante l'utilizzo della lunghezza caratteristica di parete δ_ν è possibile riscalarare la distanza dalla parete y , introducendo le cosiddette *unità di parete* y^+ definite dalla seguente relazione:

$$y^+ \equiv \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (4.22)$$

Dalla (4.22) si può facilmente osservare come il valore di y^+ coincida con il valore locale di Re_τ per una determinata distanza y dalla parete. Di conseguenza, il valore di y^+ è indice di quali fenomeni,

turbolenti o viscosi, siano preponderanti nelle diverse regioni del canale. Valori di y^+ prossimi all'unità indicano, infatti, una maggiore importanza dei fenomeni viscosi rispetto ai processi turbolenti, mentre valori elevati delle unità di parete sono, invece, sintomo di una prevalenza dei fenomeni turbolenti.

Questo comportamento profondamente diverso esibito dal flusso turbolento nelle diverse regioni del canale è facilmente osservabile in figura 4.4 la quale illustra l'andamento, in funzione della distanza riscalata y^+ dalla parete, dei contributi relativi dei fenomeni viscosi e turbolenti allo sforzo di taglio medio complessivo. Da tale figura si può notare, infatti, come la frazione di sforzo di taglio che trae origine da fenomeni viscosi crolli vertiginosamente dal 100% sulla parete al 50% per un valore di y^+ pari all'incirca a 12 per poi essere inferiore al 10% per $y^+ > 50$.

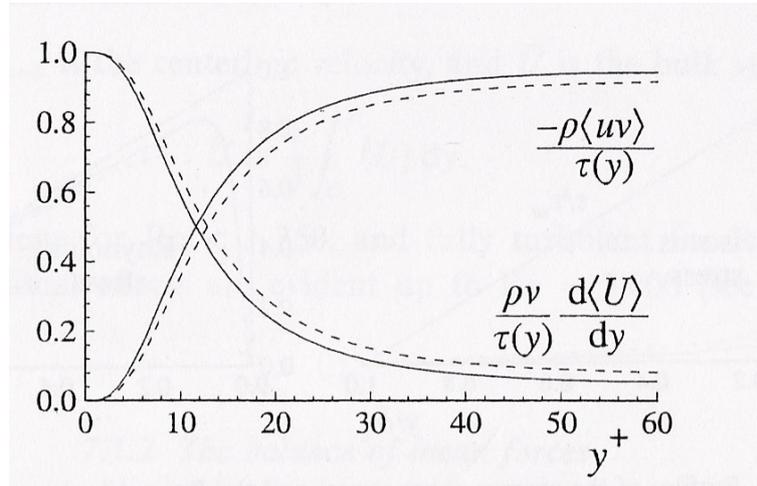


Figura 4.4: Andamento in funzione della distanza dalla parete y^+ dei contributi relativi viscosi e turbolenti allo sforzo di taglio medio complessivo. Linee tratteggiate $Re= 5.600$, linee continue $Re= 13.750$. Dati provenienti da simulazioni numeriche effettuate da Kim *et al* [17]. Tratto da [3].

Alla luce delle caratteristiche dinamiche del flusso turbolento appena illustrate e con l'ausilio delle unità di parete y^+ , è stata effettuata una prima suddivisione del canale piano (ne seguiranno altre) in diverse regioni:

- $y^+ < 50$: *regione viscosa di parete* entro la quale il contributo della viscosità molecolare allo sforzo di taglio $\tau(y)$ è significativo;
- $y^+ > 50$: *strato esterno*. In questa regione gli effetti diretti della

viscosità su $\tau(y)$ sono trascurabili. Il flusso è completamente determinato da fenomeni turbolenti.

- $y^+ < 5$: *substrato viscoso* entro il quale il contributo turbolento allo sforzo di taglio è trascurabile rispetto all'apporto viscoso e, di conseguenza, il flusso risulta essere interamente specificato da fenomeni viscosi.

La suddivisione del canale piano nelle regioni sopra elencate offre lo spunto per la seguente importante osservazione: all'aumentare del valore di Re_τ , la regione di canale all'interno della quale i fenomeni viscosi giocano un ruolo non trascurabile diminuisce la propria estensione.

4.3.2 Campo scalare passivo

La distribuzione dello scalare passivo all'interno del canale è essenzialmente influenzata dalla presenza di due fenomeni fisici molto importanti:

- la *diffusione*, originata dalla non uniformità del campo scalare;
- il *trasporto*, ovvero l'accoppiamento del campo dello scalare passivo con il campo di velocità del fluido.

Di conseguenza, la lista dei parametri fisici che determinano le statistiche del campo scalare all'interno del canale piano è in parte costituita dai parametri specifici dei flussi turbolenti di parete illustrati nel paragrafo precedente. Ad essi vanno aggiunti due grandezze fisiche quali la *diffusività* γ del campo scalare e la scala caratteristica dello scalare passivo in prossimità della parete ϕ_τ . In analogia con quanto illustrato nel paragrafo precedente riguardo al campo di velocità, tenendo conto dei due fenomeni fisici (diffusione e trasporto) che giocano un ruolo fondamentale nella caratterizzazione del campo scalare all'interno del canale piano e in virtù di considerazioni di carattere dimensionale, l'espressione matematica di ϕ_τ è la seguente:

$$\phi_\tau = \frac{\gamma}{u_\tau} \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} \Big|_{y=0} \quad (4.23)$$

Alla luce della precedente relazione, il significato di ϕ_τ risulta essere di facile deduzione. La scala caratteristica dello scalare passivo in prossimità della parete rappresenta, infatti, il rapporto fra il flusso medio di scalare in direzione normale alle pareti valutato sulla

parete inferiore del canale, $\gamma \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} \Big|_{y=0}$, ed il flusso medio di scalare in prossimità della parete dovuto a fenomeni di trasporto (il cui modulo è appunto proporzionale ad u_τ).

4.4 Profili medi di velocità

In questo ultimo paragrafo del capitolo verranno descritti e dedotti i profili medi di velocità e scalare in alcune particolari regioni del canale in base ad argomentazioni prevalentemente di universalità e di carattere dimensionale.

4.4.1 Campo di velocità

Come già illustrato al principio del precedente paragrafo, i flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di un canale piano sono completamente specificati dai parametri ρ , ν , δ e τ_w . Tuttavia, vista la definizione (4.19) di u_τ è del tutto lecito sostituire τ_w con u_τ nella lista dei parametri specifici appena riportata. Un'ulteriore grandezza che gioca un ruolo di fondamentale importanza, soprattutto in vista della determinazione del profilo medio di velocità, è la distanza y dalla parete. Avendo individuato la lista completa dei parametri specifici che influenzano il profilo medio di velocità, è ora possibile effettuare alcuni ragionamenti i quali consentiranno a breve di determinare l'espressione matematica di $\langle U \rangle(y)$.

Si consideri, in primo luogo, la grandezza $\frac{d\langle U \rangle}{dy}$ che costituisce la quantità dinamicamente rilevante in quanto è presente sia nell'espressione del contributo viscoso allo sforzo di taglio (cfr. paragrafo 4.2.1) che nel termine di produzione di energia cinetica turbolenta \mathcal{P} (cfr. (2.22)). In base ad argomentazioni di natura prettamente dimensionale, si giunge a formulare la seguente espressione:

$$\frac{d\langle U \rangle}{dy} = \frac{u_\tau}{y} \Lambda \left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta} \right) \quad (4.24)$$

dove Λ è una funzione adimensionale universale. Il motivo per il quale sono state scelte le quantità $\frac{y}{\delta_\nu}$ e $\frac{y}{\delta}$ come argomenti adimensionali di Λ è costituito dal fatto che dati i cinque parametri specifici del flusso sopra elencati, è possibile formare unicamente le due quantità adimensionali impiegate nella (4.24) (in realtà si sarebbe potuto scegliere come uno dei parametri adimensionali Re_τ , ma da-

ta la relazione $Re_\tau = \left(\frac{y}{\delta_\nu}\right) / \left(\frac{y}{\delta}\right)$ la scelta effettuata è del tutto equivalente). Perlopiù, δ_ν e δ sono le opportune scale di lunghezza caratterizzanti il flusso turbolento rispettivamente nella regione viscosa di parete e nello strato esterno.

Legge di parete

Nel 1925 il fisico tedesco Ludwig Prandtl postulò l'esistenza di una regione del canale piano vicino alla parete, lo *strato interno*, all'interno della quale per elevati numeri di Reynolds il profilo medio di velocità, $\langle U \rangle(y)$, è completamente determinato dalle sole scale viscosse u_τ e δ_ν , indipendente dalla semi altezza del canale δ e dal moto medio in prossimità del piano mediano del canale.

Questa ipotesi di Prandtl si traduce matematicamente nella richiesta che per $y \ll \delta$ la funzione adimensionale Λ tenda asintoticamente ad una funzione del solo argomento $\frac{y}{\delta_\nu}$. Secondo l'ipotesi dello studioso tedesco, nel limite $y/\delta \rightarrow 0$ scompare, ovvero, qualunque dipendenza di Λ dall'argomento adimensionale $\frac{y}{\delta}$. In tali circostanze, la (4.24) assume la seguente forma:

$$\frac{d\langle U \rangle}{dy} = \frac{u_\tau}{y} \Lambda_I \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) \quad \text{per } y \ll \delta \quad (4.25)$$

dove la funzione universale adimensionale Λ_I è definita dalla seguente relazione:

$$\Lambda_I \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) = \lim_{y/\delta \rightarrow 0} \Lambda \left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta} \right) \quad (4.26)$$

Ricordando la definizione delle unità di parete y^+ ed introducendo il profilo medio adimensionale di velocità a parete u^+ definito dalla seguente relazione:

$$u^+ \equiv \frac{\langle U \rangle}{u_\tau} \quad (4.27)$$

la (4.25) si trasforma nella seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} \Lambda_I(y^+) \quad (4.28)$$

Integrando la (4.28) fra la parete inferiore $y^+ = 0$ ed una quota generica, tenendo conto delle condizioni al contorno del campo di

velocità, si ottiene la seguente relazione nota con il nome di *legge di parete*:

$$u^+(y^+) = \int_0^{y^+} \frac{1}{y'} \Lambda_I(y') dy' \quad (4.29)$$

L'enorme portata della legge di parete appena dedotta non risiede nell'espressione formale del secondo membro della (4.29), ma soprattutto nella fondamentale proprietà di u^+ di essere determinata unicamente da y^+ per $y \ll \delta$. Un'altra importantissima caratteristica riguardante la legge di parete consiste nell'esistenza in letteratura scientifica di numerose prove sperimentali le quali per numeri di Reynolds sufficientemente elevati tendono a confermare l'ipotesi di universalità formulata da Prandtl.

Substrato viscoso

Indicando l'integrale presente a secondo membro della (4.29) con $F_w(y^+)$ in modo tale da alleggerire la notazione e rendere più scorrevole la lettura del corrente paragrafo della tesi e sviluppando tale funzione in serie di Taylor in un intorno di $y^+ = 0$, si è in grado di determinare l'espressione di $u^+(y^+)$ all'interno del substrato viscoso $y^+ < 5$. Si consideri, a tale scopo, lo sviluppo di Taylor appena menzionato:

$$u^+(y^+) = F_w(y^+) \Big|_{y^+=0} + y^+ \frac{dF_w}{dy^+} \Big|_{y^+=0} + \mathcal{O}(y^{+2}) \quad (4.30)$$

In virtù del vincolo di completa adesione del fluido alle pareti solide, il termine costante di tale sviluppo è nullo. Per la derivata prima presente nella (4.30) vale invece la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{dF_w}{dy^+} \Big|_{y^+=0} &= \frac{du^+}{dy^+} \Big|_{y^+=0} = \frac{\delta_\nu}{u_\tau} \frac{d\langle U \rangle}{dy} \Big|_{y=0} \\ &= \frac{\tau_w}{\rho} \frac{1}{u_\tau^2} = 1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

all'interno della quale sono state impiegate le relazioni (4.13) e (4.19).

Alla luce dei risultati appena ottenuti, il profilo medio di velocità per $y \ll \delta$ assume la seguente forma:

$$u^+(y^+) = y^+ + \mathcal{O}(y^{+2}) \quad (4.32)$$

Si può dimostrare mediante un'analisi più approfondita che il termine successivo nello sviluppo (4.32) è dell'ordine di y^{+4} e di conseguenza è lecito aspettarsi un andamento lineare di $u^+(y^+)$ per

piccoli valori di y^+ . Questa supposizione è supportata da simulazioni numeriche dirette condotte da Kim *et al.*, [17], i cui risultati sono riportati in figura 4.5.

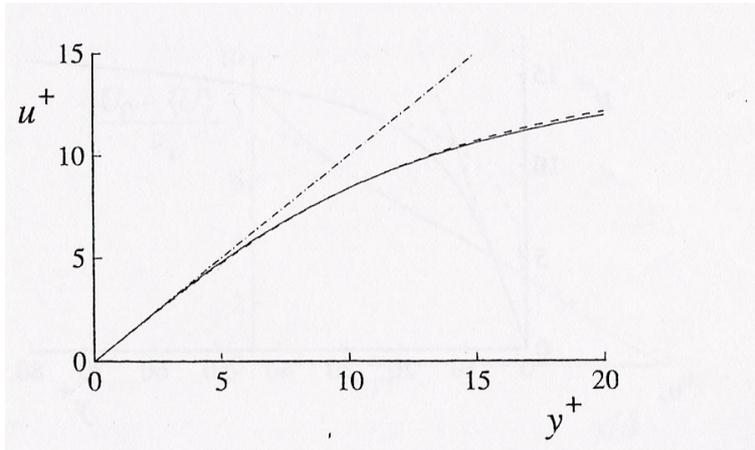


Figura 4.5: Profili medi di velocità in prossimità della parete per $Re= 5.600$ (linea tratteggiata), $Re= 13.750$ (linea continua) e confronto con la legge $u^+ = y^+$. Dati provenienti da simulazioni numeriche effettuate da Kim *et al* [17]. Tratto da [3].

Da quest'ultima è possibile osservare come all'interno del substrato viscoso sia presente un buonissimo accordo fra i dati numerici e la relazione lineare $u^+(y^+) = y^+$, mentre per valori di y^+ maggiori di 12 il discostamento diventa assolutamente non trascurabile (addirittura superiore al 25%).

In conclusione, è possibile, quindi, affermare che il profilo medio di velocità nel substrato viscoso $y^+ < 5$ è descritto dalla seguente relazione lineare:

$$u^+(y^+) = y^+ \quad (4.33)$$

Regione logaritmica

Nel paragrafo 4.3 è stata illustrata una prima suddivisione del canale piano effettuata in base all'andamento in funzione della distanza riscalata dalla parete y^+ dei contributi viscosi e turbolenti allo sforzo di taglio complessivo. In questo paragrafo verrà invece descritta una suddivisione alternativa imperniata sulla validità di un profilo medio di velocità particolare il quale verrà a breve dedotto impiegando, come di consueto, argomentazioni di carattere dimensionale e di similitudine.

In primo luogo è utile introdurre, in analogia con lo strato esterno, lo *strato interno* corrispondente a valori di y soddisfacenti la relazione $y/\delta < 0.1$. In secondo luogo, è essenziale osservare che per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, la parte più esterna dello strato interno è caratterizzata da valori di y^+ grandi rispetto all'unità.

Di conseguenza, è legittimo supporre che in tale regione i fenomeni viscosi non influenzino in maniera rilevante la determinazione del moto medio del fluido. Quest'ultima tesi, in aggiunta all'osservazione che la distanza da parete y è tuttavia piccola se confrontata con la semi altezza del canale δ , consente di dedurre che, nella regione presa in esame in questo paragrafo, la funzione adimensionale universale Λ_I presente nella (4.28) è necessariamente indipendente da $\frac{y}{\delta_\nu}$, rivelando, dunque, un andamento costante.

Alla luce di queste ultime considerazioni, si è in grado di determinare l'espressione del profilo medio di velocità per la parte esterna dello strato interno in presenza di numeri di Reynolds sufficientemente elevati. La (4.28) assume, infatti, la seguente veste:

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{C} \frac{1}{y^+} \quad (4.34)$$

dove la costante C (nota anche con il nome di *costante di Von Kármán*) è definita dalla relazione

$$\lim_{y^+ \gg 1} \Lambda_I(y^+) = \frac{1}{C} \quad (4.35)$$

Integrando ambo i membri della (4.34) all'interno della regione di canale considerata si ottiene il *profilo medio logaritmico di velocità*:

$$u^+(y^+) = \frac{1}{C} \ln y^+ + A \quad (4.36)$$

dove A rappresenta un valore costante. Nella letteratura scientifica, ad A e C si attribuiscono generalmente i valori di 5.2 e 0.41 rispettivamente.

In modo del tutto analogo a quanto effettuato per il profilo medio lineare di velocità, è possibile stabilire, mediante i risultati di esperimenti o simulazioni numeriche, l'ambito di validità della (4.36). Impiegando infatti ulteriori dati numerici di Kim *et al.* [17] riportati in figura 4.6 si può facilmente osservare che i dati provenienti dalla simulazione computazionale sono in buonissimo accordo con la (4.36) per valori di y^+ superiori a 30.

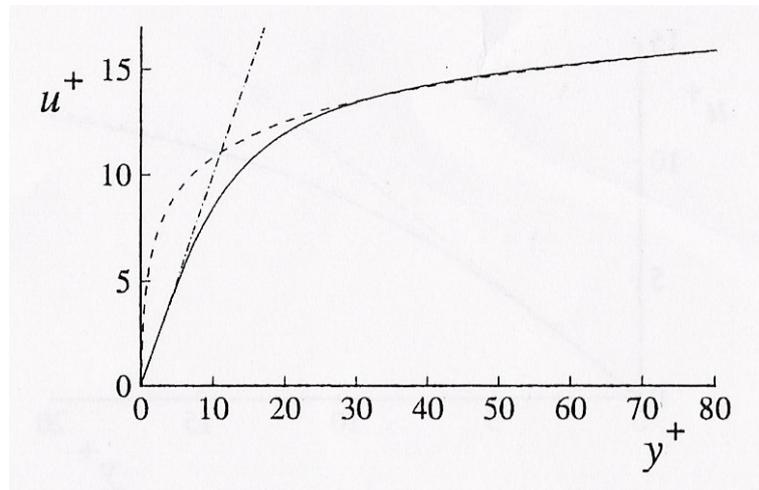


Figura 4.6: Profilo medio di velocità in prossimità della parete per $Re = 13.750$ (linea continua, dati provenienti da simulazioni numeriche effettuate da Kim *et al.*, [17]) e confronto con la legge $u^+ = y^+$ (linea punteggiata-tratteggiata) e la legge logaritmica (4.36) (linea tratteggiata). Tratto da [3].

Questa consistenza risulta confermata dalle misure sperimentali effettuate da Wei e Willmarth [18] i quali hanno progettato e realizzato misure di campo medio di velocità relative a flussi turbolenti di canale caratterizzati da diversi numeri di Reynolds.

I risultati da loro ottenuti (i quali sono riportati in figura 4.7) sono molto significativi ed importanti in quanto, oltre a confermare il buon accordo dei dati da loro raccolti con la legge logaritmica (4.36) per $y^+ > 30$, mostrano in modo netto e chiaro il carattere universale posseduto dalla legge logaritmica dato che tutte le diverse serie di dati corrispondenti a valori differenti del numero di Reynolds si adagiano sulla stessa curva per un intervallo di valori di y^+ compreso fra 30 ed all'incirca 600. Soltanto i valori corrispondenti a regioni in prossimità del piano mediano del canale si discostano da tale curva denotando l'esistenza di un estremo superiore per quanto riguarda l'ambito di validità della (4.36).

La regione del canale piano all'interno della quale è valida la legge logaritmica (4.36) ($y^+ > 30$ e $y/\delta < 0.3$) è, per ovvie ragioni, denominata *regione logaritmica*. Alla porzione di canale compresa fra il substrato viscoso e la regione logaritmica, $5 < y^+ < 30$, viene attribuito il nome di *buffer layer*, strato "cuscinetto".

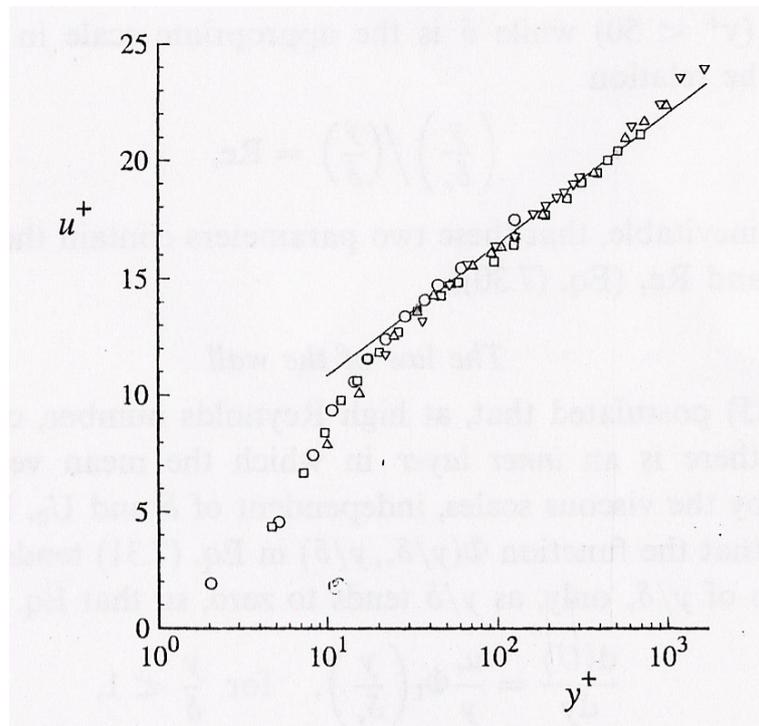


Figura 4.7: Profili medi di velocità per flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani corrispondenti a diversi valori del numero di Reynolds: \circ , $Re=2.970$; \square , $Re=14.914$; \triangle , $Re=22.796$; ∇ , $Re=39.582$. Misure sperimentali effettuate da Wei e Willmarth [18]. Tratto da [3].

4.4.2 Campo scalare passivo

In questo paragrafo verranno dedotte la forma generale della *legge di parete per il campo di uno scalare passivo* e le espressioni matematiche dei profili medi dello scalare in alcune regioni particolari del canale piano mediante ragionamenti del tutto analoghi alle argomentazioni effettuate nel paragrafo precedente riguardo al campo di velocità.

In primo luogo, in base a considerazioni di natura dimensionale del tutto simili alle osservazioni compiute nel paragrafo precedente, è possibile formulare la seguente espressione concernente la grandezza dinamicamente significativa per il campo dello scalare passivo, il gradiente medio di quest'ultimo:

$$\frac{d\langle\phi\rangle}{dy} = \frac{\phi_\tau}{y} \Lambda^\phi \left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta} \right) \quad (4.37)$$

dove, parallelamente alla (4.24), Λ^ϕ è una funzione adimensionale universale. Le motivazioni alla base della scelta dei due argomenti adimensionali di Λ^ϕ presenti nella (4.37) coincidono con quanto illustrato nel paragrafo 4.4.1 riguardo al campo medio di velocità.

A questo stadio, impiegando l'ipotesi di Prandtl applicata al campo scalare passivo, si è in grado di scrivere la seguente relazione per il gradiente medio dello scalare in direzione normale alle pareti in prossimità di queste ultime

$$\frac{d\langle\phi\rangle}{dy} = \frac{\phi_\tau}{y} \Lambda_I^\phi \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) \quad \text{per } y \ll \delta \quad (4.38)$$

dove la funzione adimensionale universale Λ_I^ϕ , in modo del tutto speculare a quanto descritto nella sezione 4.4.1 riguardo alla funzione adimensionale Λ_I , è definita dal seguente limite:

$$\Lambda_I^\phi \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) = \lim_{y/\delta \rightarrow 0} \Lambda^\phi \left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta} \right) \quad (4.39)$$

Introducendo il profilo medio adimensionale dello scalare passivo a parete ϕ^+ definito dalla relazione

$$\phi^+ \equiv \frac{\langle\phi\rangle}{\phi_\tau} \quad (4.40)$$

e ricordando la definizione delle unità di parete y^+ , la (4.38) può essere riformulata nella seguente forma:

$$\frac{d\phi^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} \Lambda_I^\phi(y^+) \quad (4.41)$$

L'equazione differenziale ordinaria (4.41) consente di dedurre agevolmente la legge di parete per il campo di uno scalare passivo. Integrando, infatti, tale equazione differenziale fra la parete inferiore $y^+ = 0$ ed una quota generica y^+ (rispettando ovviamente il vincolo $y^+ \ll \text{Re}_\tau$) si ottiene la *legge di parete per il campo di uno scalare passivo*

$$\phi^+(y^+) - \phi_w^+ = G_w(y^+) \quad (4.42)$$

dove per ϕ_w^+ e $G_w(y^+)$ valgono le seguenti uguaglianze:

$$\phi_w^+ \equiv \phi^+(y^+) \Big|_{y^+=0} \quad (4.43)$$

$$G_w(y^+) \equiv \int_0^{y^+} \frac{1}{y'} \Lambda_I^\phi(y') dy' \quad (4.44)$$

Anche nel caso del campo medio dello scalare passivo, l'importanza della legge di parete (4.42) è costituita dalla presenza di un'unica variabile indipendente, y^+ , la quale, di conseguenza, fissate le caratteristiche specifiche del sistema preso in esame, è l'unico parametro determinante il profilo medio dello scalare passivo per $y \ll \delta$.

Substrato viscoso

In modo del tutto analogo a quanto effettuato per il campo medio di velocità, è possibile dedurre l'espressione analitica della legge di parete per valori di y^+ molto prossimi all'unità. Si sviluppi, a tale scopo, la funzione $G_w(y^+)$ in serie di Taylor in un intorno destro di $y^+ = 0$:

$$G_w(y^+) = G_w(y^+) \Big|_{y^+=0} + y^+ \frac{dG_w}{dy^+} \Big|_{y^+=0} + \mathcal{O}(y^{+2}) \quad (4.45)$$

Dalla definizione (4.44) di $G_w(y^+)$ risulta immediatamente che il termine costante $G_w(0)$ presente nello sviluppo appena riportato è identicamente nullo. Per quanto riguarda, invece, il coefficiente lineare, in virtù della legge di parete (4.42), delle definizioni delle scale caratteristiche δ_ν e ϕ_τ e delle relazioni (4.22) e (4.40), sussiste la seguente catena di uguaglianze

$$\frac{dG_w}{dy^+} \Big|_{y^+=0} = \frac{d\phi^+}{dy^+} \Big|_{y^+=0} = \frac{d\langle\phi\rangle}{dy} \Big|_{y=0} \frac{\delta_\nu}{\phi_\tau} = \text{Sc} \quad (4.46)$$

dove con Sc si è indicato il *numero adimensionale di Schmidt* definito dalla seguente relazione:

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{\gamma} \quad (4.47)$$

Alla luce dei risultati conseguiti, la legge di parete (4.42) nelle immediate vicinanze della parete $y^+ = 0$ assume la seguente veste:

$$\phi^+(y^+) - \phi_w^+ = Sc y^+ + \mathcal{O}(y^{+2}) \quad (4.48)$$

Di conseguenza, data l'espressione matematica della (4.48), è ragionevole supporre che, esattamente come nella circostanza del campo medio di velocità (cfr. (4.33)), esista un intervallo di valori di y^+ all'interno del quale $\phi^+(y^+)$ esibisca un andamento lineare.

Tale ipotesi è in effetti confermata dalle simulazioni numeriche condotte da Johansson *et al.* [13] i cui risultati sono riportati in figura 4.8. Da tale figura emerge, infatti, in modo esplicito l'esistenza di una gamma di valori di y^+ ($y^+ \lesssim 7$) entro la quale il profilo medio di scalare è ben approssimato dalla seguente equazione:

$$\phi^+(y^+) - \phi_w^+ = Sc y^+ \quad (4.49)$$

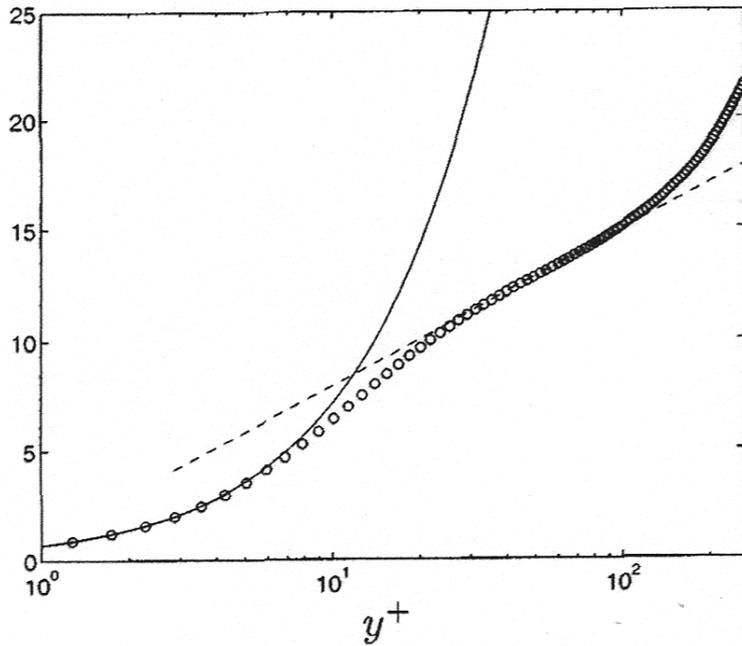


Figura 4.8: Profilo medio dello scalare passivo $\phi^+(y^+) - \phi_w^+$ in funzione della distanza dalla parete y^+ e confronto con la legge lineare $\phi^+(y^+) - \phi_w^+ = Sc y^+$ (linea continua) e la legge logaritmica $\phi^+(y^+) - \phi_w^+ = 3.0 \ln y^+ + 0.95$ (linea tratteggiata). Tratto da [13].

Regione logaritmica

Si consideri ora la circostanza in cui Re_τ sia sufficientemente elevato da rendere possibile l'esistenza di una regione di canale (la parte esterna dello strato interno, cfr. paragrafo 4.4.1) all'interno della quale siano soddisfatte entrambe le condizioni:

- $y \ll \delta$;
- $y^+ \gg 1$.

In tal caso, è ragionevole supporre che data la grande distanza dalla parete, se confrontata, ovviamente, con le scale viscosi δ_ν , il ruolo giocato dai fenomeni viscosi nella determinazione del profilo medio dello scalare passivo sia trascurabile. Tale ipotesi implica che dalla (4.38) debba scomparire qualunque dipendenza del campo medio di scalare dalla viscosità ν . Questa osservazione si traduce matematicamente nella richiesta che per grandi valori di y^+ la funzione adimensionale $\Lambda_I^\phi(y^+)$ deve necessariamente tendere ad un valore costante, $1/C_\phi$. Nella regione presa in considerazione deve, quindi, valere il seguente limite:

$$\lim_{y^+ \gg 1} \Lambda_I^\phi(y^+) = \frac{1}{C_\phi} \quad (4.50)$$

Alla luce di quest'ultima uguaglianza, la (4.38) assume la forma semplificata

$$\frac{d\langle\phi\rangle}{dy} = \frac{\phi_\tau}{y} \frac{1}{C_\phi} \quad \text{per } y \ll \delta \text{ e } y^+ \gg 1 \quad (4.51)$$

la quale, ricordando le definizioni (4.22) e (4.40), può risciversi nel seguente modo:

$$\frac{d\phi^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{C_\phi} \quad (4.52)$$

L'equazione differenziale ordinaria (4.52) integrata nella regione di canale piano considerata nel corrente paragrafo consente di dedurre l'espressione del profilo medio di scalare nella cosiddetta *regione logaritmica*:

$$\phi^+(y^+) = \frac{1}{C_\phi} \ln y^+ + A_\phi \quad (4.53)$$

(si noti l'estrema somiglianza della precedente relazione con la (4.36)). Alle costanti C_ϕ ed A_ϕ Johansson *et al.* [13] attribuiscono rispettivamente i valori 0.33 e 0.95.

La figura 4.8 consente di determinare la regione di canale piano all'interno della quale il profilo medio dello scalare passivo è descritto dalla (4.53). Dalla suddetta figura risulta, infatti, che l'ambito di validità della (4.53) coincide approssimativamente con l'intervallo $20 < y^+ < 100$.

Capitolo 5

Soluzioni numeriche e loro validazione

Nel corso della prima parte di questo capitolo verranno brevemente e sinteticamente illustrati l'impianto e la filosofia del codice computazionale elaborato per effettuare le simulazioni numeriche dirette dei flussi turbolenti di parete presi in considerazione in questa tesi. Sono, infatti, riportate le equazioni differenziali che vengono risolte numericamente nello spazio di Fourier dopo ciascun avanzamento temporale discreto, congiuntamente alla delucidazione degli algoritmi pseudo spettrali che ne consentono il disaccoppiamento. Vengono inoltre brevemente richiamati i metodi numerici impiegati per risolvere computazionalmente le equazioni differenziali sopra citate e gli schemi alle differenze finite compatte che hanno reso possibile la parallelizzazione del codice numerico consentendo una drastica diminuzione dei tempi di calcolo.

Nella seconda parte del capitolo, l'attenzione verrà invece focalizzata sulla validazione dell'algoritmo illustrato nella prima parte. Tale validazione è stata effettuata confrontando i risultati ottenuti impiegando il codice numerico elaborato nel corso di questa tesi con i risultati delle simulazioni computazionali compiute da Johansson *et al.* presso il Dipartimento di Meccanica dell'Università di Stoccolma e riportati in [13].

5.1 Architettura e caratteristiche del codice numerico

Il codice numerico impiegato nel corso di questa tesi per simulare il comportamento di uno scalare passivo in moti turbolenti di parete caratterizzati dalla presenza di un gradiente medio di scalare

è stato elaborato sviluppando l'impianto pre-esistente di un codice computazionale messo a punto nel 2006 da Quadrio e Luchini [12].

Quest'ultimo è in grado di effettuare simulazioni numeriche dirette dei campi di moto turbolenti di fluidi incomprimibili a proprietà costanti nella circostanza in cui il flusso turbolento si sviluppi all'interno di un canale piano. Non si occupa tuttavia della simulazione del comportamento del campo di uno scalare passivo nei suddetti moti di parete. Di conseguenza, lo sviluppo apportato a tale algoritmo nel corso di questa tesi è consistito proprio nel modificarne il codice in modo tale da poter simulare anche la distribuzione all'interno del canale di uno scalare passivo. A tale scopo, come verrà a breve illustrato, è stata in primo luogo ricavata l'equazione adimensionale che governa la diffusione di uno scalare passivo all'interno di un canale piano. Successivamente, tale equazione è stata manipolata in modo tale da poter essere risolta numericamente impiegando gli strumenti computazionali messi a disposizione dal codice originale.

5.1.1 Equazioni adimensionali dei campi di velocità e scalare passivo

Le equazioni di continuità (1.78) e di Navier-Stokes (1.85) adimensionali, riscalate con le scale caratteristiche di lunghezza, velocità e tempo proprie dei moti turbolenti di parete, che governano il moto del fluido all'interno del canale piano schematizzato nella figura 4.1 sono le seguenti:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \nabla^2 U \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \nabla^2 V \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \nabla^2 W \quad (5.4)$$

Per il campo di uno scalare passivo $\phi(\mathbf{x}, t)$ vale, invece, la seguente equazione differenziale adimensionale di diffusione:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + W \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}_\tau \text{Sc}} \nabla^2 \phi \quad (5.5)$$

I parametri adimensionali Re_τ e Sc presenti nelle equazioni appena riportate, sono rispettivamente definiti, si ricorda, nelle relazioni (4.21) e (4.47).

Il sistema differenziale costituito dalle (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5) risulta essere chiuso nel caso in cui siano specificate le condizioni iniziali ed al contorno per le variabili fluidodinamiche ed il campo scalare passivo. Per quanto riguarda le condizioni al contorno per il campo di velocità, esse risultano essere di completa adesione sulle pareti $y = 0$ ed $y = 2\delta$ e periodiche nelle direzioni omogenee x e z . Il campo dello scalare passivo ϕ è invece caratterizzato da valori costanti ma diversi fra loro sulle due pareti (proprietà che impone e garantisce la presenza costante di un gradiente medio di scalare) ed esibisce condizioni al contorno periodiche nelle direzioni x e z .

5.1.2 Rappresentazione di Fourier

Il codice elaborato, tuttavia, non risolve numericamente le equazioni sopra riportate né determina ad ogni istante temporale discreto t_n il valore delle variabili primitive U , V , W , p , e ϕ in ogni punto del dominio computazionale. Nelle direzioni x e z , infatti, in virtù della scelta di imporre condizioni al contorno periodiche in tali direzioni, viene impiegata la rappresentazione di Fourier. Di conseguenza, le grandezze incognite determinate dal codice in ciascun istante t_n sono, al variare di h , ℓ ed y , i coefficienti discreti di Fourier $\widehat{U}_{h\ell}(y, t_n)$, $\widehat{V}_{h\ell}(y, t_n)$, $\widehat{W}_{h\ell}(y, t_n)$ e $\widehat{\phi}_{h\ell}(y, t_n)$ dove, ad esempio, con $\widehat{U}_{h\ell}(y, t_n)$ si è indicata la trasformata bidimensionale di Fourier di $U(x, y, z, t)$ effettuata sul piano y all'istante t_n per il numero d'onda $\boldsymbol{\kappa}$ definito dalla seguente relazione:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} \alpha_0 h \\ \beta_0 \ell \end{pmatrix} \quad \text{con } h, \ell \in \mathbb{Z} \quad (5.6)$$

Nella precedente uguaglianza (5.6), con α_0 e β_0 si sono rispettivamente indicati i numeri d'onda fondamentali in direzione parallela e trasversale rispetto al moto medio. Di conseguenza, per tali quantità valgono le seguenti relazioni:

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{L_x} \quad (5.7)$$

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{L_z} \quad (5.8)$$

Le variabili primitive sono esprimibili in funzione dei coefficienti discreti di Fourier attraverso opportune serie di Fourier troncate.

Per $U(x, y, z, t)$ vale, ad esempio, la seguente uguaglianza:

$$U(x, y, z, t_n) = \sum_{h=-nx/2}^{+nx/2} \sum_{\ell=-nz/2}^{+nz/2} \widehat{U}_{h\ell}(y, t_n) e^{i\alpha x} e^{i\beta z} \quad (5.9)$$

dove, per alleggerire la notazione, sono state impiegate le relazioni $\alpha = \alpha_0 h$ e $\beta = \beta_0 \ell$.

5.1.3 Equazioni nello spazio di Fourier

Come già anticipato precedentemente, l'algoritmo numerico impiegato in questa tesi non risolve il sistema di equazioni costituito dalle equazioni differenziali (5.1)-(5.5). Di conseguenza, in questo e nel successivo paragrafo verrà brevemente illustrata la soluzione numerica delle equazioni nello spazio di Fourier mediante il codice.

Campo di velocità

Si consideri la componente ϑ normale alle pareti del vettore vorticità, $\nabla \times \mathbf{v}$, definita dalla relazione

$$\vartheta = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \quad (5.10)$$

la quale, nello spazio di Fourier, assume la seguente veste:

$$\widehat{\vartheta} = i\beta \widehat{U} - i\alpha \widehat{W} \quad (5.11)$$

È possibile, partendo dalle equazioni di Navier-Stokes (5.2)-(5.4), dedurre un'equazione evolutiva monodimensionale del secondo ordine per $\widehat{\vartheta}$ che viene qui di seguito riportata nella sua forma più compatta:

$$\frac{\partial \widehat{\vartheta}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left(D_2(\widehat{\vartheta}) - \kappa^2 \widehat{\vartheta} \right) + i\beta \widehat{H}\widehat{U} - i\alpha \widehat{H}\widehat{W} \quad (5.12)$$

Nella precedente equazione, con D_2 si è indicata la derivata parziale seconda rispetto alla coordinata normale y , $\kappa^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2$ rappresenta il modulo del vettore numero d'onda $\boldsymbol{\kappa}$ ed i termini non lineari $\widehat{H}\widehat{U}$ e $\widehat{H}\widehat{W}$ sono invece definiti dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\widehat{H}\widehat{U} \equiv -i\alpha \widehat{U}\widehat{U} - D_1(\widehat{U}\widehat{V}) - i\beta \widehat{U}\widehat{W} \quad (5.13)$$

$$\widehat{H}\widehat{W} \equiv -i\alpha \widehat{U}\widehat{W} - D_1(\widehat{V}\widehat{W}) - i\beta \widehat{W}\widehat{W} \quad (5.14)$$

La risoluzione numerica dell'equazione differenziale alle derivate parziali (5.12), data la presenza del termine evolutivo, richiede la conoscenza di una condizione iniziale per \hat{v} che può essere agevolmente calcolata a partire dalla condizione iniziale per il campo di velocità. Le condizioni al contorno periodiche nelle direzioni omogenee x e z sono, invece, automaticamente soddisfatte grazie alla rappresentazione di Fourier impiegata in tali direzioni, mentre le condizioni di completa adesione del fluido alle pareti $y = 0$ e $y = 2\delta$ si traducono nelle seguenti richieste:

$$\hat{v}_{hl}(y, t)|_{y=0} = 0 \quad (5.15)$$

$$\hat{v}_{hl}(y, t)|_{y=2\delta} = 0 \quad (5.16)$$

Oltre alla (5.12), è necessario risolvere numericamente la seguente equazione differenziale monodimensionale del quart'ordine che governa l'evoluzione temporale di $\widehat{V}_{hl}(y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(D_2(\widehat{V}) - \kappa^2 \widehat{V} \right) &= \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left(D_4(\widehat{V}) - 2\kappa^2 D_2(\widehat{V}) + \kappa^4 \widehat{V} \right) - \\ &\quad - \kappa^2 \widehat{HV} - D_1 \left(i\alpha \widehat{HU} + i\beta \widehat{HW} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove il termine non lineare \widehat{HV} è definito dalla seguente relazione:

$$\widehat{HV} \equiv -i\alpha \widehat{UV} - D_1(\widehat{VV}) - i\beta \widehat{VW} \quad (5.18)$$

In modo del tutto analogo all'equazione (5.12), questa equazione differenziale alle derivate parziali, per essere risolta numericamente, necessita in primo luogo della cognizione del campo $\widehat{V}_{hl}(y, t)|_{t=0}$ ed in secondo luogo della traduzione nel campo di Fourier delle condizioni al contorno spaziali.

Per quanto riguarda queste ultime, mentre le condizioni al contorno periodiche nelle direzioni x e z sono, anche in questa circostanza, identicamente soddisfatte dato lo sviluppo in serie di Fourier di $V(x, y, z, t)$, per le condizioni al contorno sulle pareti solide $y = 0$ e $y = 2\delta$ la situazione risulta essere leggermente più complessa ed articolata rispetto alle (5.15) e (5.16). La presenza di derivate parziali fino al quarto ordine nella (5.17) implica, infatti, la necessità di specificare ben quattro condizioni al contorno sulle pareti solide. Le prime due coincidono formalmente con le condizioni al contorno per la trasformata di Fourier della componente normale alle pareti

del vettore vorticità

$$\widehat{V}_{h\ell}(y, t)|_{y=0} = 0 \quad (5.19)$$

$$\widehat{V}_{h\ell}(y, t)|_{y=2\delta} = 0 \quad (5.20)$$

mentre le due relazioni aggiuntive necessarie per risolvere la (5.17) sono deducibili dall'equazione di continuità (5.1) scritta nello spazio di Fourier e valutata per $y = 0$ e $y = 2\delta$:

$$D_1 \left(\widehat{V}_{h\ell}(y, t) \right) \Big|_{y=0} = 0 \quad (5.21)$$

$$D_1 \left(\widehat{V}_{h\ell}(y, t) \right) \Big|_{y=2\delta} = 0 \quad (5.22)$$

A prima vista, le equazioni evolutive per $\widehat{\vartheta}$ e \widehat{V} risultano essere accoppiate data la presenza in entrambe dei termini non lineari \widehat{HU} , \widehat{HV} e \widehat{HW} . Tuttavia, nel caso in cui tali termini vengano trattati esplicitamente nel corso della discretizzazione temporale, le equazioni (5.12) e (5.17) si disaccoppiano potendo, quindi, essere risolte indipendentemente l'una dall'altra.

Una volta ultimato il processo di risoluzione numerica delle (5.12) e (5.17) è possibile determinare i coefficienti discreti di Fourier $\widehat{U}_{h\ell}(y, t)$ e $\widehat{W}_{h\ell}(y, t)$ mediante il seguente sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \widehat{U}_{h\ell}(y, t) = \frac{1}{\kappa^2} \left(i\alpha D_1(\widehat{V}_{h\ell}(y, t)) - i\beta \widehat{\vartheta}_{h\ell}(y, t) \right) \\ \widehat{W}_{h\ell}(y, t) = \frac{1}{\kappa^2} \left(i\alpha \widehat{\vartheta}_{h\ell}(y, t) + i\beta D_1(\widehat{V}_{h\ell}(y, t)) \right) \end{cases} \quad (5.23)$$

Come si vede, per ciascuna terna (h, ℓ, y) si ha un differente sistema lineare della forma (5.23), il quale, è opportuno notare, è singolare per $\kappa^2 = 0$ (corrispondente al modo nullo $\alpha = \beta = 0$). Di conseguenza, $\widehat{U}_{h\ell}(y, t)|_{(h,\ell)=(0,0)}$ e $\widehat{W}_{h\ell}(y, t)|_{(h,\ell)=(0,0)}$ non possono essere determinate risolvendo il sistema (5.23) ed è, quindi, necessario l'individuazione di un procedimento alternativo.

Quest'ultimo è di semplice identificazione nel caso in cui si osservi che la trasformata di Fourier \widehat{F} coincide con la di media planare \overline{F} quando vale $(h, \ell) = (0, 0)$. Per una generica funzione g vale infatti

la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{h\ell}(y, t)\Big|_{(h,\ell)=(0,0)} &\equiv \hat{F}[g](h, \ell, y, t)\Big|_{(h,\ell)=(0,0)} \\
&\equiv \left\{ \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} g(x, y, z, t) e^{-i\alpha_0 h x} e^{-i\beta_0 \ell z} dx dz \right\} \Big|_{(h,\ell)=(0,0)} \\
&= \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} g(x, y, z, t) dx dz \\
&\equiv \overline{F}[g](y, t) \equiv \bar{g}(y, t)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Alla luce di queste considerazioni, è del tutto spontaneo e naturale determinare i coefficienti $\hat{U}_{h\ell}(y, t)\Big|_{(h,\ell)=(0,0)}$ e $\hat{W}_{h\ell}(y, t)\Big|_{(h,\ell)=(0,0)}$ (i quali da questo punto in poi verranno indicati rispettivamente con $\overline{U}(y, t)$ e $\overline{W}(y, t)$) risolvendo la seguente coppia di equazioni dedotta calcolando la media planare delle equazioni (5.2) e (5.4):

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_\tau} D_2(\overline{U}) - D_1(\overline{UV}) + f_x \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_\tau} D_2(\overline{W}) - D_1(\overline{VW}) + f_z \tag{5.26}$$

dove f_x e f_z sono rispettivamente i termini forzanti in direzione parallela e trasversale rispetto al moto medio.

Campo scalare passivo

In modo del tutto analogo a quanto effettuato riguardo al campo di velocità, l'equazione evolutiva per $\hat{\phi}$ risolta numericamente dall'algoritmo è deducibile effettuando la trasformata di Fourier dell'equazione di diffusione (5.5) ricavando la seguente relazione differenziale:

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_\tau \text{Sc}} \left(D_2(\hat{\phi}) - \kappa^2 \hat{\phi} \right) + \widehat{H\Phi} \tag{5.27}$$

dove il termine non lineare $\widehat{H\Phi}$ è definito dalla seguente relazione:

$$\widehat{H\Phi} \equiv -i\alpha \widehat{U\phi} - D_1(\widehat{V\phi}) - i\beta \widehat{W\phi} \tag{5.28}$$

Per risolvere numericamente l'equazione (5.27), occorre naturalmente specificare il campo iniziale $\hat{\phi}_{h\ell}(y, t)\Big|_{t=0}$ (deducibile dalla condizione iniziale per $\phi(x, y, z, t)$) e le condizioni al contorno nelle tre

direzioni. Per quanto riguarda le direzioni x e z le condizioni al contorno periodiche sono automaticamente soddisfatte dallo sviluppo in serie di Fourier del campo scalare passivo, mentre le condizioni al contorno isoscalari sulle due pareti si traducono nelle seguenti istanze:

$$\hat{\phi}_{h\ell}(y, t)|_{y=0} = 0 \quad (5.29)$$

$$\hat{\phi}_{h\ell}(y, t)|_{y=2\delta} = 0 \quad (5.30)$$

Alla luce di quanto appena riportato, è lampante e, per alcuni aspetti sorprendente, l'estrema somiglianza esistente fra l'equazione per $\hat{\phi}$ (5.27) e l'equazione per $\hat{\vartheta}$ (5.12). Un'ulteriore affinità fra le due equazioni differenziali è costituita dall'esatta coincidenza delle condizioni al contorno sulle due pareti.

5.1.4 Discretizzazione in direzione y e risoluzione numerica delle equazioni

In questa sezione verrà brevemente menzionato il metodo impiegato per discretizzare gli operatori di derivazione nella direzione normale alle pareti e le conseguenze indotte da tale procedimento, e verranno inoltre citati i metodi numerici impiegati dall'algoritmo per risolvere le equazioni dedotte nel paragrafo precedente.

In virtù della scelta di impiegare la rappresentazione di Fourier nelle direzioni x e z , l'unica variabile rispetto alla quale sono presenti operazioni di derivazione nelle equazioni risolte numericamente dall'algoritmo è la coordinata normale y . La discretizzazione spaziale in questa direzione è stata effettuata impiegando una griglia monodimensionale non equispaziata, in modo tale da godere di una maggiore risoluzione in prossimità della parete. Alla luce delle (5.12), (5.17), (5.23) e (5.27), gli operatori da discretizzare in tale direzione, sono gli operatori differenziali D_1 , D_2 e D_4 .

Per effettuare tale discretizzazione, in sostituzione dei polinomi di Chebyshev ampiamente utilizzati in letteratura scientifica (cfr. [13], ad esempio), sono stati impiegati schemi compatti alle differenze finite. Questi schemi possiedono un'accuratezza del quarto ordine ed esprimono il valore delle derivate di una funzione mediante una combinazione lineare dei valori di quest'ultima calcolati su una griglia computazionale costituita da cinque punti. Per ulteriori approfondimenti riguardanti i dettagli di tali schemi numerici si rimanda all'articolo di Quadrio e Luchini [12].

L'assenza nelle equazioni sopra citate dell'operatore di derivazione del terzo ordine consente di impiegare questi schemi compatti, di norma impliciti, al costo computazionale di schemi espliciti.

È ora possibile, avendo illustrato brevemente il funzionamento degli schemi compatti alle differenze finite, riportare la forma discretizzata nel tempo delle equazioni risolte numericamente dal codice e descrivere la strategia di calcolo implementata per integrare computazionalmente tali equazioni. In primo luogo, è opportuno ed importante sottolineare che l'algoritmo numerico elaborato originariamente da Luchini e Quadrio e sviluppato ulteriormente nel corso di questa tesi per risolvere numericamente le equazioni impiega uno schema parzialmente implicito. La parte esplicita delle equazioni viene, infatti, integrata mediante un metodo Runge-Kutta esplicito del terzo ordine, mentre per la parte viscosa implicita viene invece utilizzato uno schema Crank-Nicholson implicito del secondo ordine. Le versioni discretizzate nel tempo delle equazioni (5.12), (5.17) e (5.27), alla luce degli schemi numerici impiegati, sono rispettivamente le seguenti

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{\Delta t} \hat{v}_{hl}^{n+1} - \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[D_2(\hat{v}_{hl}^{n+1}) - \kappa^2 \hat{v}_{hl}^{n+1} \right] = \\ & \quad \frac{a_1}{\Delta t} \hat{v}_{hl}^n + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[D_2(\hat{v}_{hl}^n) - \kappa^2 \hat{v}_{hl}^n \right] + \\ & a_2 \left(i\beta_0 \ell \widehat{HU}_{hl} - i\alpha_0 h \widehat{HW}_{hl} \right)^n + a_3 \left(i\beta_0 \ell \widehat{HU}_{hl} - i\alpha_0 h \widehat{HW}_{hl} \right)^{n-1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{\Delta t} \left(D_2(\widehat{V}_{hl}^{n+1}) - \kappa^2 \widehat{V}_{hl}^{n+1} \right) - \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[D_4(\widehat{V}_{hl}^{n+1}) - 2\kappa^2 D_2(\widehat{V}_{hl}^{n+1}) + \kappa^4 \widehat{V}_{hl}^{n+1} \right] = \\ & \frac{a_1}{\Delta t} \left(D_2(\widehat{V}_{hl}^n) - \kappa^2 \widehat{V}_{hl}^n \right) + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[D_4(\widehat{V}_{hl}^n) - 2\kappa^2 D_2(\widehat{V}_{hl}^n) + \kappa^4 \widehat{V}_{hl}^n \right] + \\ & \quad a_2 \left(-\kappa^2 \widehat{HV}_{hl} - D_1 \left(i\alpha_0 h \widehat{HU}_{hl} + i\beta_0 \ell \widehat{HW}_{hl} \right) \right)^n + \\ & \quad a_3 \left(-\kappa^2 \widehat{HV}_{hl} - D_1 \left(i\alpha_0 h \widehat{HU}_{hl} + i\beta_0 \ell \widehat{HW}_{hl} \right) \right)^{n-1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{\Delta t} \hat{\phi}_{hl}^{n+1} - \frac{1}{\text{Re}_\tau \text{Sc}} \left[D_2(\hat{\phi}_{hl}^{n+1}) - \kappa^2 \hat{\phi}_{hl}^{n+1} \right] = \\ & \quad \frac{a_1}{\Delta t} \hat{\phi}_{hl}^n + \frac{1}{\text{Re}_\tau \text{Sc}} \left[D_2(\hat{\phi}_{hl}^n) - \kappa^2 \hat{\phi}_{hl}^n \right] + \\ & \quad a_2 \widehat{H\Phi}_{hl}^n + a_3 \widehat{H\Phi}_{hl}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.33)$$

dove la terna (h, ℓ, y) è fissata, l'apice intero $n + 1, n$ o $n - 1$ indica l'istante discreto rispetto al quale si riferiscono le variabili ed i valori dei coefficienti a_i definiscono un particolare schema di avanzamento temporale. Nel caso in cui si impieghi, ad esempio, uno schema Adams-Bashfort del secondo ordine per i coefficienti a_i valgono le seguenti uguaglianze: $a_1 = 2, a_2 = 3$ e $a_3 = -1$. Compito finale di questa tesi è la soluzione di queste equazioni discretizzate appena riportate con le condizioni iniziali e le seguenti condizioni al contorno:

$$\hat{\vartheta}_{h\ell}^{n+1} \Big|_{y=0} = 0 \qquad \hat{\vartheta}_{h\ell}^{n+1} \Big|_{y=2\delta} = 0 \qquad (5.34)$$

$$\hat{V}_{h\ell}^{n+1} \Big|_{y=0} = 0 \qquad \hat{V}_{h\ell}^{n+1} \Big|_{y=2\delta} = 0$$

$$D_1 \left(\hat{V}_{h\ell}^{n+1} \right) \Big|_{y=0} = 0 \qquad D_1 \left(\hat{V}_{h\ell}^{n+1} \right) \Big|_{y=2\delta} = 0 \qquad (5.35)$$

$$\hat{\phi}_{h\ell}^{n+1} \Big|_{y=0} = 0 \qquad \hat{\phi}_{h\ell}^{n+1} \Big|_{y=2\delta} = 0 \qquad (5.36)$$

Avendo descritto approfonditamente la discretizzazione delle equazioni (5.12), (5.17) e (5.27), si è ora in grado di illustrare brevemente la strategia impiegata dal codice per risolvere tali equazioni. Il procedimento si articola principalmente in due stadi. Il primo consiste nel computare i termini espliciti procedendo per piani del canale paralleli alle pareti impiegando algoritmi pseudo-spettrali per calcolare i termini non lineari. Il secondo, invece, dato l'accoppiamento delle equazioni (5.31), (5.32) e (5.33) al variare della quota y fissato il modo (h, ℓ) a causa degli schemi compatti utilizzati per discretizzare gli operatori differenziali in direzione normale alle pareti, consta nell'inversione di tre sistemi lineari per ciascun modo di Fourier: uno per $\hat{\vartheta}_{h\ell}^{n+1}$, uno per $\hat{V}_{h\ell}^{n+1}$ ed uno, infine, per $\hat{\phi}_{h\ell}^{n+1}$.

L'inversione di questi tre sistemi lineari, caratterizzati da matrici dei coefficienti pentadiagonali dato l'utilizzo per gli schemi compatti alle differenze finite di una griglia computazionale a cinque punti, non viene fortunatamente effettuata in blocco (il che comporterebbe un costo computazionale e, di conseguenza, un tempo di calcolo elevati). La scelta, infatti, di utilizzare gli schemi appena citati per la discretizzazione degli operatori differenziali in direzione y consente di parallelizzare il codice numerico, suddividendo il canale piano in un numero di "fette" parallele alle pareti pari al numero di nodi computazionali (ovvero macchine) a disposizione.

Questa strategia permette, infatti, dato il procedimento di calcolo illustrato in questo paragrafo, a ciascun nodo di poter eseguire

tutti calcoli riguardanti i piani appartenenti alla propria fetta di canale, limitando la comunicazione con le altre macchine ai soli dati riguardanti i piani in prossimità delle interfacce fra le diverse porzioni di canale. Perlopiù, la trasmissione delle informazioni avviene unicamente fra nodi relativi a fette contigue.

5.2 Validazione dell'algoritmo

La validazione dell'implementazione numerica impiegata in questa tesi per simulare il comportamento di uno scalare passivo in un canale piano all'interno del quale è presente un flusso turbolento, è stato effettuato progettando e realizzando una simulazione numerica diretta avente quasi esattamente gli stessi parametri di una simulazione numerica diretta compiuta da Johansson *et al.* e riportata in [13].

Entrambe le simulazioni sono caratterizzate dai seguenti parametri (si faccia riferimento, per alcune delle grandezze elencate qui di seguito, alla figura 4.1):

- $Sc = 0.71$;
- $Re_\tau = 265$;
- $L_x = 12.56\delta$;
- $L_z = 5.5\delta$;
- semi altezza del canale piano: 2δ .

Per quanto concerne, invece, la griglia computazionale esiste una piccola, ma non del tutto trascurabile, differenza fra le caratteristiche di quella progettata in questo lavoro di tesi e la griglia impiegata dagli studiosi svedesi all'Università di Stoccolma. Quest'ultima è, infatti, costituita da un numero di punti pari a $256 \times 193 \times 192$ nelle direzioni x , y , e z rispettivamente, equivalente alla seguente risoluzione spaziale in unità di parete:

- $\Delta x^+ = 13.0$;
- $\Delta y^+ = 2.70$, in media (data la non equispaziatura della griglia numerica nella direzione normale alle pareti);
- $\Delta z^+ = 7.6$.

Il nostro dominio computazionale è invece leggermente più risoluto in direzione y grazie ad un maggior numero di punti spesi in tale direzione. La nostra griglia è infatti composta da un numero di

punti pari a $256 \times 257 \times 192$. La risoluzione spaziale corrispondente ad una griglia avente le suddette caratteristiche è riportata qui di seguito:

- $\Delta x^+ = 13.0$;
- $\Delta y^+ = 2.07$, in media;
- $\Delta z^+ = 7.6$.

La maggior risoluzione nella direzione ortogonale alle pareti ha permesso, soprattutto in prossimità di queste ultime, di osservare in maggior dettaglio le caratteristiche anisotrope del campo scalare passivo.

Specificati i parametri delle due simulazioni numeriche dirette, è ora possibile confrontare i risultati conseguiti elaborando l'archivio di dati costruito attraverso di esse. L'attenzione è stata focalizzata sull'andamento in funzione della distanza dalla parete del profilo medio dello scalare passivo, della deviazione standard di quest'ultimo e della dissipazione della varianza dello scalare.

Tutte le grandezze appena citate sono state opportunamente normalizzate utilizzando la scala caratteristica del campo scalare passivo in prossimità delle pareti ϕ_τ definita dalla relazione (4.23). Il confronto è illustrato e riportato nelle figure 5.1, 5.2 e 5.3 mediante le quali si può constatare in modo netto e chiaro la perfetta consistenza dei risultati conseguiti attraverso le due simulazioni numeriche dirette. Tale consistenza è la dimostrazione che il codice numerico elaborato nel corso di questa tesi simula correttamente il comportamento di uno scalare passivo in moti turbolenti di parete che si sviluppano all'interno di canali piani in presenza di un gradiente medio di scalare, in quanto le filosofie alla base delle progettazioni dei due codici numerici sono sensibilmente differenti. Gli studiosi dell'Università di Stoccolma, infatti, per discretizzare il campo di moto in direzione normale alle pareti utilizzano i polinomi di Chebyshev, a differenza degli schemi compatti alle differenze finite impiegati in questa tesi ed illustrati precedentemente.

5.3 Risoluzioni spaziali delle DNS

Nel corso di questa tesi, oltre alla simulazione numerica effettuata per validare il codice numerico elaborato, sono state progettate e realizzate tre simulazioni numeriche dirette, le quali nel seguito della tesi verranno indicate con le lettere A, B e C. Le tre simulazioni differiscono per le risoluzioni spaziali impiegate per discretizzare i

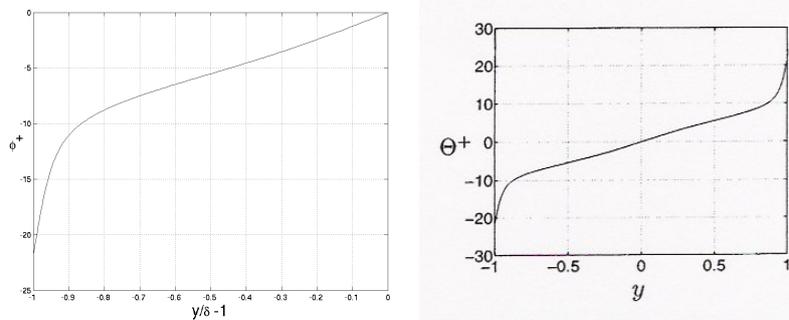


Figura 5.1: Confronto fra la simulazione condotta in questa tesi (a sinistra, corrispondente a metà canale) ed i risultati di Johansson *et al.* [13] (a destra, canale intero) per il profilo medio di scalare in funzione della distanza dalla parete. Entrambe le grandezze sono riscalate impiegando le rispettive scale caratteristiche.

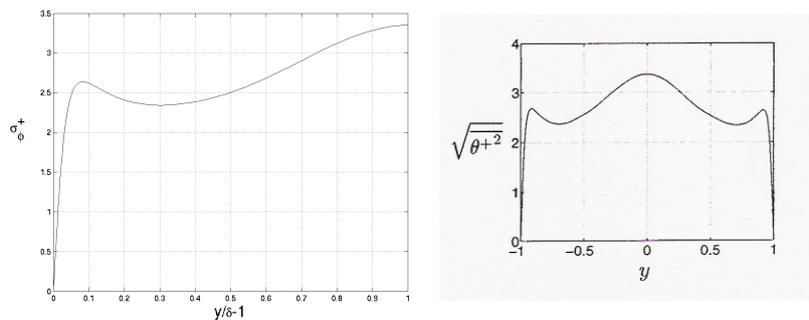


Figura 5.2: Confronto fra la simulazione condotta in questa tesi (a sinistra, corrispondente a metà canale) ed i risultati di Johansson *et al.* [13] (a destra, canale intero) per il profilo di deviazione standard di scalare in funzione della distanza dalla parete. Entrambe le grandezze sono riscalate impiegando le rispettive scale caratteristiche.

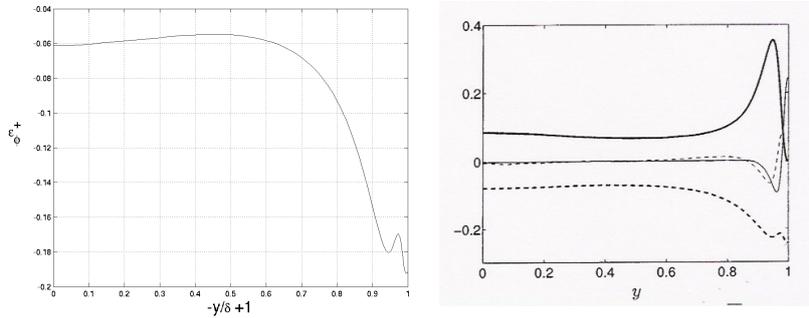


Figura 5.3: Confronto fra la simulazione condotta in questa tesi (a sinistra) ed i risultati di Johansson *et al.* [13] (a destra), entrambi raffiguranti soltanto metà canale, per il profilo di dissipazione della varianza dello scalare in funzione della distanza dalla parete. Entrambe le grandezze sono riscalate impiegando le rispettive scale caratteristiche. Il profilo di dissipazione della varianza dello scalare nella figura di destra è rappresentato dalla curva tratteggiata in grassetto. Le altre curve rappresentano invece: Produzione di varianza dello scalare passivo (linea continua in grassetto); flusso diffusivo molecolare di varianza (linea continua sottile); flusso turbolento di varianza (linea tratteggiata sottile).

campi di velocità e scalare passivo. La risoluzione impiegata nella simulazione A è la risoluzione comunemente usata in letteratura scientifica per simulare i flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani, mentre la B e la C sono caratterizzate da risoluzioni notevolmente maggiori. I parametri delle tre simulazioni numeriche dirette eseguite nel corso di questo lavoro di tesi sono i seguenti:

A:

- $Re_\tau = 160$;
- $Sc = 1$;
- $\Delta x^+ = 10.3$;
- $\Delta z^+ = 5.2$;
- $\overline{\Delta y^+} = 2.5$.

B:

- $Re_\tau = 160$;
- $Sc = 1$;
- $\Delta x^+ = 1.97$;
- $\Delta z^+ = 1.96$;
- $\overline{\Delta y^+} = 2.5$.

C:

- $Re_\tau = 160$;
- $Sc = 1$;
- $\Delta x^+ = 0.98$;
- $\Delta z^+ = 0.98$;
- $\overline{\Delta y^+} = 1.25$.

La ragione alla base della scelta dei parametri sopra riportati per le simulazioni B e C è da ricercarsi nei valori assunti dalla scala di Kolmogorov η nel flusso turbolento studiato in questa tesi. Come si può dedurre dalla figura 5.4, il valore minimo di η , raggiunto a parete, equivale a 1.60. Ciò implica che, essendo il numero di Schmidt, nelle simulazioni lanciate nel corso di questa tesi, pari a 1, le più piccole scale dissipative del campo scalare passivo dovrebbero essere dell'ordine di 1.60. Di conseguenza, i parametri delle simulazioni B e C sono stati scelti in modo da avere in un caso (simulazione B) una risoluzione leggermente inferiore alla scala di Kolmogorov e nella rimanente circostanza (C) una risoluzione di poco superiore.

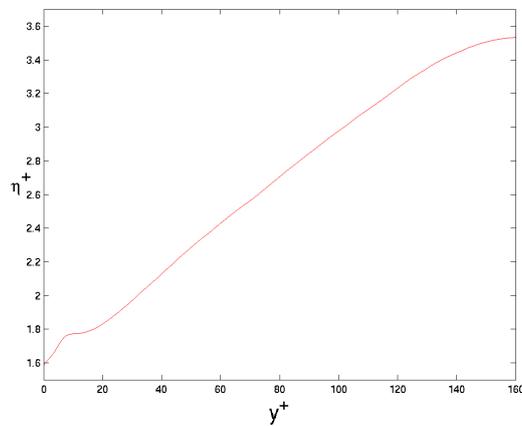


Figura 5.4: Andamento della scala di Kolmogorov η^+ in funzione della quota y^+ . Entrambe le quantità sono espresse in unità di parete.

Capitolo 6

Risultati

Come già anticipato in coda al capitolo 3, l'idea essenziale che ha ispirato il presente lavoro di tesi, oltre all'interesse intrinseco dell'argomento trattato, è la completa assenza, al giorno d'oggi, di qualunque studio riguardante la morfologia del campo di fluttuazione e del campo di dissipazione della varianza di uno scalare passivo in flussi turbolenti di parete.

Negli ultimi anni, infatti, nonostante l'interesse del mondo scientifico riguardo la comprensione delle correnti turbolente in generale e lo studio della diffusione e della dispersione degli scalari passivi sia cresciuto notevolmente (come testimoniato dalla comparsa, in taluni casi recentissima, di numerosi articoli quali, ad esempio, Scumacher *et al.* [6] (2005) e Brethouwer *et al.* [7] (2003)), la quasi totalità delle attività di ricerca si è concentrata sulla struttura e sulle peculiarità esibite dal campo di uno scalare passivo in presenza di flussi turbolenti omogenei ed isotropi.

Soltanto una esigua minoranza degli studi scientifici compiuti sugli scalari passivi prende, infatti, in esame sistemi fluidodinamici caratterizzati da anisotropie di grande scala e dalla presenza di fenomeni viscosi di parete ed in tal caso, tuttavia, l'attenzione viene focalizzata sulla modellizzazione computazionale del vettore densità di flusso di scalare in direzione parallela al moto medio e normale alle pareti (come, ad esempio, effettuato nell'articolo di Johansson *et al.* [13] mediante il quale è stata validato il calcolo numerico impiegato in questa tesi, cfr. capitolo 5).

Di conseguenza, nelle pagine successive di questo capitolo conclusivo della tesi verranno illustrati gli aspetti caratteristici e le peculiarità da alcuni punti di vista sorprendenti della morfologia dei campi di fluttuazione e di dissipazione della varianza di uno scalare passivo accoppiati alla dinamica caotica di un flusso turbolento che

si sviluppa all'interno di un canale piano in presenza di un gradiente medio di scalare.

La descrizione morfologica di entrambi i suddetti campi verrà effettuata mostrandone numerose visualizzazioni istantanee, bidimensionali e tridimensionali. Particolare enfasi verrà data alla diversa struttura esibita dai campi di fluttuazione e dissipazione al variare della distanza dalla parete così come verranno illustrate le strutture coerenti di scalare traenti origine dall'accoppiamento di quest'ultimo con il campo turbolento di velocità.

Successivamente, verrà invece radicalmente mutato l'approccio mediante il quale viene compiuta l'analisi del campo di dissipazione della varianza dello scalare passivo. Dallo studio puntuale ed istantaneo di ϵ_ϕ sopra illustrato si passerà, infatti, ad un'analisi statistica della distribuzione della dissipazione della varianza dello scalare rispetto al proprio valor medio in funzione della distanza dalla parete.

In seguito, dopo aver confrontato i risultati ottenuti attraverso i metodi di analisi sopra esposti con analoghi studi scientifici riguardanti il caso omogeneo ed isotropo (Scumacher *et al.* [6] e Brethouwer *et al.* [7]), verrà illustrato un ulteriore importante risultato conseguito nel corso di questo lavoro di tesi: la determinazione di un'opportuna risoluzione spaziale da impiegare nelle simulazioni computazionali in modo tale da essere in grado di osservare ed analizzare tutte le più fini microstrutture dissipative di scalare al variare della distanza dalla parete.

6.1 Campo di fluttuazione

6.1.1 Analisi del campo di fluttuazione in funzione della distanza dalla parete

Nelle figure seguenti (dalla figura 6.1 alla figura 6.6) sono riportate numerose sezioni parallele alle pareti del campo di fluttuazione dello scalare passivo per diversi valori della distanza dalla parete inferiore (espressa, quest'ultima, in unità di parete y^+). Il moto medio è diretto orizzontalmente verso destra e la scala di colori parte dal colore blu scuro (valori di ϕ' sensibilmente negativi) e si estende fino al colore rosso (valori di fluttuazione notevolmente maggiori di zero), con il colore verde corrispondente a valori di ϕ' pari a zero.

Come si può facilmente dedurre dalle figure 6.1 e 6.2, relative al substrato viscoso ed allo strato cuscinetto, tali regioni sono caratterizzate dall'esistenza di strisce di valori negativi di fluttuazione (in

blu scuro) parallele al moto medio intervallate da regioni nelle quali sono presenti zone di fluttuazione elevata.

Nella prima istantanea riportata, infatti, corrispondente ad un valore di y^+ pari a 5 (nel substrato viscoso), si possono già intravedere delle strutture orizzontali allungate di colore azzurro le quali si estendono per tutta la larghezza della figura, a testimonianza di una lunghezza di tali strutture maggiore della dimensione longitudinale L_x del canale.

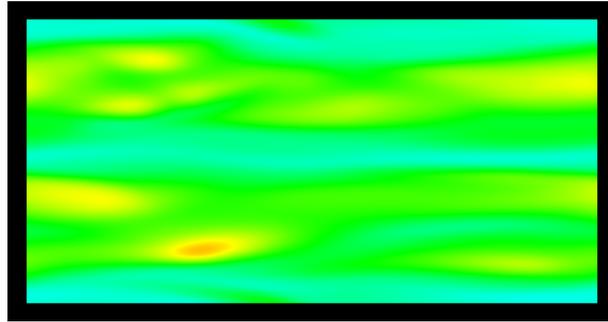


Figura 6.1: Sezione $x - z$ di ϕ' per $y^+ = 5$

Nella figura 6.2 (la quale mostra una sezione del campo di ϕ' relativa ad un valore di y^+ pari a 20) si può facilmente osservare che nella parte esterna dello strato cuscinetto la morfologia del campo di fluttuazione subisce delle notevoli trasformazioni. In tale figura, le strutture “a striscia” descritte precedentemente risultano essere, infatti, molto più visibili. In tale sezione è, inoltre, facilmente riscontrabile come le suddette strutture siano caratterizzate da una maggiore larghezza e da bordi sensibilmente più nitidi, oltre ad esibire un colore blu molto più intenso ed a mostrare una forma leggermente ondulata, sinuosa. Nella figura 6.2 è inoltre osservabile un notevole aumento della presenza di regioni contraddistinte da un valore di fluttuazione positivo. Un’ulteriore particolarità riguardante le zone ad elevata fluttuazione è il loro graduale allungamento riscontrabile nella natura “a filamento” mostrata in figura.

La spiegazione fisica delle caratteristiche mostrate dal campo di fluttuazione nella porzione di canale corrispondente a valori di y^+ inferiori a 20 verrà fornita successivamente quando verranno prese in esame sezioni del campo di ϕ' parallele al gradiente medio (v. paragrafo 6.1.2).

Il campo di fluttuazione dello scalare passivo subisce una profonda trasformazione addentrandosi nella regione logaritmica (6.3). In questa porzione di canale (la quale, si ricorda si estende per valori di

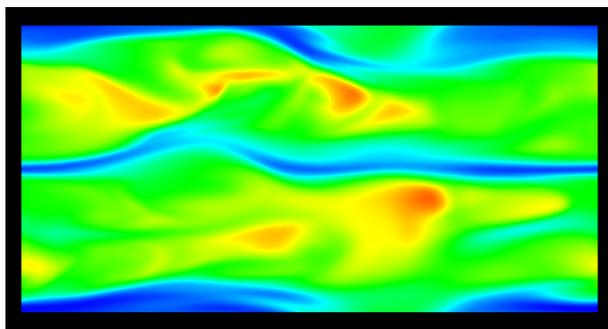


Figura 6.2: Sezione $x - z$ di ϕ' per $y^+ = 20$

y^+ appartenenti alla seguente gamma: $20 < y^+ < 100$) scompaiono del tutto le strisce caratterizzanti la regione di canale attigua alla parete. Tali strutture, infatti, come si può agevolmente notare nella figura 6.3, si frantumano e si assottigliano dando luogo, quindi, a strutture coerenti che assumono un aspetto filiforme ed ondulato aventi la peculiarità di essere leggermente arricciate alle estremità. Una diretta ed immediata conseguenza di questo mutamento della morfologia del campo di fluttuazione consiste nell'estrema contiguità fra le strutture filiformi di fluttuazioni negative appena descritte e le strutture, anch'esse fini ed estese, corrispondenti a valori elevati di fluttuazione. È inoltre facilmente riscontrabile come le strutture ora citate si dispongano, nella maggior parte dei casi, parallele le une alle altre.

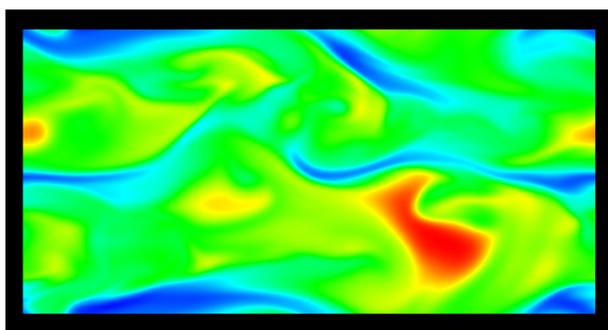


Figura 6.3: Sezione $x - z$ di ϕ' per $y^+ = 40$

La presenza di strutture prevalentemente “a filamento di fluttuazioni di entrambi i segni, disposte adiacentemente e parallelamente le une rispetto alle altre, emerge in modo ancor più netto e chiaro dalla figura 6.4 la quale mostra la sezione piana del campo di ϕ'

relativa ad un valore di y^+ pari a 70. In questa figura si possono inoltre osservare le caratteristiche principali e fondamentali di tali strutture. Esse sono infatti contraddistinte da una forma allungata, snodata, curvilinea e contorta e tendono a ripiegarsi su se stesse mostrando una propensione ad arricciarsi in prossimità delle estremità. La loro curvatura è inoltre soggetta a rapidissime variazioni, particolarità che è responsabile dell'insorgere di punti cuspidali.

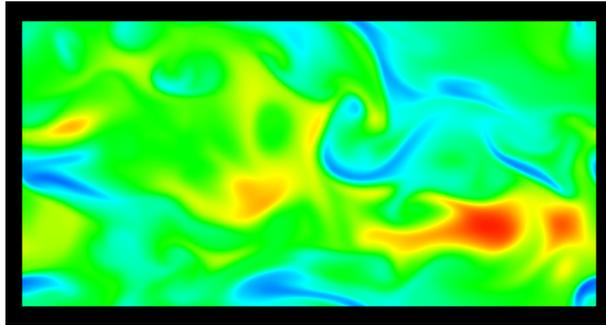


Figura 6.4: Sezione $x - z$ di ϕ' per $y^+ = 70$

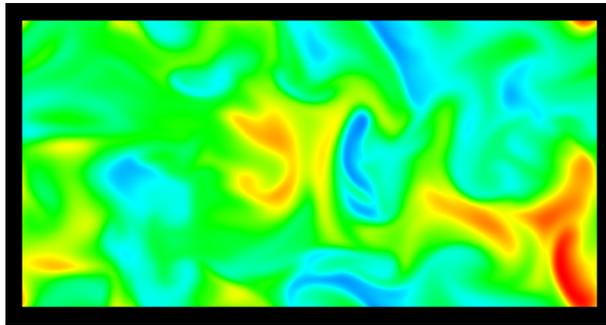


Figura 6.5: Sezione $x - z$ di ϕ' per $y^+ = 100$

Le peculiarità del campo di fluttuazione emerse nell'analisi della figura 6.4 sono ancora più evidenti in figura 6.5 ($y^+ = 100$), l'ultima istantanea relativa alla regione logaritmica. In quest'ultima figura, infatti, i filamenti corrispondenti a valori di fluttuazioni del campo scalare passivo diversi da zero sono molto più lunghi rispetto all'istantanea precedente ed inoltre la loro forma è molto più snodata, variegata, contorta ed articolata. Le strutture a filamento presenti per $y^+ = 100$ presentano perlopiù molti più punti cuspidali ed è molto più frequente la circostanza nella quale filamenti relativi a valori di fluttuazione molto distinti fra loro sono attigui e paralleli gli

uni agli altri. Un'altra differenza fra la figura in esame e l'istantanea relativa a un valore di y^+ pari a 70 è la sensibile diminuzione della frazione di figura occupata dal colore verde (fluttuazione nulla) a testimonianza di un aumento considerevole delle fluttuazioni dello scalare all'aumentare della distanza dalle pareti del canale.

Questa tendenza appena illustrata del campo di fluttuazione al crescere del valore di y^+ si manifesta anche nella porzione centrale del canale. Dalle figura 6.6 (la quale coincide proprio con la sezione del campo di ϕ' effettuata in corrispondenza del piano mediano) si può infatti facilmente rilevare un indubbio aumento della complessità del campo di ϕ' dovuto sostanzialmente al fatto che le strutture in questa regione del canale si dispongono in modo del tutto aleatorio mostrando forme sempre più molteplici, articolate e frastagliate. Emerge inoltre in modo inequivocabile una maggiore propensione delle strutture filamentose ad arricciarsi alle estremità rispetto a valori inferiori della quota ed è inoltre confermato anche l'infittirsi delle strutture, data l'esigua porzione della figura colorata di verde.

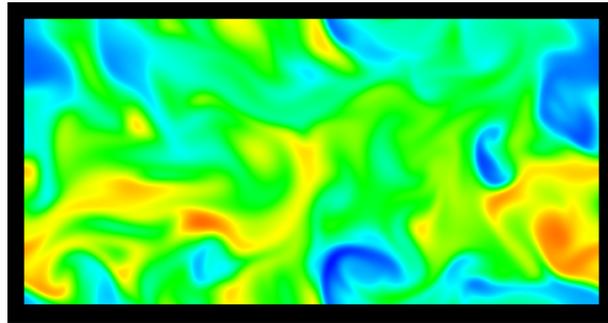


Figura 6.6: Sezione $x - z$ di ϕ' per $y^+ = 160$

Le strutture filamentose descritte approfonditamente in questo paragrafo sono indice di una morfologia del campo di ϕ' caratterizzata dalla presenza di strutture “a foglio” le quali possono essere osservate nella figura 6.7. Questa istantanea raffigura le superfici di livello del campo di fluttuazione relative a valori di ϕ' pari a -0.15 (in colore azzurro) e $+0.15$ (in colore giallo cupo). I filamenti descritti precedentemente nel corso di questo paragrafo possono quindi essere considerati sezioni di tali fogli.

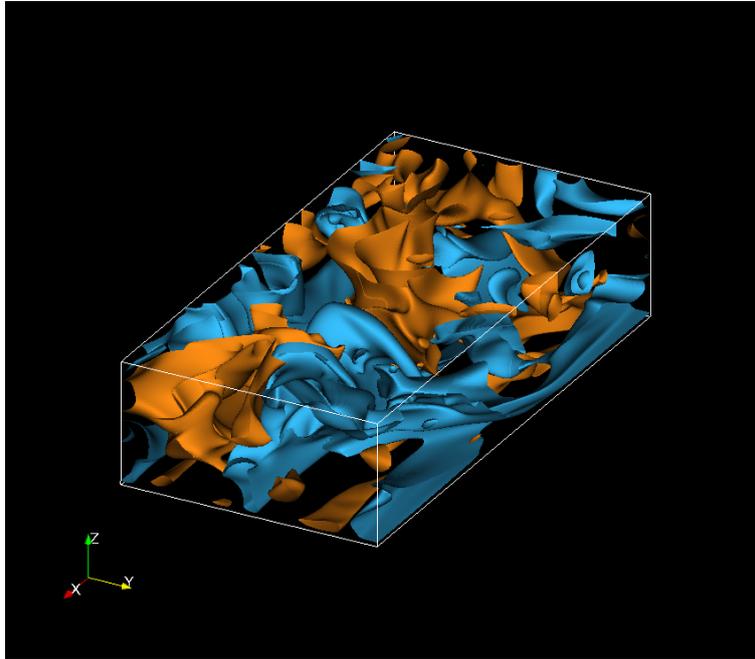


Figura 6.7: Superfici di livello del campo di fluttuazione relative a valori di ϕ' pari a -0.15 (in azzurro) e $+0.15$ (in giallo cupo)

6.1.2 Accoppiamento con il campo di velocità

In questo paragrafo verranno illustrate le ragioni fisiche alla base della formazione delle strutture caratterizzanti la morfologia del campo di ϕ' nella regione $y^+ < 20$. In tale porzione del canale, come è stato sottolineato precedentemente descrivendo le caratteristiche del campo di fluttuazione mostrate nelle figure 6.1 e 6.2, sono presenti strutture allungate e sottili (“a striscia”) le quali si estendono parallelamente al moto medio. Alla luce delle figure 6.8 e 6.9 è evidente che queste strisce corrispondono a sezioni orizzontali delle strutture di colore blu intenso osservabili nella figura 6.8.

Queste strutture si originano in una porzione di canale molto prossima alla parete, senza, tuttavia, entrare a contatto con essa e si sviluppano verso il centro del canale, assottigliandosi ed allungandosi, mostrando, inoltre, di essere influenzate considerevolmente dal moto medio esibendo una marcata tendenza ad inclinarsi nella direzione parallela a quest’ultimo. All’aumentare della distanza dalla parete, le strutture suddette mostrano, perlopiù, una chiara ed evidente propensione ad assumere sembianze filiformi.

L’estensione trasversale di queste strutture è facilmente deducibi-

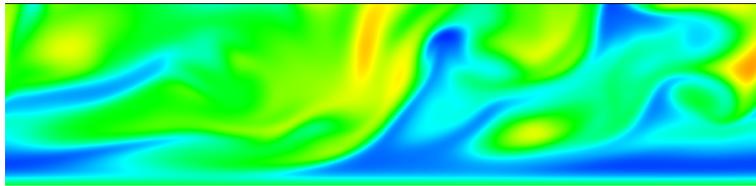


Figura 6.8: Sezione $x - y$ del campo di fluttuazione.

le osservando attentamente la figura 6.9 la quale corrisponde a una sezione nel piano $\{y, z\}$ del campo di ϕ' . La parte inferiore di tale istantanea presenta, infatti, una struttura allungata di colore blu intenso, leggermente ondulata, la quale si sviluppa prevalentemente verso la regione centrale del canale e che costituisce la sezione trasversale delle strutture blu scuro osservate nella parte bassa della figura 6.8.

La presenza delle strutture appena descritte è la conferma dell'accoppiamento di ϕ con il campo di velocità turbolento. Quest'ultimo, infatti, nella regione vicina alle pareti, è caratterizzato dalla presenza di strisce di fluido le quali tendono a muoversi verso il piano mediano del canale con una velocità crescente all'aumentare di y^+ (cfr. Pope [3], capitolo 7).

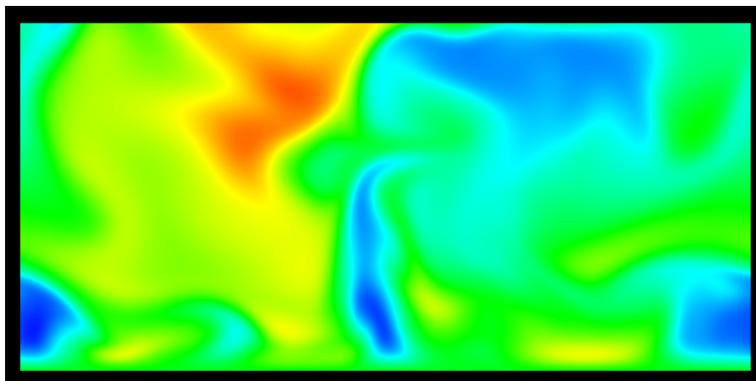


Figura 6.9: Sezione $y - z$ del campo di fluttuazione.

6.2 Campo di dissipazione

Alla luce delle caratteristiche del campo di fluttuazione illustrate nel paragrafo precedente, la morfologia del campo di dissipazione della varianza di ϕ è di facile comprensione. Dalla definizione della dissi-

pazione istantanea della varianza dello scalare, $\tilde{\epsilon}_\phi = 2\gamma\nabla\phi' \cdot \nabla\phi'$, si deduce, infatti, che ad elevati valori del gradiente del campo di fluttuazione ϕ' corrispondono valori elevati della dissipazione istantanea $\tilde{\epsilon}_\phi$.

Questo comportamento è facilmente riscontrabile nelle figure 6.10 - 6.15 le quali mostrano sezioni del campo di dissipazione corrispondenti ad alcune sezioni del campo di fluttuazione riportate nel paragrafo precedente. Prima di analizzare tali istantanee, è, tuttavia, necessario puntualizzare che la scala di colori impiegata in questo paragrafo non coincide con la scala utilizzata nella descrizione del campo di fluttuazione. Essendo infatti $\tilde{\epsilon}_\phi$ una quantità positiva o nulla, i valori di dissipazione prossimi allo zero vengono rappresentati in blu per volgere al verde, al giallo ed al rosso al crescere del proprio valore.

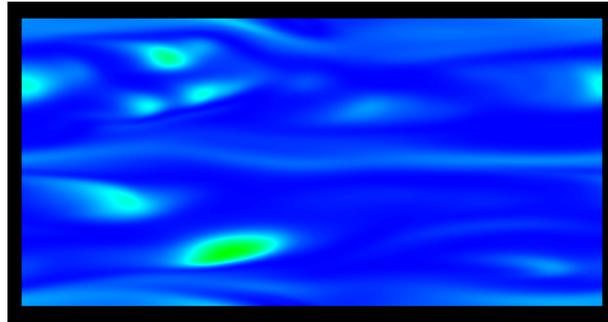


Figura 6.10: Sezione del campo di dissipazione corrispondente alla sezione del campo di fluttuazione mostrata in figura 6.1

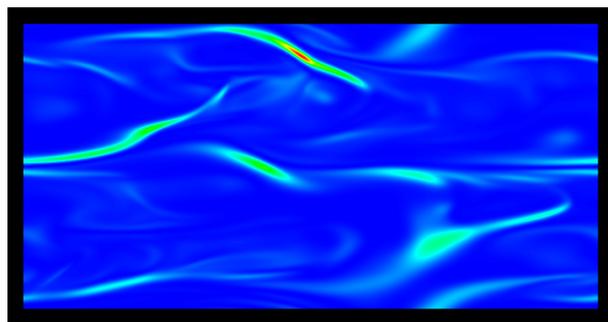


Figura 6.11: Sezione del campo di dissipazione corrispondente alla sezione del campo di fluttuazione mostrata in figura 6.2

Da queste istantanee è infatti facilmente osservabile come valori elevati di dissipazione (indicati con i colori giallo e rosso) si verifi-

chino proprio in corrispondenza di rapide variazioni del campo di fluttuazione (si confrontino, a tale scopo, le figure riportate all'interno di questo paragrafo con le opportune istantanee presenti nel paragrafo 6.1).

La morfologia del campo di fluttuazione risulta essere molto utile anche per spiegare l'origine delle strutture filiformi caratterizzanti il campo di dissipazione. Queste strutture “a filamento” gialle e rosse presentano, infatti, una morfologia molto simile a quella esibita dalle strutture sottili ed allungate che contraddistinguono il campo di fluttuazione. Questa affinità è proprio dovuta all'estrema contiguità, nel campo di fluttuazione, di strutture filiformi parallele corrispondenti a valori di ϕ' estremamente diversi fra loro.

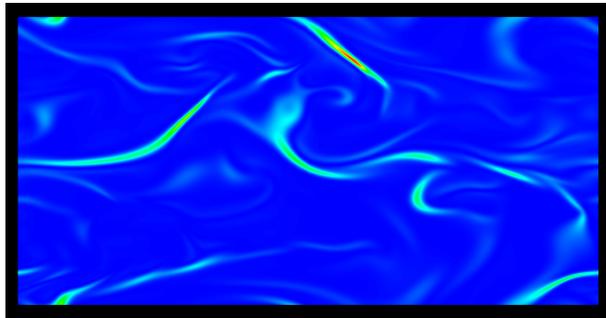


Figura 6.12: Sezione del campo di dissipazione corrispondente alla sezione del campo di fluttuazione mostrata in figura 6.3

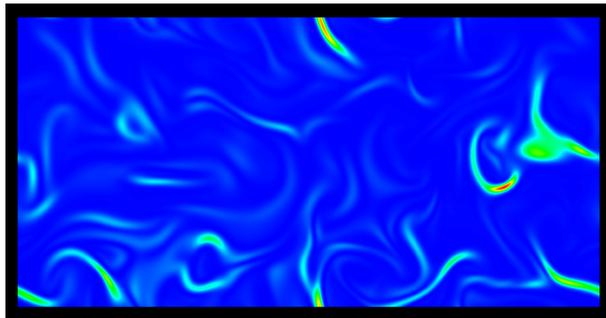


Figura 6.13: Sezione del campo di dissipazione corrispondente alla sezione del campo di fluttuazione mostrata in figura 6.6

La morfologia del campo di dissipazione illustrata in questo paragrafo, in modo del tutto analogo al campo di fluttuazione, è indice di una struttura tridimensionale caratterizzata dalla presenza di strutture “a foglio” corrispondenti a superfici di livello di $\tilde{\epsilon}_\phi$ le cui sezioni

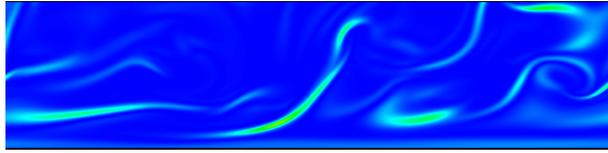


Figura 6.14: Sezione del campo di dissipazione corrispondente alla sezione del campo di fluttuazione mostrata in figura 6.8

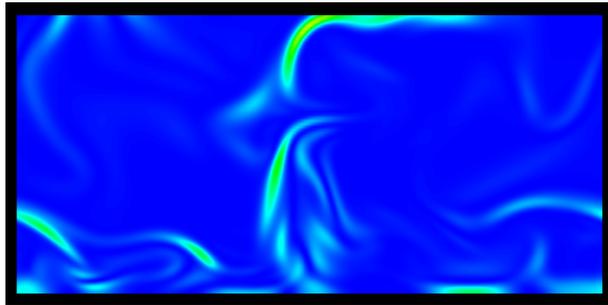


Figura 6.15: Sezione del campo di dissipazione corrispondente alla sezione del campo di fluttuazione mostrata in figura 6.9

sono proprio i “filamenti” appena descritti. Questa caratteristica del campo di dissipazione emerge in modo chiaro ed evidente dalla figura 6.16.

6.3 Analisi statistica del campo di dissipazione $\tilde{\epsilon}_\phi$

In questo paragrafo della tesi verrà analizzato il campo di dissipazione $\tilde{\epsilon}_\phi$ impiegando un approccio completamente diverso rispetto al metodo di studio utilizzato nel paragrafo precedente. L'analisi illustrata nelle prossime righe è infatti uno studio statistico della distribuzione di $\tilde{\epsilon}_\phi$ rispetto al proprio valor medio in funzione della distanza dalla parete y^+ . A tale scopo sono stati realizzati dei grafici aventi in ascissa i valori di $\tilde{\epsilon}_\phi$ normalizzati con il proprio valor medio ed in ordinata la rispettiva densità di probabilità.

Il primo grafico, riportato in figura 6.17, mostra quattro curve di densità di probabilità corrispondenti ad altrettanti valori di y^+ : $y^+ = 0$ (curva rossa); $y^+ = 4.7$ (curva blu); $y^+ = 73$ (curva magenta); $y^+ = 160$ (curva azzurra). La prima curva è quindi relativa al campo di dissipazione presente sulle pareti del canale, la seconda prende, invece, in esame la distribuzione di $\tilde{\epsilon}_\phi$ nel substrato viscoso,

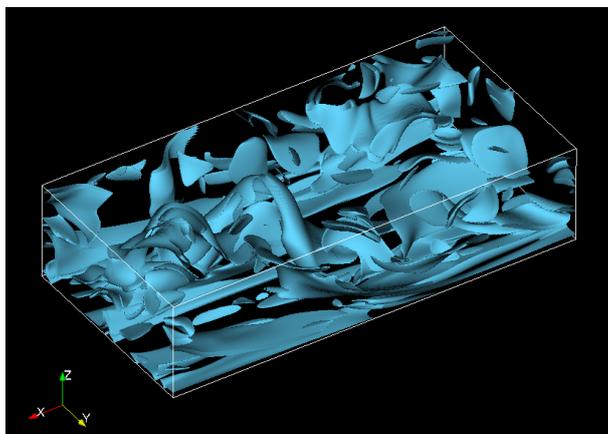


Figura 6.16: Superfici di livello del campo di dissipazione corrispondenti ad un valore di $\tilde{\epsilon}_\phi^+$ pari a 0.505

mentre le altre due curve analizzano il campo di dissipazione nella regione logaritmica e sul piano mediano del canale.

Esaminando attentamente la figura 6.17 è possibile evidenziare tre caratteristiche molto interessanti esibite dal campo di dissipazione. In primo luogo, una caratteristica molto importante del campo di dissipazione che emerge dalla figura 6.17 consiste nella non trascurabile probabilità che si verifichino eventi molto lontani dal valor medio, a testimonianza del fatto che il campo di $\tilde{\epsilon}_\phi$ è molto intermittente.

Secondariamente, per valori di dissipazione molto inferiori rispetto al valor medio, si osserva che all'aumentare della quota la probabilità di tali eventi diminuisce. Questo comportamento non si riscontra invece per valori elevati di $\tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$. In questa regione, infatti, la densità di probabilità non mostra un andamento chiaro e netto come nella precedente circostanza. Prima diminuisce nel passare da $y^+ = 0$ a $y^+ = 5$ per poi aumentare considerevolmente nella regione logaritmica e diminuire leggermente (soprattutto per valori di $\tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ molto grandi) avvicinandosi al centro del canale.

In ultima istanza, si può notare come l'andamento della curva relativa a un valore di y^+ pari a zero sia molto diverso da quello delle altre curve. La curva rossa è infatti monotona decrescente (indice del fatto che la probabilità aumenta al diminuire del rapporto fra $\tilde{\epsilon}_\phi$ ed il proprio valor medio), mentre le altre mostrano tutte un massimo nella regione $10^{-2} \div 10^{-1}$.

Questo comportamento del campo di dissipazione molto dissimile fra la regione nelle immediate vicinanze della parete e le altre zo-

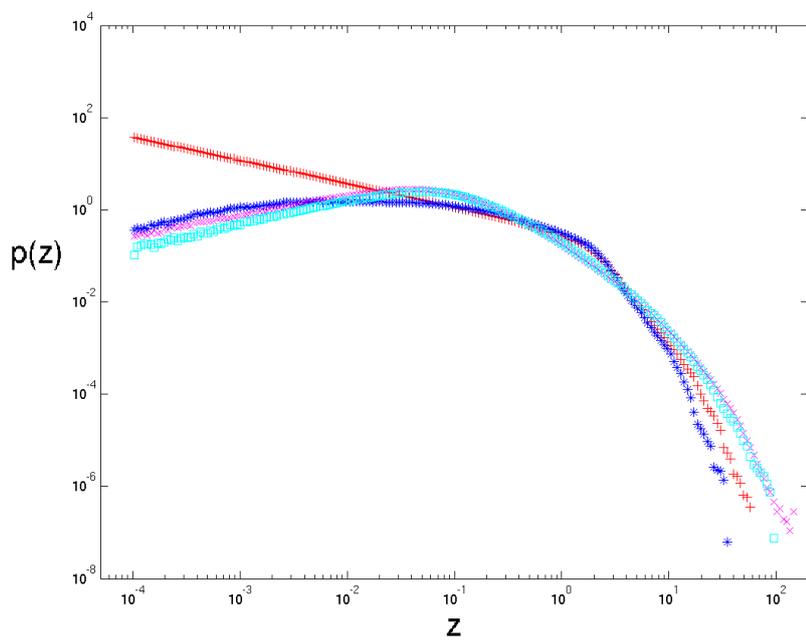


Figura 6.17: densità di probabilità $p(z)$ della variabile $z = \tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ per i seguenti valori di y^+ : $y^+ = 0$ (curva rossa); $y^+ = 4.7$ (curva blu); $y^+ = 73$ (curva magenta); $y^+ = 160$ (curva azzurra);

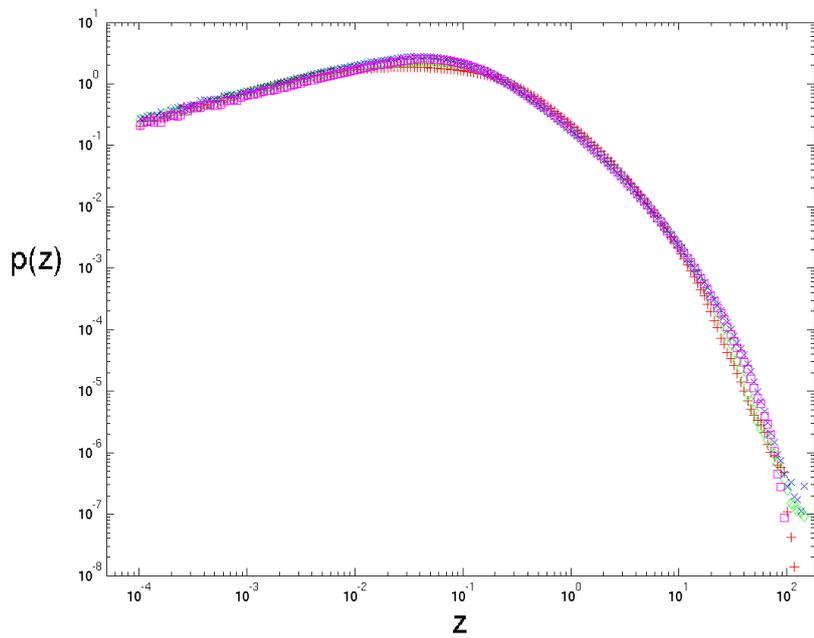


Figura 6.18: densità di probabilità $p(z)$ della variabile $z = \tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ per i seguenti valori di y^+ : $y^+ = 25.3$ (curva rossa); $y^+ = 34.8$ (curva verde); $y^+ = 73$ (curva blu); $y^+ = 104.5$ (curva magenta).

ne del canale è riconducibile al fatto che in prossimità della parete il flusso turbolento risente in modo considerevole delle anisotropie di grande scala caratteristiche del sistema analizzato ed è, inoltre, fortemente condizionato dalla presenza dei fenomeni viscosi i quali in prossimità della parete giocano un ruolo preponderante rispetto ai fenomeni turbolenti (come illustrato nel capitolo 4). Questa influenza delle condizioni al contorno del sistema preso in esame si affievolisce all'aumentare della quota ed infatti la curva relativa ad un valore di y^+ pari a 160 è molto simile all'analogha curva determinata da Schumacher *et al.* [6] in presenza di un flusso turbolento omogeneo ed isotropo (si veda a tale proposito la figura 6.19)

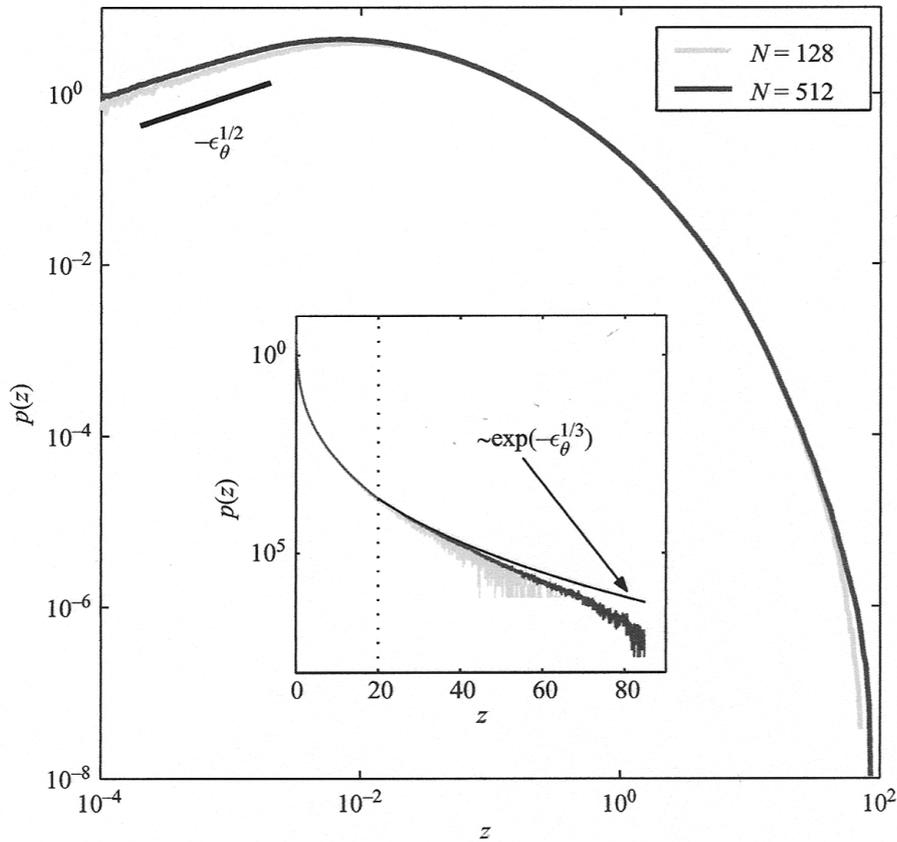


Figura 6.19: densità di probabilità $p(z)$ della variabile $z = \tilde{\epsilon}_\phi / \epsilon_\phi$ corrispondenti ad una risoluzione alta (curva nera) e ad una risoluzione bassa (curva grigia).

Un'ultima caratteristica del campo di dissipazione che emerge dall'analisi statistica descritta in questo paragrafo è l'autosimilarità di tale campo nella regione logaritmica. Questa particolarità è

facilmente osservabile nella figura 6.18 nella quale sono riportate le densità di probabilità di $\tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ per i seguenti valori di y^+ appartenenti alla regione logaritmica: $y^+ = 25.3$ (curva rossa); $y^+ = 34.8$ (curva verde); $y^+ = 73$ (curva blu); $y^+ = 104.5$ (curva magenta). La praticamente perfetta coincidenza delle quattro curve è, infatti, indice dell'autosimilarità sopra menzionata.

6.4 Effetto della risoluzione computazionale sul campo di $\tilde{\epsilon}_\phi$

In questo paragrafo si studia l'effetto della risoluzione spaziale delle simulazioni numeriche dirette sul campo di dissipazione istantanea $\tilde{\epsilon}_\phi$. A tale scopo, sono stati realizzati due grafici, i quali sono riportati nelle figure 6.20 e 6.21. Entrambi questi grafici mostrano l'andamento della densità di probabilità della variabile z definita, come nel paragrafo precedente, dalla relazione: $z = \tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ per valori fissati di y^+ al variare della risoluzione computazionale impiegata nelle simulazioni. In ambedue le figure la curva rossa corrisponde alla simulazione C (più risolta), la curva di colore verde è relativa alla simulazione B (risoluzione media), mentre la curva blu si riferisce alla simulazione A (meno risolta) (si veda il paragrafo 5.3 per i dettagli riguardanti le simulazioni).

Il grafico riportato nella figura 6.20 corrisponde alla densità di probabilità degli eventi di dissipazione sulla parete del canale piano, mentre la figura 6.21 mostra l'analogo grafico relativo alla situazione esistente sul piano mediano del canale. Il punto fondamentale e centrale che emerge confrontando le due figure in esame consiste nell'osservare che mentre per una vastissima gamma di valori di z (comprendente il valore medio di dissipazione) le tre curve coincidono, ciò non è più vero per valori molto maggiori del valor medio (entrambi i grafici) e per valori molto inferiori ad esso (solo per il grafico corrispondente ad un valore di y^+ pari a 160). Questo comportamento, tenuto conto delle relative posizioni occupate dalle curve nelle due figure, consente di tirare le seguenti conclusioni.

In primo luogo, la coincidenza degli andamenti delle curve di densità di probabilità per valori di dissipazione in un intorno esteso del valor medio indica che le diverse risoluzioni si equivalgono nel simulare eventi di dissipazione appartenenti a tale intorno.

Il discorso relativo a valori molto lontani dal valor medio è, invece, completamente diverso. Se si confrontano, infatti, gli andamenti delle curve relativi a valori di dissipazione molto maggiori del valor medio, si può facilmente osservare che la situazione nei due grafici

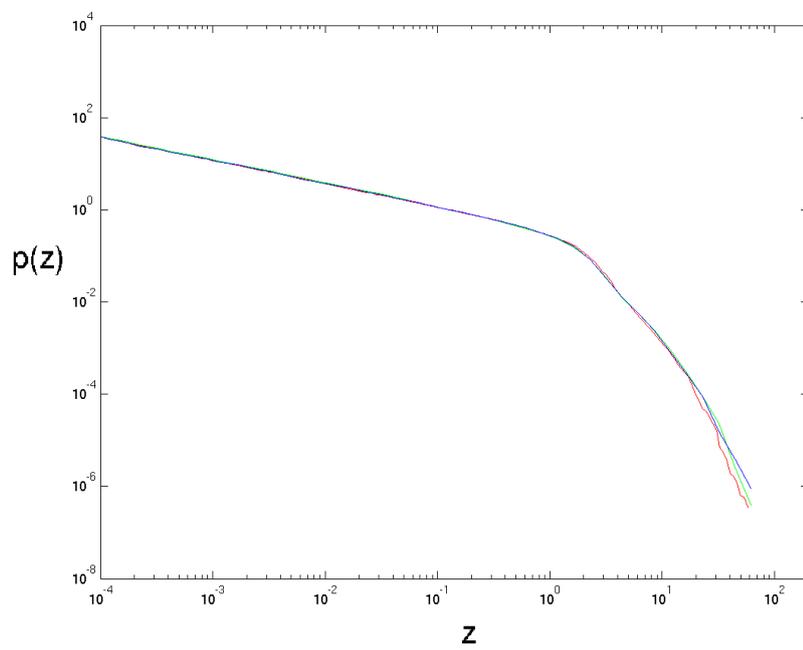


Figura 6.20: densità di probabilità $p(z)$ della variabile $z = \tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ per un valore di y^+ pari a zero e corrispondenti alle seguenti simulazioni: A (curva blu); B (curva verde); C (curva rossa).

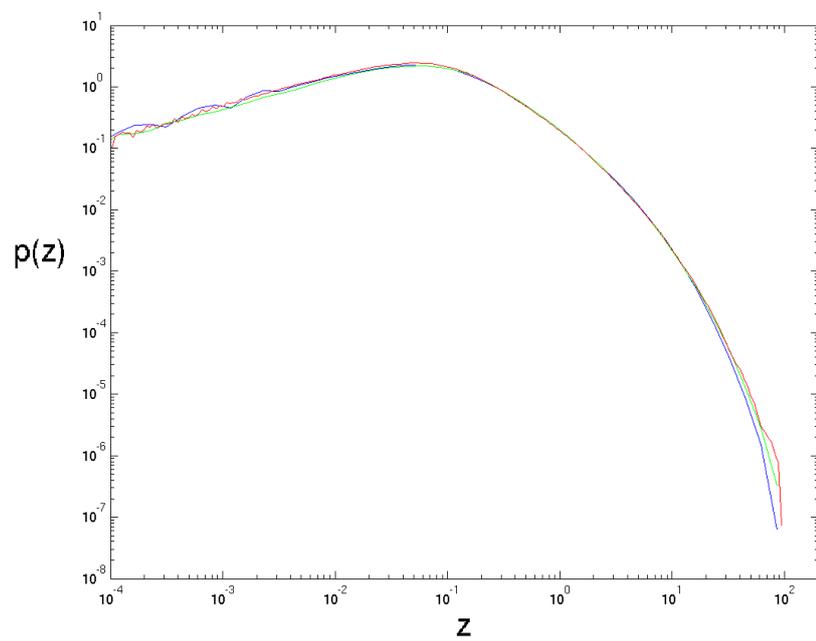


Figura 6.21: densità di probabilità $p(z)$ della variabile $z = \tilde{\epsilon}_\phi/\epsilon_\phi$ per un valore di y^+ pari a 160 e corrispondenti alle seguenti simulazioni: A (curva blu); B (curva verde); C (curva rossa).

è completamente invertita. Sulla parete all'aumentare della risoluzione la densità di probabilità degli eventi molto maggiori del valore medio diminuisce, a testimonianza del fatto che a parete una bassa risoluzione sovrastima la probabilità che accadano eventi intensi di dissipazione. Sul piano mediano del canale è invece vero l'opposto, ovvero una bassa risoluzione sottostima di molto gli eventi di dissipazione molto grandi rispetto al valor medio non riuscendo addirittura a cogliere il verificarsi di eventi dissipativi molto maggiori del valor medio. Lo scenario appena descritto riguardo all'influenza della risoluzione spaziale sul piano mediano del canale per eventi dissipativi molto intensi è del tutto simile a quello descritto da Schumacher *et al.* in [6]. In quest'articolo, infatti, come si può dedurre dalla figura 6.19, viene illustrato come anche in presenza di turbolenza omogenea ed isotropa una risoluzione computazionale più elevata consente di osservare eventi dissipativi molto intensi i quali non verrebbero invece rilevati impiegando una risoluzione meno fine.

Per quanto riguarda invece gli eventi di dissipazione molto più piccoli del valor medio, il grafico che raffigura le densità di probabilità degli eventi di dissipazione normalizzati sulle pareti del canale mostra una assoluta equivalenza delle tre risoluzioni computazionali impiegate, mentre questa equipollenza non sembra più essere vera sul piano mediano del canale dove le diverse curve danno l'impressione di discostarsi l'una dall'altra. Tuttavia, a causa del rumore presente in figura 6.21 non è possibile dedurre un quadro preciso dell'effetto della risoluzione per eventi di dissipazione molto piccoli sul piano mediano del canale .

Alla luce delle considerazioni effettuate in questo paragrafo, è possibile affermare che una risoluzione molto più fine della risoluzione comunemente impiegata nelle DNS di flussi turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani è necessaria in quanto nel caso contrario i risultati conseguiti con tali simulazioni non descriverebbero correttamente le code grasse che caratterizzano la curva di densità di probabilità relativa al campo di dissipazione istantanea di scalare.

Conclusioni

Questa tesi si inserisce nell'ambito dello studio numerico del comportamento degli scalari passivi in moti turbolenti che si sviluppano all'interno di canali piani in presenza di un gradiente medio di scalare.

Nel corso della tesi, l'attenzione è stata principalmente focalizzata sullo studio della morfologia del campo di fluttuazione e del campo di dissipazione della varianza di uno scalare passivo. Questo studio è stato in primo luogo effettuato visualizzando istantanee bidimensionali e tridimensionali dei campi appena citati. Da quest'analisi puntuale ed istantanea sono emerse diverse importanti caratteristiche.

In primo luogo, le visualizzazioni tridimensionali dei campi di fluttuazione e dissipazione all'interno dell'intero canale hanno rivelato una morfologia di tali campi molto particolare. Entrambi hanno, infatti, mostrato di essere caratterizzati dalla presenza di strutture “a foglio”. Queste ultime, corrispondenti a superfici di livello del campo di fluttuazione o dissipazione a seconda del campo considerato, hanno mostrato la tendenza a disporsi parallelamente alle pareti in prossimità di queste ultime per poi cominciare ad esibire un orientamento via via più aleatorio avvicinandosi al piano mediano del canale.

Questa particolare morfologia dei campi di fluttuazione e dissipazione è stata confermata dalle visualizzazioni bidimensionali di tali campi, corrispondenti a sezioni piane di questi ultimi. Queste istantanee hanno infatti mostrato come la morfologia piana dei campi analizzati sia caratterizzata dalla presenza di strutture prevalentemente filiformi, corrispondenti a sezioni delle strutture a “foglio” sopra menzionate. Le strutture “a filamento” appena citate si infittiscono sempre di più allontanandosi dalla parete, aumentando progressivamente la complessità della morfologia dei suddetti campi.

La struttura peculiare appena descritta, esibita dai campi di fluttuazione e dissipazione di scalare accoppiati a correnti turbolente che si sviluppano all'interno di geometrie anisotrope caratterizzate

dalla presenza tutt'altro che trascurabile di fenomeni viscosi, risulta essere, per alcuni aspetti, simile alla morfologia degli stessi campi osservata nella circostanza di moti turbolenti omogenei ed isotropi e riportata all'interno di articoli scientifici comparsi recentemente.

Questa affinità emerge, tuttavia, in modo meno evidente analizzando statisticamente la distribuzione del campo di dissipazione rispetto al proprio valor medio. Da tale studio statistico è stato, infatti, possibile constatare una evidente differenziazione del comportamento del campo di dissipazione fra la regione contigua alla parete ed il caso isotropo.

La profonda e spiccata diversità delle proprietà statistiche del campo di dissipazione nel caso isotropo ed in prossimità della parete, pone le basi per eventuali studi futuri. La comprensione dell'interazione fra le anisotropie di grande scala, i fenomeni viscosi ed il comportamento degli scalari passivi potrebbe infatti costituire un importante passo per far luce su alcuni degli innumerevoli aspetti irrisolti delle correnti turbolente.

Rimanendo nell'ambito degli studi futuri, una possibile direzione futura di indagine potrebbe essere indicata dall'ultimo importante risultato conseguito in questa tesi, ovvero lo studio dell'effetto della risoluzione computazionale sulla simulazione del campo di dissipazione. Nella tesi viene, infatti, evidenziato come le risoluzioni spaziali impiegate nelle simulazioni giochino un ruolo fondamentale nella determinazione delle caratteristiche statistiche del campo di dissipazione, soprattutto per quanto riguarda eventi molto maggiori del valor medio (i quali sono quelli di rilevante interesse industriale ed ambientale).

Di conseguenza, uno sviluppo futuro del lavoro svolto in questa tesi potrebbe essere costituito, compatibilmente con le potenze di calcolo disponibili, dall'individuazione delle più piccole scale dissipative di scalare, in modo da poter progettare simulazioni numeriche dirette in grado di osservare ed analizzare tutti gli eventi di dissipazione, inclusi i più intensi.

Ringraziamenti

Ecco raggiunta la fine di un percorso, molto divertente per alcuni aspetti (molto meno per altri!) pieno di soddisfazioni e di momenti bellissimi..un viaggio che mi ha certamente cambiato e che mi porterò dietro per sempre..ma che non sarei stato in grado di percorrere senza l'aiuto, talvolta fondamentale, di tantissime persone.

Prima di tutto, devo ringraziare i miei genitori. Senza il loro aiuto niente di tutto questo sarebbe stato possibile. I valori importantissimi che mi hanno insegnato, il loro starmi vicino pur essendo lontani, il loro supporto morale, il loro affetto sono stati fondamentali.

Dopodichè voglio ringraziare i miei fratelli, Marco e Fabio, che in non pochi casi mi hanno dato la forza per andare avanti e hanno saputo farmi sorridere in situazioni dove forse c'era ben poco da scherzare(una per tutte il famoso "ratto del pc"...). Poi volevo dire grazie anche ai miei nonni, quelli che per fortuna potranno leggere questi ringraziamenti e quelli che invece purtroppo non lo potranno fare, per le loro perle di saggezza, per ciò che rappresentano e per essere stati presenti quando veramente contava.

Un grazie sincero e sentito va certamente al Professor Parravicini, che prima mi ha fatto scoprire l'affascinante mondo della dinamica dei fluidi e poi mi ha sempre seguito con estrema disponibilità, ed al Professor Quadrio per l'enorme aiuto che mi ha dato in tutti questi mesi e per gli straordinari che più di una volta l'ho costretto a fare. Un grazie a loro anche per la fiducia dimostrata nei miei confronti. Restando in tema di professori, vorrei ringraziare in modo speciale Raffaele per avermi insegnato veramente tante cose e per avermi fatto piacere la fisica.

Ringrazio Lisa e la sua famiglia per l'incredibile aiuto che mi hanno dato nel primo anno di Università a Firenze senza il quale probabilmente avrei lasciato perdere. Un grazie per lo stesso motivo va sicuramente a Federica, Giustino, Marco e Gianbiagio.

Non posso naturalmente dimenticare tutti gli amici vecchi e nuovi che mi hanno accompagnato in questi anni. Gli "amici di Lussemburgo" (per chiamare con un nome diverso gli amici d'infanzia) Matteo,

Riccardo, Francesco e Roberta, con i quali continuo a condividere molti momenti divertenti e bellissimi, che so che non perderò mai di vista e sui quali potrò sempre contare nei momenti di bisogno.

Eppoi gli amici di qui...le persone che ho avuto la fortuna di incontrare una volta arrivato a Milano e che si sono rivelate essere molto, ma molto di più, di semplici “amici di università”. Hanno rappresentato e rappresentano una grande parte della mia vita ed i momenti che ho trascorso con loro sono indelebilmente impressi nella mia memoria. Per le settimane bianche, le gite in barca, gli interrails, le trasferte in Lussemburgo, i viaggi lampo in Scozia e ad Amburgo, le cene, le uscite, le allucinazioni avute dopo la sagra del porcello a Lonato e tutte le altre cose che non si possono dire...per tutto questo un grazie enorme a: Guglielmo, Giorgio e Chiara, Marco ed Yle, Ricky, Gio' ed Alice, Luca e Fede, Il Chiari, Olivia, Davide, Claudia, Simone, Elisa, Davide, Irene, Ale, Davide e tutti quelli che naturalmente avrò dimenticato.

Non posso poi non esprimere la mia gratitudine a ciò che è capace di regalarmi gioie (poche) e sofferenze (parecchie)...la Roma. Rimanendo in tema calcistico un grazie a tutta la fortissima squadra della Stella Verde vincitrice di qualunque trofeo esistente sulla faccia della Terra.

Infine vorrei dire grazie a chi mi ha accompagnato per gran parte di questa tesi, regalandomi momenti unici ed indimenticabili, i più belli della mia vita. Momenti che faranno sempre parte di me.

Grazie Bea.

Bibliografia

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Fluid Mechanics*, Course of Theoretical Physics, **Volume 6**, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford (1987).
- [2] Feynman R. P., *The Feynman lectures on physics*, **Volume 2**, Addison-Wesley Publishing Company Inc., (1963).
- [3] Pope S.B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [4] Batchelor G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1967).
- [5] McComb W.D., *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford University Press, Oxford (1990).
- [6] Schumacher J., Sreenivasan K.R., Yeung P.K., *Very fine structures in scalar mixing*, J. Fluid Mech., **531**, 113–122 (2005).
- [7] Brethouwer G., Hunt J.C.R., Nieuwstadt F.T.M., *Micro-structure and Lagrangian statistics of the scalar field with a mean gradient in isotropic turbulence*, J. Fluid Mech., **474**, 193–225 (2003).
- [8] Marati N., Casciola C.M., Piva R., *Energy cascade in wall turbulence*, J. Fluid Mech., **521**, 191-215 (2004).
- [9] Shraiman B.I., Siggia E.D., *Scalar turbulence*, Nature, **405**, 639-646 (2000).
- [10] Warhaft Z., *Passive Scalars in Turbulent Flows*, Annu. Rev. Fluid Mech., **32**, 203–240 (2000).
- [11] Sreenivasan K.R., Antonia R.A., *The Phenomenology of Small-scale Turbulence*, Annu. Rev. Fluid Mech., **29**, 435-472 (1997).

- [12] Luchini P., Quadrio M., *A low-cost parallel implementation of direct numerical simulation of wall turbulence*, J. Comp. Phys., **211**, 551-571 (2006)
- [13] Johansson A.V., Wikström P.M., *DNS and Modelling of Passive Scalar Transport in Turbulent Channel Flow with a Focus on Scalar Dissipation Rate Modelling*, Flow, Turbulence and Combustion, **63**, 223-245 (1999).
- [14] Kraichnan R.H., *Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar* Phys. Rev. Lett., **72**, 1016 (1994).
- [15] Holzer M., Siggia E.D., *Turbulent mixing of a passive scalar*, Phys. Fluids, **6**, 1820-37 (1994).
- [16] Saddoughi S.G., Veeravalli S.V., *Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number*, J.Fluid.Mech., **268**, 333-372 (1994).
- [17] Kim J., Moin P., Moser R., *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number*, J. Fluid Mech., **177**, 133-166 (1987).
- [18] Wei T., Willmarth W.W., *Reynolds-number effects on the structure of a turbulent channel flow*, J. Fluid Mech., **204**, 57-95 (1989).