

Paolo Luchini, Maurizio Quadrio

## **Aerodinamica**



<b>1</b>	<b>Le leggi del moto dei fluidi</b>	<b>1</b>
1.1	I fluidi: descrizione macroscopica e microscopica . . . . .	1
1.2	Le equazioni di bilancio . . . . .	3
1.2.1	I flussi . . . . .	4
1.3	Fluido in equilibrio termodinamico locale . . . . .	7
1.3.1	Il flusso di massa . . . . .	9
1.3.2	Il flusso di quantità di moto . . . . .	11
1.3.3	Il flusso di energia . . . . .	13
1.4	Fluido in quasi-equilibrio termodinamico . . . . .	14
1.4.1	Il flusso di quantità di moto . . . . .	15
1.4.2	Il flusso di energia (cenni) . . . . .	18
1.5	Le condizioni al contorno . . . . .	19
1.6	Pressione e sforzi . . . . .	20
1.7	L'equazione di bilancio dell'entropia (cenni) . . . . .	22
1.8	L'equazione di bilancio del momento angolare (cenni) . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Forme alternative delle equazioni</b>	<b>23</b>
2.1	Le diverse formulazioni per le equazioni del moto . . . . .	23
2.1.1	Le coordinate lagrangiane . . . . .	24
2.2	Le equazioni di Eulero . . . . .	25
2.2.1	L'equazione di continuità . . . . .	26
2.2.2	XXX L'equazione di bilancio della quantità di moto . . . . .	26
2.2.3	XXX L'equazione di bilancio dell'energia . . . . .	27
2.3	Casi semplificati . . . . .	29
2.3.1	Il caso incomprimibile . . . . .	29
2.3.2	XXX Il caso comprimibile isoentropico . . . . .	29
2.3.3	La forma di Crocco dell'equazione per la quantità di moto . . . . .	30
2.4	Le diverse forme del teorema di Bernoulli . . . . .	31
2.5	Le equazioni di Navier–Stokes . . . . .	32
2.5.1	Il caso incomprimibile . . . . .	32
2.6	La forza di gravità . . . . .	33
2.7	La forma adimensionale delle equazioni . . . . .	34

<b>3</b>	<b>La dinamica della vorticità</b>	<b>35</b>
3.1	L'equazione per la vorticità . . . . .	35
3.1.1	Il caso incomprimibile . . . . .	36
3.1.2	Il caso comprimibile e isoentropico . . . . .	39
3.2	L'equazione di continuità in coordinate lagrangiane . . . . .	40
3.3	Proprietà integrali della vorticità . . . . .	41
3.3.1	Il teorema di Kelvin . . . . .	42
3.3.2	I teoremi di Helmholtz . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Moto irrotazionale ed equazione di Laplace</b>	<b>47</b>
4.1	Flusso irrotazionale e solenoidale . . . . .	48
4.1.1	Il potenziale cinetico . . . . .	48
4.1.2	La funzione di corrente . . . . .	49
4.2	Regioni semplicemente connesse . . . . .	50
4.2.1	Condizioni di unicità per $\nabla\varphi$ . . . . .	50
4.3	Regioni biconnesse . . . . .	52
4.3.1	Condizioni di unicità per $\nabla\varphi$ . . . . .	53
4.4	Corpi tozzi e corpi aerodinamici . . . . .	55
4.4.1	Avvio impulsivo di un profilo . . . . .	56
4.5	Condizioni al contorno per l'equazione di Laplace . . . . .	56
4.5.1	La scia . . . . .	56
4.6	La forza aerodinamica . . . . .	59
4.6.1	Il paradosso di D'Alembert . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Metodi risolutivi per l'equazione di Laplace</b>	<b>65</b>
5.1	Variabili separabili: coordinate cartesiane . . . . .	66
5.1.1	Semipiano: condizioni di Dirichlet . . . . .	67
5.1.2	Semipiano: condizioni di Neumann . . . . .	68
5.2	Variabili separabili: coordinate polari . . . . .	68
5.2.1	Cerchio: condizioni di Dirichlet . . . . .	70
5.2.2	Cerchio: condizioni di Neumann . . . . .	71
5.2.3	Spicchio infinito: condizioni di Dirichlet . . . . .	72
5.3	Sovrapposizione di correnti elementari . . . . .	73
5.3.1	Applicazione: cilindro indefinito . . . . .	76
5.3.2	Applicazione: cilindro indefinito con circolazione . . . . .	79
5.4	Principio delle immagini . . . . .	80
5.4.1	Applicazione: cilindro indefinito . . . . .	82
5.5	Metodo della funzione di Green . . . . .	82
5.5.1	Funzione di Green di spazio libero . . . . .	84
5.5.2	Applicazione: cilindro indefinito . . . . .	86
5.5.3	Andamento del potenziale all'infinito: caso 2d . . . . .	87
5.5.4	Andamento del potenziale all'infinito: caso 3d . . . . .	90
5.5.5	Altre conseguenze della formula di Green . . . . .	90
5.6	Soluzioni numeriche con la formula di Green . . . . .	91
5.6.1	L'infinito nel problema esterno . . . . .	92
5.6.2	Scia dietro ad un corpo portante . . . . .	93

5.6.3	Sovrapposizione di singolarità virtuali . . . . .	94
5.7	Metodi inversi (metodo di Hess & Smith) . . . . .	96
5.8	Metodi diretti (metodo di Morino) . . . . .	99
<b>6</b>	<b>L'equazione di Laplace e le variabili complesse</b>	<b>105</b>
6.1	Potenziale complesso . . . . .	106
6.1.1	Potenziale complesso delle correnti elementari . . . . .	107
6.1.2	Principio delle immagini . . . . .	109
6.2	Trasformazioni conformi . . . . .	109
6.2.1	Significato geometrico delle trasformazioni conformi . . . . .	110
6.2.2	XXX Trasformazione del contorno e della soluzione . . . . .	111
6.2.3	Non unicità delle trasformazioni conformi . . . . .	112
6.3	Alcune semplici trasformazioni . . . . .	113
6.3.1	Applicazione: corrente sullo spigolo . . . . .	115
6.3.2	Applicazione: corrente che investe una parete . . . . .	116
6.4	Formula di Schwarz per il cerchio . . . . .	117
6.5	Corrente traslocircolatoria intorno al cerchio . . . . .	120
6.6	Condizione di Kutta . . . . .	122
6.7	Lastra piana ad incidenza . . . . .	124
6.7.1	La portanza . . . . .	126
6.8	Formule di Blasius per le azioni aerodinamiche . . . . .	127
6.8.1	Forza aerodinamica . . . . .	128
6.8.2	Momento aerodinamico . . . . .	130
6.9	Forza aerodinamica su un profilo . . . . .	131
6.10	Momento aerodinamico su un profilo . . . . .	134
6.10.1	Centro aerodinamico . . . . .	135
6.11	Trasformazione di Schwarz–Christoffel . . . . .	136
6.12	Profili di Joukowski . . . . .	139
6.13	Profili di Karman–Trefftz . . . . .	142
6.14	Algoritmo di Theodorsen per i profili alari . . . . .	144
6.15	Teoria delle <i>free streamlines</i> . . . . .	147
<b>7</b>	<b>I profili sottili</b>	<b>151</b>
7.1	Impostazione . . . . .	152
7.1.1	Linearizzazione . . . . .	153
7.1.2	Problemi ai diversi ordini in $\epsilon$ . . . . .	154
7.2	Soluzione con la variabile complessa . . . . .	156
7.3	Azioni aerodinamiche . . . . .	159
7.4	Formule di Hilbert . . . . .	162
7.5	Formule di Hilbert sull'asse reale . . . . .	164
7.6	Soluzione per lo spessore . . . . .	166
7.7	Soluzione per la linea media . . . . .	167
7.7.1	Metodo di Hilbert per condizioni miste . . . . .	167
7.7.2	Metodo di Hilbert applicato al profilo . . . . .	168
7.8	Problema inverso . . . . .	170
7.9	Lastra piana . . . . .	172

7.9.1	Incidenza e linea media . . . . .	173
7.10	Portanza di un profilo sottile . . . . .	174
7.10.1	Contributo dell'incidenza . . . . .	175
7.10.2	Contributo della linea media . . . . .	176
7.10.3	Angolo di portanza nulla . . . . .	177
7.11	Momento di un profilo sottile . . . . .	178
7.11.1	Contributo dell'incidenza . . . . .	178
7.11.2	Contributo della linea media . . . . .	179
7.12	Angolo di Theodorsen . . . . .	180
<b>8</b>	<b>Ala di apertura finita</b>	<b>183</b>
8.1	Importanza degli effetti di estremità . . . . .	184
8.2	Equazione di Laplace in tre dimensioni . . . . .	186
8.3	Forza aerodinamica . . . . .	187
8.3.1	Componenti cartesiane della forza . . . . .	190
8.4	Approssimazione di elevato allungamento . . . . .	192
8.4.1	Riduzione a due problemi bidimensionali . . . . .	193
8.4.2	Piano di Trefftz . . . . .	193
8.4.3	Forza aerodinamica nel piano di Trefftz . . . . .	195
8.5	Soluzione nel piano di Trefftz . . . . .	196
8.5.1	Formule di Hilbert . . . . .	197
8.5.2	Trasformazioni conformi . . . . .	198
8.5.3	Portanza e resistenza indotta . . . . .	202
8.6	Resistenza minima . . . . .	203
8.6.1	Alternativa: un procedimento variazionale . . . . .	206
8.6.2	Ala ellittica e ala generica . . . . .	207
8.6.3	Effetti dell'allungamento . . . . .	208
8.7	Velocità indotta ed equazione di Prandtl . . . . .	210
8.8	Comportamento della scia lontana . . . . .	213
<b>9</b>	<b>Flussi comprimibili</b>	<b>217</b>
9.1	Comprimibilità di un fluido . . . . .	217
9.2	Termodinamica e potenziali termodinamici . . . . .	219
9.2.1	Gas perfetto . . . . .	220
9.3	Equazioni del moto . . . . .	222
9.3.1	Teorema di Crocco . . . . .	223
9.4	Teorema di Bernoulli . . . . .	224
9.4.1	Velocità limite e critica; grandezze di ristagno . . . . .	225
9.4.2	Il limite incomprimibile . . . . .	227
9.5	Moto irrotazionale . . . . .	228
9.6	Teoria delle caratteristiche . . . . .	230

<b>10</b>	<b>Flussi supersonici</b>	<b>235</b>
10.1	XXX Moto subsonico e supersonico . . . . .	235
10.1.1	XXX Due famiglie di linee caratteristiche . . . . .	235
10.1.2	Le condizioni di compatibilità . . . . .	237
10.1.3	Metodo delle caratteristiche e dominio di dipendenza . . .	238
10.1.4	Il diagramma di Busemann . . . . .	240
10.2	Espansione di Prandtl-Meyer . . . . .	242
10.2.1	Le compressioni . . . . .	244
10.3	Onde d'urto normali . . . . .	245
10.3.1	Gli urti realizzabili . . . . .	247
10.3.2	Calcolo di un urto normale . . . . .	249
10.4	Urto obliquo: il caso dello spigolo . . . . .	250
10.4.1	La polare dell'urto . . . . .	251
10.4.2	L'angolo limite . . . . .	253
<b>11</b>	<b>Profili sottili in regime comprimibile</b>	<b>255</b>
11.1	L'equazione del potenziale linearizzata . . . . .	255
11.2	Profili sottili in regime subsonico . . . . .	258
11.2.1	Il caso tridimensionale . . . . .	261
11.3	L'equazione linearizzata in regime supersonico . . . . .	262
11.3.1	Le rette caratteristiche . . . . .	262
11.3.2	Metodo delle caratteristiche e dominio di dipendenza. . .	264
11.4	Profili sottili in regime supersonico . . . . .	265
11.4.1	Profili di minima resistenza . . . . .	268
11.4.2	Cenni al caso tridimensionale: la regola delle aree . . . .	272
11.5	Il regime transonico . . . . .	273
11.5.1	L'equazione per il potenziale transonico . . . . .	275
11.5.2	La similitudine transonica . . . . .	277
<b>12</b>	<b>Strato limite laminare</b>	<b>283</b>
12.1	Concetto di strato limite . . . . .	284
12.2	Gli sviluppi interno ed esterno . . . . .	285
12.2.1	Lo sviluppo esterno . . . . .	285
12.2.2	Lo sviluppo interno . . . . .	287
12.2.3	Le condizioni all'interfaccia . . . . .	289
12.2.4	Risoluzione in sequenza . . . . .	290
12.2.5	Strato limite all'ordine zero . . . . .	291
12.3	Il caso temporale (lineare) . . . . .	292
12.3.1	Soluzione per separazione delle variabili . . . . .	293
12.3.2	Soluzioni simili: il primo problema di Stokes . . . . .	296
12.3.3	Soluzione con la funzione di Green: dominio di dipendenza	299
12.4	Il caso stazionario (non lineare) . . . . .	302
12.4.1	Le equazioni con la funzione di corrente . . . . .	302
12.4.2	Le equazioni nella forma di von Mises . . . . .	302
12.5	Le soluzioni simili di Falkner-Skan . . . . .	304
12.5.1	La resistenza di attrito di una lastra piana . . . . .	310

12.5.2	Lo spessore di spostamento . . . . .	311
12.6	Soluzioni simili per strati limite liberi . . . . .	313
12.6.1	Il getto bidimensionale . . . . .	314
12.6.2	Lo strato di mescolamento . . . . .	317
12.6.3	La scia . . . . .	318
12.7	La resistenza dovuta alla viscosità . . . . .	319
12.7.1	L'equazione integrale di von Kàrmàn . . . . .	321
12.8	Soluzioni approssimate per lo strato limite . . . . .	324
12.8.1	Il metodo di Polhausen . . . . .	324
12.8.2	Il metodo di Thwaites . . . . .	326
12.9	Calcolo della separazione: Stratford . . . . .	327
<b>13</b>	<b>Instabilità e turbolenza</b>	<b>331</b>
13.1	La stabilità di un sistema dinamico (richiami) . . . . .	332
13.2	Sistemi dinamici lineari e stazionari . . . . .	333
13.2.1	La condizione di stabilità . . . . .	335
13.3	Qualche esempio fluidodinamico . . . . .	336
13.3.1	Il verso del tempo nell'equazione del calore . . . . .	336
13.3.2	Potenziale comprimibile linearizzato . . . . .	337
13.4	Sistemi dinamici non lineari . . . . .	338
13.4.1	Stabilità degli stati di equilibrio . . . . .	339
13.4.2	Sistemi dipendenti da un parametro . . . . .	340
13.4.3	Cenni sull'evoluzione verso il caos . . . . .	341
13.5	Stabilità dei flussi piani e paralleli . . . . .	343
13.5.1	L'equazione di Orr-Sommerfeld . . . . .	345
13.5.2	L'equazione di Rayleigh . . . . .	347
13.5.3	Stabilità del flusso di Poiseuille . . . . .	348
13.6	Transizione (cenni) . . . . .	350
13.7	La turbolenza . . . . .	352
13.7.1	Equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds . . . . .	353
13.8	Flusso turbolento in condotti . . . . .	355
13.8.1	Leggi di resistenza dei condotti . . . . .	358
13.8.2	Il profilo di velocità media . . . . .	360
13.8.3	La legge universale della parete . . . . .	362
<b>A</b>	<b>Funzioni di variabile complessa</b>	<b>365</b>
A.1	Richiami di Algebra dei numeri complessi. . . . .	365
A.2	Le funzioni analitiche . . . . .	367
A.3	XXX Alcune funzioni analitiche . . . . .	368
A.4	Calcolo integrale . . . . .	369
A.4.1	Il teorema di Cauchy . . . . .	370
A.5	Regioni biconnesse . . . . .	371
A.6	La formula integrale di Cauchy . . . . .	373
A.7	Le serie di Taylor e di Laurent . . . . .	375
A.8	Il teorema dei residui . . . . .	377



---

<b>B</b>	<b>Vettori e tensori</b>	<b>379</b>
B.1	I vettori . . . . .	379
B.1.1	Le matrici di rotazione . . . . .	379
B.1.2	Operazioni invarianti fra vettori . . . . .	381
B.2	I tensori . . . . .	382
B.2.1	Operazioni invarianti fra vettori e tensori . . . . .	383
B.3	L'operatore $\nabla$ . . . . .	385
B.4	Il teorema di Gauss (o della divergenza) . . . . .	386



# Introduzione

---

L'Aerodinamica studia il moto relativo fra un fluido ed un corpo solido, e si pone come obiettivo ultimo quello di determinare le forze e le coppie, cioè le azioni aerodinamiche che agiscono sul corpo per effetto di tale moto. La conoscenza delle azioni aerodinamiche, che sono fondamentali per poter sostenere un velivolo contro l'azione della forza di gravità, è essenziale per l'intero progetto del velivolo stesso.

Ne segue che lo studio aerodinamico riguarda principalmente le correnti esterne, quelle cioè in cui un corpo solido è immerso in un fluido indefinitamente esteso. In questo volume capiterà comunque di incontrare anche qualche tipo di corrente interna (per esempio flussi in condotti).

Il mezzo entro cui avviene il moto del corpo solido viene schematizzato come un fluido continuo e di estensione infinita. All'infinito (cioè in pratica sufficientemente lontano dal corpo) esiste un vettore che caratterizza la velocità asintotica, indicato con  $\mathbf{V}_\infty$ , e che non è influenzato dalla presenza del corpo stesso. La forza aerodinamica  $\mathbf{F}_a$  dovuta al moto relativo fra fluido e corpo può allora essere proiettata, rispetto alla direzione individuata dal vettore  $\mathbf{V}_\infty$ , in una componente ortogonale, la *portanza*  $L$  (dal termine inglese *Lift*), ed in una componente parallela, la *resistenza*  $D$  (dal termine inglese *Drag*).

Tra tutti i corpi possibili, l'interesse è concentrato sui cosiddetti corpi *aerodinamici*, che costituiscono i casi di maggior interesse pratico in Aeronautica. Per una fortunata circostanza, questi oggetti sono anche i più semplici da trattare, in quanto producono una scia molto sottile: la schematizzazione dell'intero campo di moto può allora fare a meno di considerare gli effetti della turbolenza, e considerare infinitesimo lo spessore della scia, trattandola analiticamente come una singolarità.

## L'ipotesi di flusso incomprimibile

Il problema aerodinamico si semplifica notevolmente quando gli effetti della comprimibilità del fluido sono trascurabili.

Se è noto lo stato termodinamico del fluido, ovvero conosciuto il valore di due qualsiasi fra le variabili di stato termodinamico (per esempio la pressione  $p_\infty$  e la densità  $\rho_\infty$ ), è possibile calcolare a partire da esse la variabile di stato termodinamico  $a_\infty = a_\infty(p_\infty, \rho_\infty)$ , che è la velocità con cui il suono si propaga entro il fluido. Il confronto fra  $V_\infty$  ed  $a_\infty$ , che viene tradizionalmente espresso attraverso il numero adimensionale noto come numero di Mach:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$$

permette di stabilire se siano importanti, e vadano quindi tenuti in conto, gli effetti dovuti alla comprimibilità del fluido. Quando il valore di  $M_\infty$  è ridotto, la pressione assoluta non ha un vero ruolo e può essere eliminata dalle equazioni del moto. Le azioni dinamiche sul corpo vengono dunque in questo caso a dipendere solo da  $\rho_\infty$  e  $V_\infty$ , oltre che, naturalmente, dalle dimensioni e dalla forma del corpo stesso. L'equazione di stato si riduce alla semplice affermazione che la densità  $\rho$  è costante. Come avremo modo di vedere con maggior dettaglio nel seguito, l'errore che si commette trascurando la comprimibilità del fluido è proporzionale al quadrato di  $M_\infty$ : di norma questo errore è ritenuto accettabile quando  $M_\infty < 0.3$ .

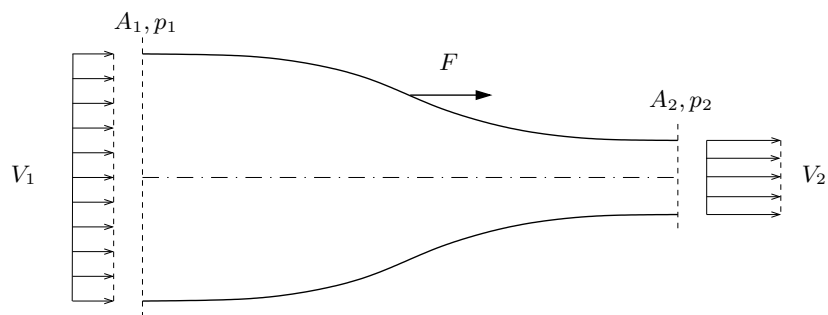
### L'ipotesi di flusso non viscoso

Anche la viscosità  $\mu_\infty = \mu_\infty(p_\infty, \rho_\infty)$  è, come vedremo in seguito, una proprietà dello stato termodinamico del fluido, e la considerazione degli effetti viscosi risulta fondamentale per stimare la resistenza aerodinamica. Per sapere se occorre tenere in conto le proprietà viscosi del fluido ci si riferisce ad un altro numero adimensionale, il numero di Reynolds:

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}$$

La trascurabilità o meno degli effetti viscosi è però una questione più delicata rispetto a quella degli effetti della comprimibilità, e non è sempre sufficiente che il numero di Reynolds sia grande.

### Il calcolo delle azioni aerodinamiche



**Figura 1** Calcolo delle azioni aerodinamiche in un semplice caso monodimensionale: teorema di Bernoulli e flusso di quantità di moto.

Nonostante la maggiore complessità delle applicazioni che saranno descritte nel seguito di questo volume, il procedimento fondamentale che permette di giungere al calcolo della forza aerodinamica è molto semplice, e la sua struttura è quella che ora illustriamo con un semplicissimo esempio.

Supponiamo, con riferimento alla figura 1, di voler calcolare la forza esercitata su un condotto convergente, di cui conosciamo la geometria e la velocità all'ingresso. Ipotizziamo per la massima semplicità di avere un profilo di velocità uniforme sia all'ingresso che all'uscita del condotto, e di essere in regime incomprimibile. La velocità  $V_2$  all'uscita è facilmente calcolabile da un bilancio di portata, ed è proporzionale alla velocità  $V_1$  all'ingresso attraverso un coefficiente  $A_1/A_2$  che è il rapporto fra le sezioni di ingresso e uscita:

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Applicando il teorema di Bernoulli nella forma:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + p = \text{cost},$$

la pressione  $p_2$  nella sezione di uscita del condotto è data da:

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right).$$

La forza risultante  $\mathbf{F}$  che agisce sul condotto ha direzione orizzontale per motivi di simmetria. Il suo modulo si ricava da un bilancio integrale di quantità di moto, che è possibile se la pressione  $p_2$  è già stata calcolata. Scrivendo il flusso di quantità di moto nella direzione dell'asse del condotto, si ha:

$$A_1 (\rho V_1^2 + p_1) = A_2 (\rho V_2^2 + p_2) + F.$$

Questo modo di procedere è molto generale, e se ne farà ampio uso nel seguito. Dopo il calcolo del campo cinetico, il teorema di Bernoulli nella formulazione opportuna permette di risalire alla pressione; grazie alla conoscenza della pressione e al bilancio di quantità di moto si risale infine alle azioni aerodinamiche.

## Struttura del volume

Questo volume è diviso in tre parti. La prima e più ampia parte è dedicata allo studio del moto dei fluidi non viscosi ed incomprimibili. Naturalmente nessun fluido reale presenta queste caratteristiche, ma il fluido non viscoso ed incomprimibile rappresenta una utile schematizzazione a cui un fluido reale (per esempio l'aria) si avvicina quanto più il numero di Reynolds è grande ed il numero di Mach è piccolo. Numerosi casi significativi ricadono entro questa schematizzazione, che costituisce inoltre la base per successive estensioni. In una seconda parte il fluido

sarà considerato non viscoso ma comprimibile; infine, una terza parte sarà dedicata allo studio dei fluidi viscosi ed incompressibili. I fluidi viscosi e comprimibili non trovano spazio in questo volume.

Nel Capitolo §1 vengono ricavate le leggi del moto dei fluidi, per il caso sia viscoso che non viscoso, mediante un procedimento che sfrutta solamente proprietà di simmetria e invarianza rispetto al sistema di riferimento. Esse vengono poi riassunte e ripresentate nel Capitolo §2.

Nel Capitolo §3 ci si concentra sulla ristretta classe dei fluidi incompressibili, oppure comprimibili in moto isoentropico, e si mostra come il problema di determinare la vorticità è risolubile in forma chiusa se si conosce la velocità. Questo fornisce gli strumenti per valutare la portata dell'ipotesi di irrotazionalità del moto, grazie alla quale il moto del fluido è retto dall'equazione di Laplace, come descritto nel Capitolo 4. Il problema aerodinamico viene così correttamente impostato, grazie all'ipotesi che la scia sia sottile (e che quindi il corpo sia dotato di uno spigolo).

Nel Capitolo §5 si effettua una rassegna dei metodi risolutivi, che sfruttano la linearità dell'equazione di Laplace. Il calcolo delle forze aerodinamiche, nel caso più generale di corpo bidimensionale, ci porta alla conclusione apparentemente paradossale che esiste solamente una componente portante. Il Capitolo §6 introduce una ulteriore, importante classe di metodi risolutivi dell'equazione di Laplace, basata sulle variabili complesse, molto potente ma di uso limitato alle due dimensioni. Trasformazioni conformi e calcolo delle forze aerodinamiche mediante le formule di Blasius ne costituiscono le principali applicazioni. Lo studio dei profili sottili, che conduce ad un problema lineare anche nella geometria del profilo, viene affrontato nel Capitolo §7, facendo ulteriore uso delle variabili complesse. Il problema alare tridimensionale, e l'insorgere della relativa componente resistiva della forza aerodinamica, si trattano nel Capitolo §8.

Il Capitolo §9 affronta invece lo studio di fluidi non viscosi ma comprimibili, esaminando sia nel caso subsonico sia nel caso supersonico quali siano le equazioni del moto e le loro tecniche risolutive, e la teoria dei profili alari. Viene inoltre descritta l'impostazione del problema transonico. Il Capitolo §11 lo complementa aggiungendo le semplificazioni permesse dall'ipotesi di profilo sottile.

Il Capitolo §12 affronta infine, nell'ipotesi di incompressibilità, il fenomeno dello strato limite, fornendo una derivazione accurata delle equazioni, loro soluzioni nei casi lineare e non lineare, e cenni ai metodi approssimati per il calcolo dello strato limite e del punto di separazione. Nel Capitolo §13 vengono infine trattate sinteticamente le problematiche relative all'instabilità fluidodinamica e alla descrizione dei flussi turbolenti.

Nelle due Appendici trovano posto un breve richiamo di teoria delle funzioni di variabile complessa e qualche cenno di calcolo tensoriale.

Il materiale contenuto in queste pagine è in continua evoluzione e miglioramento. Può essere reperito presso la Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria

Aerospaziale del Politecnico di Milano; una versione postscript ed una versione PDF si possono ottenere consultando il sito Internet

<http://www.aero.polimi.it/~quadrio>

dove potranno essere presenti anche ulteriori aggiornamenti ed *errata corrige*. L'indirizzo di posta elettronica [maurizio.quadrio@polimi.it](mailto:maurizio.quadrio@polimi.it) va usato per segnalare errori o proporre miglioramenti.