
La studio della stabilità di un sistema fluidodinamico rappresenta un problema tanto complesso quanto importante dal punto di vista applicativo. Nella prima parte del Capitolo richiamiamo i concetti generali dello studio di stabilità di un sistema dinamico, con particolare attenzione ai sistemi stazionari e lineari, illustrando poi qualche esempio fluidodinamico. In seguito, oltre a brevi cenni alla transizione dal regime laminare al regime turbolento, esaminiamo qualche semplice risultato relativo al flusso turbolento in condotti.

Indice del capitolo

13.1	La stabilità di un sistema dinamico (richiami)	332
13.2	Sistemi dinamici lineari e stazionari	333
13.2.1	La condizione di stabilità	335
13.3	Qualche esempio fluidodinamico	336
13.3.1	Il verso del tempo nell'equazione del calore	336
13.3.2	Potenziale comprimibile linearizzato	337
13.4	Sistemi dinamici non lineari	338
13.4.1	Stabilità degli stati di equilibrio	339
13.4.2	Sistemi dipendenti da un parametro	340
13.4.3	Cenni sull'evoluzione verso il caos	341
13.5	Stabilità dei flussi piani e paralleli	343
13.5.1	L'equazione di Orr-Sommerfeld	345
13.5.2	L'equazione di Rayleigh	347
13.5.3	Stabilità del flusso di Poiseuille	348
13.6	Transizione (cenni)	350
13.7	La turbolenza	352
13.7.1	Equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds	353
13.8	Flusso turbolento in condotti	355
13.8.1	Leggi di resistenza dei condotti	358
13.8.2	Il profilo di velocità media	360

13.1 La stabilità di un sistema dinamico (richiami)

La stabilità fluidodinamica si discute sulla base dei concetti propri della stabilità di un sistema dinamico, che richiamiamo brevemente in questo paragrafo.

Un sistema dinamico è un sistema fisico di cui siano individuate le interazioni con il mondo esterno, dette ingressi ed uscite, e di cui si voglia studiare e rappresentare la dinamica, cioè l'evoluzione nel tempo a partire da una data situazione iniziale. Naturalmente occorre costruire un modello matematico che rappresenti il particolare sistema fisico. Lo stato del sistema si definisce come l'insieme delle informazioni che, note ad un certo istante di tempo, sono sufficienti a determinare l'evoluzione del sistema negli istanti successivi. Lo stato viene solitamente descritto da un vettore \mathbf{x} , detto vettore di stato, che contiene N parametri reali. Esistono anche casi in cui il numero di stati possibili è finito, oppure all'altro estremo sistemi in cui lo stato appartiene ad uno spazio vettoriale di dimensione infinita. In quest'ultima categoria ricadono tutti i problemi retti dalle equazioni di Navier–Stokes, in quanto equazioni a derivate parziali. Iniziamo comunque a considerare solamente sistemi caratterizzati da spazi di stato a dimensione finita, in cui le variabili di stato si rappresentano attraverso un vettore di stato \mathbf{x} di dimensione N .

Sistemi a tempo discreto e a tempo continuo Anche il modello matematico con cui calcoliamo la dinamica del sistema può essere di due tipi: a tempo discreto e a tempo continuo.

Per un sistema dinamico a tempo discreto l'evoluzione è descritta da una relazione del tipo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{i}_n, n) \quad (13.1)$$

che si chiama appunto equazione di evoluzione. Essa mostra come lo stato \mathbf{x}_{n+1} al livello temporale $n+1$ dipenda, attraverso una funzione vettoriale \mathbf{f} che per ora consideriamo generica, dallo stato \mathbf{x}_n al tempo n precedente, dal vettore \mathbf{i}_n degli ingressi al tempo n (il vettore \mathbf{i}_n in generale ha una dimensione M diversa dalla dimensione N del vettore degli stati) ed anche dal livello temporale n stesso.

Per un sistema dinamico a tempo continuo invece l'evoluzione è continua nella variabile reale t (il tempo come comunemente lo intendiamo), ed è quindi descritta da:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{i}(t), t) \quad (13.2)$$

Le equazioni di evoluzione si possono risolvere se, oltre agli ingressi, è noto lo stato iniziale del sistema, cioè si conosce \mathbf{x}_0 oppure $\mathbf{x}(0)$.

Sistemi lineari e stazionari Una semplificazione consiste nel considerare solo sistemi dinamici lineari e stazionari, per i quali cioè le funzioni $f(\mathbf{x}_n, \mathbf{i}_n)$ e $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{i}(t))$ sono lineari e non dipendono dal tempo. In questo caso particolare l'equazione di evoluzione (13.1) di un sistema a tempo discreto diviene:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}_n \quad (13.3)$$

mentre quella (13.2) di un sistema a tempo continuo diventa:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}(t) \quad (13.4)$$

In queste equazioni, \mathbf{A} e \mathbf{B} sono due matrici di coefficienti A_{ij} e B_{ij} (che non dipendono dall'indice n o dal tempo), e di dimensioni rispettivamente N, N e N, M .

Stabilità rispetto alle condizioni iniziali e agli ingressi Dopo aver determinato l'evoluzione di un sistema dinamico, cioè la soluzione dell'equazione di evoluzione per un dato ingresso ed una data condizione iniziale, ci chiediamo quale risulterebbe la soluzione corrispondente a ingressi poco diversi oppure a condizioni iniziali poco diverse. Ci poniamo cioè il problema della stabilità rispetto agli ingressi e rispetto alle condizioni iniziali.

Dopo aver definito una norma di tipo opportuno, che consenta di quantificare la differenza fra due stati del sistema misurandone una distanza, definiamo un sistema dinamico *stabile* se la differenza fra la soluzione base e quella perturbata, per qualsiasi perturbazione della condizione iniziale o degli ingressi, resta limitata al tendere del tempo all'infinito. In caso contrario parliamo di sistema *instabile*. Distinguiamo poi i sistemi stabili fra sistemi *asintoticamente stabili* se la differenza fra le due soluzioni tende a zero al tendere del tempo all'infinito, e *marginalmente stabili* in caso contrario.

13.2 Sistemi dinamici lineari e stazionari

I sistemi dinamici *lineari* presentano una fondamentale differenza rispetto a quelli non lineari: le caratteristiche di stabilità di un sistema lineare non dipendono dalla particolare soluzione base che si considera. Infatti, se $\mathbf{x}(t)$ è l'evoluzione del sistema (per esempio a tempo continuo) corrispondente a certe condizioni iniziali ed ingressi, ed $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ è l'evoluzione che corrisponde a condizioni iniziali e/o ingressi perturbati, allora per la linearità $\delta\mathbf{x}(t)$ è l'evoluzione che segue all'applicazione della sola perturbazione. Per comprendere se una generica soluzione sia stabile o instabile, possiamo allora studiare la stabilità della soluzione nulla, cioè quella ottenuta per ingressi nulli e con condizioni iniziali nulle.

Per un sistema lineare studieremo solo il problema della stabilità rispetto alle condizioni iniziali (anche perché generalmente la stabilità rispetto agli ingressi è conseguenza di quella rispetto alle condizioni iniziali). Basterà quindi capire se

le soluzioni delle equazioni di evoluzione (13.3) e (13.4) con condizioni iniziali diverse da zero ed ingresso nullo tendono o meno a zero quando $n \rightarrow \infty$ oppure $t \rightarrow \infty$.

La stabilità o instabilità di un sistema dinamico lineare e stazionario si accerta unicamente sulla base di caratteristiche della matrice \mathbf{A} che compare nelle equazioni di evoluzione (13.3) e (13.4).

È immediato per un sistema a tempo discreto scrivere lo stato \mathbf{x}_n in funzione dello stato iniziale \mathbf{x}_0 come:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \quad (13.5)$$

in cui il simbolo \mathbf{A}^n indica il prodotto righe per colonne fra la matrice \mathbf{A} e se stessa, ripetuto n volte.

Per un sistema continuo si arriva a scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad (13.6)$$

dove il simbolo $e^{\mathbf{A}t}$ ha il significato di esponenziale della matrice $\mathbf{A}t$, e si definisce considerando un opportuno sviluppo in serie di potenze della matrice \mathbf{A} , formalmente analogo alla serie che esprime l'esponenziale di un numero reale:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^m}{m!}$$

Autovalori ed autovettori Sia la potenza della matrice che compare nella (13.5), sia l'esponenziale della matrice che compare nella (13.6) si scrivono poi in termini di autovalori ed autovettori della matrice stessa. Diciamo λ_k gli autovalori della matrice \mathbf{A} , cioè le N soluzioni, reali o complesse, dell'equazione di grado N :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) = 0$$

Diciamo inoltre autovettori destri \mathbf{u}_k le soluzioni non nulle, e definite a meno di una costante arbitraria, del sistema di equazioni lineari:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$$

ed autovettori sinistri \mathbf{v}_k le soluzioni del sistema:

$$\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{v}_k$$

(Ricordiamo che gli autovettori destri di una matrice sono gli autovettori sinistri della sua trasposta, e che quindi per una matrice simmetrica gli autovettori destri e sinistri coincidono.)

Fra autovettori destri e sinistri vale l'importante condizione di ortogonalità:

$$\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad \text{per } \lambda_h \neq \lambda_k$$

Le costanti arbitrarie insite nella definizione di autovettore si scelgono poi in modo che sia:

$$\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_k = \delta_{hk} \quad (13.7)$$

La condizione di ortogonalità permette la rappresentazione di una matrice qualsiasi come somma di prodotti fra i suoi autovalori ed autovettori (purché gli autovettori siano linearmente indipendenti):

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k$$

Occorre adesso vedere come si esprime la potenza n -sima della matrice \mathbf{A} . Iniziamo a scrivere il quadrato della matrice:

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{h=1}^N \lambda_h \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k$$

Sfruttando la proprietà (13.7), questa relazione diventa:

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{h,k=1}^N \lambda_h \lambda_k \mathbf{u}_h \delta_{hk} \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k$$

Estendendo alla potenza n -sima il ragionamento ora svolto, si ottiene per \mathbf{A}^n l'espressione:

$$\mathbf{A}^n = \sum_{k=1}^N \lambda_k^n \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k \quad (13.8)$$

La stessa proprietà vale anche per combinazioni lineari di potenze intere di \mathbf{A} , e quindi anche per l'esponenziale di \mathbf{A} , che è stato definito sulla base di una serie di potenze. Quindi:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=1}^N e^{\lambda_k t} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k \quad (13.9)$$

13.2.1 La condizione di stabilità

Confrontando la formula (13.8) per la potenza n -sima della matrice \mathbf{A} con la (13.5) che fornisce lo stato \mathbf{x}_n di un sistema lineare a tempo discreto a partire dallo stato iniziale, si vede che lo stato \mathbf{x}_n si esprime come la somma di N termini, ciascuno dei quali è proporzionale a λ_k^n . La potenza λ_k^n cresce o decresce al crescere di n a seconda che il modulo di λ_k (che è un numero complesso) sia maggiore o minore di uno. Inoltre il comportamento asintotico della soluzione sarà determinato da quello dei suoi termini che cresce più in fretta.

Si ottiene quindi la seguente condizione di stabilità: un sistema dinamico a tempo discreto, lineare e stazionario, con matrice di evoluzione \mathbf{A} dotata di N autovalori distinti è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori di \mathbf{A} hanno modulo minore di uno; è marginalmente stabile se uno o più autovalori di \mathbf{A} hanno modulo uguale ad uno; è instabile se almeno un autovalore ha modulo maggiore di uno.

Analogamente, confrontando la formula (13.9) per l'esponenziale di una matrice con la (13.6) che fornisce lo stato $\mathbf{x}(t)$ di un sistema lineare a tempo continuo a partire dallo stato iniziale, si vede che lo stato $\mathbf{x}(t)$ si esprime come la somma di N termini, ognuno dei quali è proporzionale a $e^{\lambda_k t}$. L'esponenziale $e^{\lambda_k t}$ cresce o decresce al crescere di t a seconda che la parte reale di λ_k (si ricordi che λ_k è un numero complesso) sia maggiore o minore di zero.

Si ottiene quindi la seguente condizione di stabilità: un sistema dinamico a tempo continuo, lineare e stazionario, con matrice di evoluzione \mathbf{A} dotata di N autovalori distinti è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori di \mathbf{A} hanno parte reale minore di zero; è marginalmente stabile se uno o più autovalori hanno parte reale uguale a zero; è instabile se almeno un autovalore ha parte reale maggiore di zero.

13.3 Qualche esempio fluidodinamico

Le considerazioni esposte sin qui, relative a sistemi con numero infinito di stati possibili ma dimensione finita dello spazio degli stati, sono valide anche per sistemi dinamici il cui stato è rappresentato con un insieme infinito di parametri, o anche da una o più funzioni di variabili indipendenti continue (per esempio le coordinate spaziali). Una funzione si può vedere come un elemento di uno spazio vettoriale di numero di dimensioni infinito, e per questo motivo si parla di sistemi con vettore di stato a dimensione infinita. Il tipico sistema fluidodinamico, descritto dalle equazioni di Navier–Stokes, è un sistema di questo tipo, il cui stato è rappresentato dai campi di velocità e proprietà termodinamiche in tutto lo spazio ad un dato istante. Ricordiamo però che un sistema di equazioni a derivate parziali si trasforma comunque in un sistema di dimensione finita quando lo si discretizza allo scopo di trovarne una soluzione numerica.

13.3.1 Il verso del tempo nell'equazione del calore

L'equazione del calore o della diffusione, già incontrata nel Capitolo 12 a proposito dello strato limite, è il prototipo dell'equazione parabolica. Scriviamola come:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(t, y) \quad (13.10)$$

e proponiamoci di risolverla avendo assegnata una condizione iniziale $f(0, y) = f_0(y)$ su tutto l'asse y .

L'impostazione del problema di Cauchy non evidenzia alcuna differenza rispetto al segno della variabile indipendente t : risolvere l'equazione a partire dalla data condizione iniziale per $t < 0$, cioè calcolare la storia passata del sistema, non sembra sostanzialmente diverso dal risolvere l'equazione stessa per $t > 0$, cioè calcolare l'evoluzione futura.

Affrontiamo ora il problema dal punto di vista della stabilità. L'equazione (13.10) è l'equazione di evoluzione di un sistema dinamico lineare e stazionario, con un vettore di stato a dimensione infinita (la funzione $f(t, y)$ per ogni y ad ogni dato t). È sufficiente studiare la stabilità della sola soluzione nulla ottenuta quando $g = 0$. Inoltre il problema è anche spazialmente omogeneo (invariante per traslazione spaziale lungo l'asse y). Si può verificare che sostituendo:

$$f(t, y) = e^{\lambda t + i\beta y}$$

con λ e β numeri complessi, nell'equazione (13.10) con $g = 0$, l'equazione è identicamente soddisfatta quando:

$$\lambda = -\beta^2 \quad (13.11)$$

Questa relazione è proprio l'espressione degli autovalori del sistema dinamico rappresentato dall'equazione di evoluzione (13.10).

La condizione iniziale $f_0(y)$ si può trasformare con una trasformata di Fourier in direzione y , e quindi è una combinazione lineare di esponenziali immaginari della forma $e^{i\beta y}$, dove β è un numero reale. Dal momento che per qualsiasi β reale dalla (13.11) risulta che gli autovalori sono sempre reali e negativi, la condizione di stabilità è sempre soddisfatta.

Se vogliamo invece risolvere il problema per $t < 0$, ovvero sostituendo t con $-t$, il medesimo ragionamento ci porta a dire che tutti gli autovalori sono positivi, ed il sistema è instabile. Quindi la soluzione, per esempio numerica, dell'equazione del calore all'indietro, pur essendo permessa dai teoremi di esistenza locale per condizioni iniziali analitiche, è un'operazione instabile i cui risultati non hanno utilità pratica, in quanto piccole variazioni nelle condizioni iniziali darebbero risultati completamente diversi.

13.3.2 Potenziale comprimibile linearizzato

Un semplice caso di equazione iperbolica o ellittica è costituito dall'equazione linearizzata per il potenziale cinetico, discussa in §11.

Il caso supersonico Consideriamo dapprima il caso supersonico, in cui l'equazione è iperbolica:

$$\varphi_{xx} - \frac{1}{M_\infty^2 - 1} \varphi_{yy} = 0 \quad (13.12)$$

Immaginiamo di voler risolvere un problema con condizioni iniziali assegnate sulla retta $x = 0$. Questo permette di scrivere la condizione iniziale, attraverso

la trasformata di Fourier, come una opportuna combinazione lineare di funzioni esponenziali del tipo $e^{i\beta y}$, dove β è un numero reale.

Sfruttando ancora l'omogeneità del problema rispetto alle coordinate x ed y , le soluzioni dell'equazione devono essere del tipo:

$$\varphi(x, y) = e^{\lambda y + i\beta x} \quad (13.13)$$

Sostituendo soluzioni di questa forma nell'equazione, si vede che essa è identicamente soddisfatta quando:

$$\lambda^2 = -\beta^2 (M_\infty^2 - 1)$$

Questa relazione è proprio l'espressione degli autovalori del sistema dinamico rappresentato dall'equazione di evoluzione (13.12).

Essendo $\lambda^2 < 0$, segue che λ è un numero immaginario puro, e le soluzioni (13.13) dell'equazione sono (marginalmente) stabili. Sapevamo infatti che per questa equazione (iperbolica) il problema di Cauchy è ben posto su una linea aperta.

Il caso supersonico Consideriamo invece il caso subsonico, in cui l'equazione diviene:

$$\varphi_{xx} + \frac{1}{1 - M_\infty^2} \varphi_{yy} = 0 \quad (13.14)$$

Ripetendo il medesimo ragionamento, si trova che funzioni del tipo (13.13) sono soluzioni dell'equazione differenziale quando:

$$\lambda^2 = \beta^2 (1 - M_\infty^2)$$

che è l'espressione degli autovalori del sistema dinamico. Essendo $\lambda^2 > 0$, segue che λ è un numero reale, con segno positivo o negativo. Le soluzioni (13.13) dell'equazione sono quindi instabili. Infatti è noto che il problema di Cauchy per un'equazione ellittica come la (13.14) è mal posto, e le condizioni iniziali vanno assegnate su una linea chiusa per ottenere un problema ben posto.

13.4 Sistemi dinamici non lineari

Rispetto ai più semplici sistemi lineari, i sistemi dinamici non lineari presentano la rilevante complicazione che le caratteristiche di stabilità dipendono anche, e spesso in maniera molto marcata, dalla particolare soluzione base considerata. Inoltre mentre la risposta di un sistema lineare è indipendente dall'ampiezza della perturbazione, un sistema non lineare può avere un comportamento diverso a seconda che i disturbi siano piccoli o grandi.

Stabilità locale e globale Per sistemi non lineari introduciamo quindi l'ulteriore concetto di stabilità locale (o per piccoli disturbi), che si ha quando per variazioni sufficientemente piccole delle condizioni iniziali la differenza fra l'evoluzione perturbata e quella non perturbata resta limitata al crescere del tempo. Per contro si ha stabilità globale quando la stabilità si ottiene per qualsiasi condizione iniziale.

La stabilità globale è in generale molto difficile da accertare. Per la maggior parte dei casi di interesse fluidodinamico, ci si accontenta di stabilire la stabilità o instabilità in senso locale. Per ottenere questo scopo esiste uno strumento principale, che consiste nella linearizzazione delle equazioni non lineari che descrivono la dinamica del sistema. È infatti possibile mostrare che, sotto ipotesi non eccessivamente stringenti, la stabilità asintotica del sistema ottenuto per linearizzazione equivale alla stabilità in senso locale ed intorno alla soluzione considerata del sistema non lineare.

13.4.1 Stabilità degli stati di equilibrio

Nonostante la semplificazione di considerare solo lo studio per linearizzazione, anche quando il sistema di partenza è stazionario accade in generale che il sistema linearizzato risulta instazionario, in quanto dipende dal tempo la soluzione base di cui vogliamo studiare la stabilità. Questo impedisce di applicare i metodi discussi nei paragrafi precedenti, che si applicano solo a sistemi lineari e stazionari.

Ci si può naturalmente limitare a studiare la stabilità di soluzioni che non dipendono dal tempo, cioè soluzioni di equilibrio. Imponendo nelle equazioni di evoluzione (13.1) e (13.2) che lo stato del sistema non sia dipendente dal tempo, si ottengono (per ingressi nulli) le equazioni:

$$\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}) = 0 \quad (13.15)$$

per un sistema lineare a tempo discreto, e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}) = 0 \quad (13.16)$$

per un sistema lineare a tempo continuo. Queste equazioni rappresentano sistemi lineari di N equazioni in N incognite, che possono avere nessuna, una o più soluzioni (cioè stati di equilibrio). Inoltre non esistono in generale relazioni fra le proprietà di stabilità di una soluzione di equilibrio e quelle di un altro.

Dopo aver scelto la soluzione di equilibrio \mathbf{x}_{eq} di cui si vuole studiare la stabilità, occorre linearizzare l'equazione di evoluzione in un suo intorno. Ponendo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq} + \delta\mathbf{x}$$

nelle (13.1) e (13.2), si ottiene:

$$\mathbf{x}_{eq} + \delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{eq}) \cdot \delta\mathbf{x}_n$$

e

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{eq}) \cdot \delta\mathbf{x}$$

in cui \mathbf{f}' indica una matrice di componenti $f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$. Grazie alle (13.15) e (13.16), le relazioni ora scritte si semplificano nelle:

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{eq}) \cdot \delta \mathbf{x}_n$$

e

$$\frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{eq}) \cdot \delta \mathbf{x}$$

Il problema della stabilità si riconduce quindi a quello dello studio degli autovalori della matrice $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{eq})$, che non dipende dal tempo. Lo studio può allora essere condotto secondo le tecniche esposte nel paragrafo §13.2.

Sistemi periodici Anche la stabilità locale delle soluzioni periodiche, oltre che quelle di equilibrio, può essere studiata attraverso la teoria dei sistemi lineari e stazionari.

Una soluzione periodica di un sistema dinamico a tempo discreto, di periodo n_0 , è tale che:

$$\mathbf{x}_{n_0} = \mathbf{x}_0$$

Segue subito che deve essere anche $\mathbf{x}_{n_0+1} = \mathbf{x}_1$. Infatti:

$$\mathbf{x}_{n_0+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_0}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1$$

Consideriamo adesso un nuovo sistema dinamico, che chiameremo iterato n_0 volte di quello di partenza, che ha per equazione di evoluzione:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \dots)) \quad n_0 \text{ volte} \quad (13.17)$$

Una soluzione periodica di periodo n_0 del sistema originario è una soluzione periodica di periodo 1, cioè una soluzione di equilibrio, del sistema (13.17). È quindi possibile studiare la stabilità locale di tale soluzione periodica mediante la teoria dei sistemi lineari stazionari applicata al sistema (13.17).

Considerazioni analoghe valgono per soluzioni periodiche con periodo t_0 di un sistema a tempo continuo.

13.4.2 Sistemi dipendenti da un parametro

Molto spesso le equazioni di evoluzione di un sistema dinamico dipendono con continuità da un parametro. Un esempio molto importante e tipico in fluidodinamica è il numero di Reynolds. Risulta interessante in questi casi studiare come tutte le proprietà del sistema, comprese quelle di stabilità, variano al variare del parametro. La situazione più interessante è quella in cui una data soluzione di equilibrio passa da stabile a instabile (o viceversa) al variare del parametro. Per il valore, detto critico, del parametro a cui avviene la transizione da un tipo di comportamento all'altro la soluzione è marginalmente stabile.

Un sistema lineare ha sempre un'unica soluzione di equilibrio, che può essere stabile o instabile a seconda del valore assunto dal parametro. Nel caso stabile

l'evoluzione tende al punto di equilibrio a partire da qualsiasi condizione iniziale, mentre nel caso instabile l'evoluzione diverge sempre.

Per un sistema non lineare, la stabilità o instabilità locale si accerta sulla base degli autovalori della matrice $f'(x_{eq})$, ma i comportamenti possibili al passaggio del parametro attraverso un punto critico sono molto più articolati, dal momento che le soluzioni di equilibrio sono più di una: può avvenire uno scambio di stabilità oppure una biforcazione, per cui nel momento in cui una soluzione diventa instabile un'altra ne prende il suo posto. La teoria delle biforcazioni, che qui non trattiamo, fornisce una classificazione dei diversi comportamenti tipici di un sistema dinamico dipendente da un parametro nell'attraversare un punto critico. A titolo di esempio la figura 13.1 illustra graficamente lo scambio di stabilità, per cui in corrispondenza di un punto critico due stati di equilibrio diversi si sovrappongono, ed un particolare tipo di biforcazione, detta supercritica, in cui prima del punto critico esiste un solo stato di equilibrio stabile, ma dopo il punto critico gli stati di equilibrio sono 3, di cui due stabili.

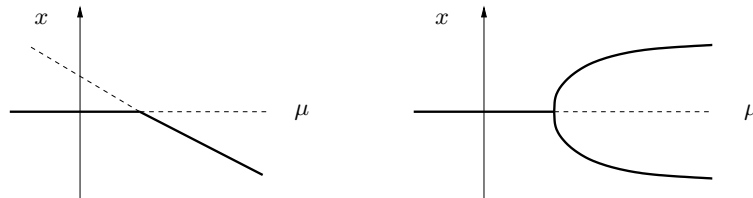


Figura 13.1 Scambio di stabilità fra due soluzioni di equilibrio (a sinistra) e biforcazione supercritica (a destra) al variare del parametro μ .

13.4.3 Cenni sull'evoluzione verso il caos

La teoria delle biforcazioni, secondo cui ogni volta che uno stato diviene instabile un altro stato diventa stabile al suo posto, può apparire come uno strumento adeguato per ottenere un quadro completo del comportamento di un sistema attraverso l'individuazione delle sue biforcazioni. Questo naturalmente presuppone che le biforcazioni presentate da sistemi di interesse pratico siano in numero ragionevole.

Sfortunatamente ciò non avviene, in quanto il numero delle biforcazioni non solo è irragionevole, ma addirittura infinito. Infatti si osserva che, una volta avvenuta la prima biforcazione, al crescere del parametro se ne susseguono in sequenza sempre più rapida infinite altre, ed i relativi punti critici presentano un punto di accumulazione per un valore finito del parametro. Al di là di questo punto di accumulazione, si ha uno stato stabile e instazionario, limitato e non periodico, che spesso viene definito moto caotico (o in termini matematici attrattore strano).

Il meccanismo più studiato e più famoso (ma non necessariamente l'unico) con cui avviene l'evoluzione verso il caos è la cascata di raddoppi del periodo, det-

ta anche sequenza di Feigenbaum. Il sistema dinamico più semplice che mostra tale fenomeno è il sistema discreto ad una dimensione rappresentato dall'equazione di evoluzione:

$$x_{n+1} = \mu(x_n - x_n^2) \quad (13.18)$$

che prende il nome di logistic map. Le sue soluzioni di equilibrio stabile, al variare del parametro μ , sono riportate nella figura 13.2.

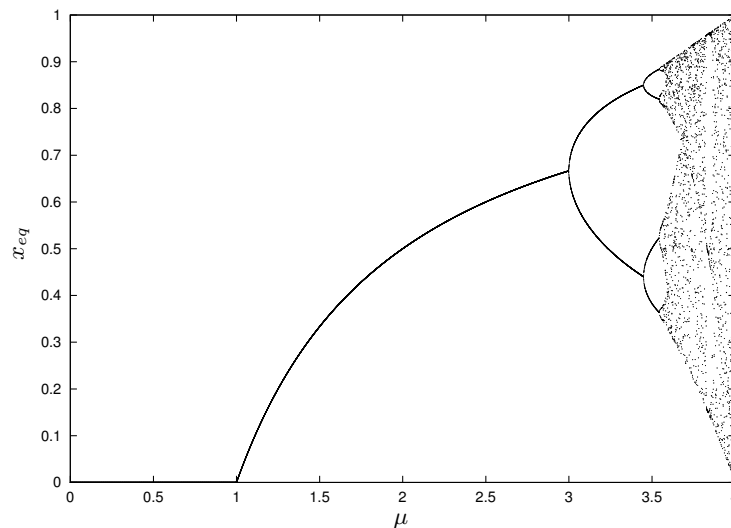


Figura 13.2 Diagramma delle biforcazioni della logistic map.

Quando il parametro μ ha valori molto piccoli, l'equazione (13.18) ammette l'unica soluzione di equilibrio stabile $x_{eq} = 0$. Quando $\mu = 1$, come si può calcolare mediante la teoria delle biforcazioni ma anche verificare molto semplicemente al calcolatore, questo stato subisce uno scambio di stabilità con l'altro stato di equilibrio $x_{eq} = (\mu - 1)/\mu$. Proseguendo per valori ancora superiori del parametro μ , si osserva per $\mu = 3$ una ulteriore biforcazione con raddoppio del periodo, ottenendo una soluzione che oscilla alternativamente fra due valori ben definiti. Un ulteriore raddoppio si ottiene per $\mu \sim 3.425$, poi i raddoppi di periodo si susseguono sempre più rapidamente fino ad un valore di μ in cui il periodo della soluzione periodica stabile tende all'infinito.

Al di là di questo valore, che è circa $\mu \sim 3.57$, la soluzione non diverge fino a che $\mu \leq 4$: infatti la (13.18) porta l'intervallo $(0, 1)$ in se stesso, per cui lo stato del sistema, se inizialmente compreso in questo intervallo, non può abbandonarlo. In questa regione il comportamento della soluzione, illustrato con maggior dettaglio nella figura 13.3, risulta molto vario. Esistono regioni in cui la soluzione è ancora periodica (bande chiare verticali nella figura), seguite da cascate

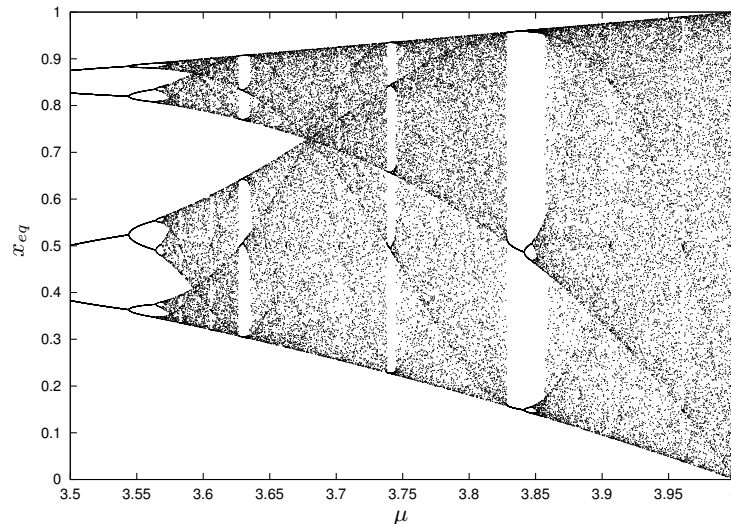


Figura 13.3 Logistic map: sequenze di raddoppio del periodo e comportamento caotico della soluzione per $3.5 < \mu < 4$.

di raddoppio di periodo, ma esistono anche regioni in cui la soluzione è limitata ma non periodica: queste sono le regioni del cosiddetto comportamento caotico, caratterizzato da una dipendenza non analitica dai parametri del sistema. Le caratteristiche fondamentali del moto caotico sono presenti sia in questo semplice sistema dinamico che nel moto turbolento di un fluido.

13.5 Stabilità dei flussi piani e paralleli

Data la complessità del problema generale della stabilità fluidodinamica, una notevole semplificazione consiste nello studiare la stabilità di quelle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes in cui una sola componente di velocità sia diversa da zero, e dipenda da una sola coordinata. Si tratta dei flussi piani e paralleli, come quelli di Couette e Poiseuille, che sono semplici soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes (qui scritte per semplicità in forma adimensionale e per fluido incomprimibile a proprietà costanti):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (13.19a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (13.19b)$$

Un sistema di questo tipo è spazialmente infinito nella direzione x del moto. Questo permette notevoli semplificazioni di carattere teorico (come vedremo,

potremo ipotizzare una forma semplice per l'andamento dei disturbi), ma naturalmente un sistema del genere ha rilevanza pratica solo in quanto schematizza un sistema finito.

Stabilità spaziale e temporale Il tipo di stabilità considerata fino ad ora è la stabilità rispetto alle condizioni iniziali nel tempo. In un sistema spazialmente infinito le condizioni iniziali vengono assegnate al tempo $t = 0$ per tutte le x comprese fra $-\infty$ e $+\infty$. Sviluppandole in integrale di Fourier, cioè rappresentandole come sovrapposizione di esponenziali della forma $\exp(i\omega t - i\alpha x)$, con α reale e variabile fra $-\infty$ e $+\infty$, il problema della stabilità si riduce alla verifica del segno della parte immaginaria dei valori complessi di ω per i quali le equazioni dei piccoli disturbi ammettono soluzioni non banali.

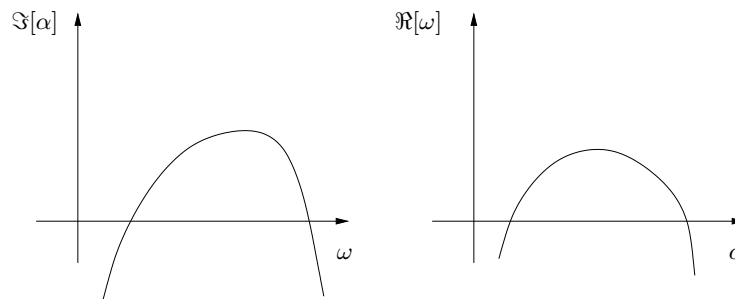


Figura 13.4 Equivalenza dei problemi della stabilità spaziale e temporale

D'altra parte, è anche lecito porsi un problema di condizioni iniziali *nello spazio*: assegnare cioè il valore delle variabili di stato del sistema ad una data ascissa, ad esempio $x = 0$, per tutti i t compresi fra $-\infty$ e $+\infty$, e chiedersi se due soluzioni che differiscono solo per tali condizioni a $x = 0$ tendano ad avvicinarsi o ad allontanarsi l'una all'altra quando $x \rightarrow \infty$. In questo caso occorre sviluppare la condizione assegnata a $x = 0$ per $-\infty < t < +\infty$ come integrale di Fourier nel tempo, rappresentandola come sovrapposizione di modi della forma $\exp(i\omega t - i\alpha x)$, con ω reale, e controllare il segno della parte immaginaria dei valori complessi di α per i quali esistono soluzioni non banali.

I problemi di stabilità spaziale e temporale sono sostanzialmente diversi: il primo consiste infatti nello studiare se un disturbo apportato al sistema ad un certo istante si rinforza o si attenua al passare del tempo; il secondo se un disturbo immesso ad una certa stazione si risente in maniera amplificata o attenuata in tutte le stazioni a valle.

D'altro lato tali problemi sono matematicamente equivalenti, e l'instabilità spaziale implica quella temporale, e viceversa. Infatti si verifica facilmente che, dal momento che l'equazione di dispersione, cioè la relazione fra ω ed α che fornisce le condizioni di instabilità, è unica, e non dipende da quale dei due problemi

si stia considerando. Nell'appurare la stabilità temporale ci si chiede se esiste un valore reale di α per cui al variare dei parametri una delle due radici, generalmente complesse, dell'equazione di dispersione per ω passa per l'asse reale. Nell'accertare la stabilità spaziale ci si chiede invece se esiste un valore reale di ω per cui, al variare dei parametri, una delle radici complesse per α passa per l'asse reale. Come si vede nella figura 13.4, le due domande hanno ovviamente la stessa risposta.

Instabilità convettiva e assoluta Una ulteriore distinzione che è utile fare quando si trattano sistemi con estensione spaziale infinita è tra disturbi applicati con ampiezza non trascurabile su tutta l'estensione del sistema e disturbi applicati in una regione limitata. In questo secondo caso ha senso chiedersi se un disturbo introdotto in una certa posizione resti lì o si sposti durante la sua evoluzione. Si danno perciò due diverse definizioni di instabilità: si parla di instabilità convettiva se in seguito ad un piccolo disturbo iniziale localizzato in una regione finita dello spazio il massimo spaziale della funzione di stato del sistema diverge, qualunque sia la posizione dove tale massimo si verifica, mentre si parla di instabilità assoluta se, sempre in risposta ad un disturbo localizzato, la funzione di stato diverge nello stesso punto in cui è stato applicato il disturbo. La condizione di instabilità convettiva è meno restrittiva di quella di instabilità assoluta, perché include la possibilità che il disturbo si allontani nello spazio mentre sta crescendo nel tempo.

13.5.1 L'equazione di Orr-Sommerfeld

Consideriamo una semplice geometria come quella del canale piano indefinito. Diciamo y la coordinata normale alle pareti, poste a $y = -1$ e $y = +1$. Consideriamo poi un flusso base diretto come la coordinata x , e dato da $u = U_0(y)$. Come è noto, qualsiasi profilo di questo tipo è soluzione delle equazioni non viscosse, mentre le equazioni viscosse ammettono solo soluzioni in cui $U_0(y)$ ha un andamento parabolico o lineare.

Facciamo ora l'ulteriore, importante ipotesi che i piccoli disturbi che introduciamo per studiare la stabilità rispetto al flusso base U_0 siano anch'essi bidimensionali, per cui la componente z del disturbo è nulla, mentre le altre componenti dipendono solo da x ed y , oltre che dal tempo. Scriviamo allora le componenti di velocità e la pressione come:

$$u(x, y, t) = U_0(y) + \delta u; \quad v(x, y, t) = \delta v; \quad p(x, y, t) = P_0 + \delta p$$

dove δu , δv e δp sono piccole perturbazioni, in generale funzioni di x , y e del tempo. Sostituiamo queste espressioni nelle equazioni (13.19a) e (13.19b), e linearizziamo (trascurando cioè i termini quadratici) rispetto alle piccole perturbazioni

per ottenere le equazioni che descrivono il disturbo:

$$\begin{cases} \delta u_x + \delta v_y = 0 \\ \delta u_t + U_0 \delta u_x + U'_0 \delta v + \delta p_x = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \delta u \\ \delta v_t + U_0 \delta v_x + \delta p_y = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \delta v \end{cases}$$

Il fatto che il flusso base abbia una sola componente non nulla e dipendente solo da y ha fatto scomparire dalle equazioni del disturbo la gran parte dei termini derivanti dalla linearizzazione dei termine non lineare $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$. Alle equazioni sono associate naturalmente delle condizioni al contorno di tipo omogeneo in corrispondenza delle pareti solide: $\delta u(x, \pm 1, t) = 0$ e $\delta v(x, \pm 1, t) = 0$.

I coefficienti delle equazioni del disturbo dipendono solo dalla coordinata y , quindi le equazioni sono invarianti per traslazione rispetto alle coordinate x e t , e le loro soluzioni sono funzioni, in generale complesse, della forma:

$$\delta u = U(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}; \quad \delta v = V(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}; \quad \delta p = P(y)e^{i(\omega t - \alpha x)} \quad (13.20)$$

Osserviamo esplicitamente che sia ω che α sono in generale complessi, così come le funzioni $U(y)$, $V(y)$ e $P(y)$. Indicando con i suffissi R ed I le parti reale ed immaginaria di ω , α ed $U(y)$, il disturbo δu si può scrivere anche come:

$$\delta u(x, y, t) = e^{(\alpha_I x - \omega_I t)} |U(y)| \cos \left[\omega_R t - \alpha_R x - \arctan \frac{U_I(y)}{U_R(y)} \right]$$

Soluzioni del precedente sistema di equazioni differenziali che siano diverse dalla soluzione banale si ottengono solo per certi valori di ω una volta fissato α reale (stabilità temporale), oppure solo per certi valori di α una volta fissato ω reale (stabilità spaziale).

Le equazioni del disturbo, se i disturbi hanno la forma funzionale (13.20), si riducono a:

$$-i\alpha U + V' = 0 \quad (13.21a)$$

$$i(\omega - \alpha U_0)U + U'_0 V - i\alpha P - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 U = 0 \quad (13.21b)$$

$$i(\omega - \alpha U_0)V + P' - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 V = 0 \quad (13.21c)$$

in cui con il simbolo ∇^2 ora si indica l'operatore $d^2/dy^2 - \alpha^2$. Le equazioni del disturbo sono diventate un sistema di equazioni differenziali lineari e ordinarie nella sola variabile indipendente y .

Il sistema può essere ridotto ad una sola equazione. Per sostituzione si elimina dapprima U ricavandola dalla (13.21a), ottenendo dopo aver moltiplicato per $i\alpha$:

$$i(\omega - \alpha U_0)V' + i\alpha U'_0 V + \alpha^2 P = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 V'$$

$$i(\omega - \alpha U_0)V + P' = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 V$$

La prima di queste equazioni si deriva poi rispetto ad y , in modo da poter eliminare P' fra le due equazioni:

$$i(\omega - \alpha U_0)[V'' - \alpha^2 V] + i\alpha U_0''V = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 [V'' - \alpha^2 V]$$

Riconoscendo infine l'operatore ∇^2 all'interno delle parentesi quadre, si ricava così la seguente equazione differenziale ordinaria del quarto ordine, detta equazione di Orr-Sommerfeld:

$$i(\omega - \alpha U_0) \nabla^2 V + i\alpha U_0''V = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \nabla^2 V \quad (13.22)$$

Ad essa sono associate le condizioni al contorno:

$$V(\pm 1) = 0; \quad V'(\pm 1) = 0 \quad (13.23)$$

13.5.2 L'equazione di Rayleigh

L'equivalente non viscoso dell'equazione (13.22) di Orr-Sommerfeld per l'evoluzione di disturbi bidimensionali fu studiato da Rayleigh, che derivò l'omonima equazione. Ponendo $1/\text{Re} = 0$ nella (13.22), e dividendo per $i\alpha$, si ottiene immediatamente l'equazione di Rayleigh:

$$(c - U_0) \nabla^2 V + U_0''V = 0 \quad (13.24)$$

avendo indicato con $c = \omega/\alpha$ la velocità di fase della perturbazione oncosa.

Se studiamo la stabilità temporale, α è un numero reale assegnato. Dividiamo entrambi gli addendi per $(c - U_0)$ e moltiplichiamo per il complesso coniugato di V , integrando poi fra gli estremi che delimitano l'intervallo della y su cui si estende il flusso. Si ottiene:

$$\int_{-1}^{+1} \left(V^* V'' - \alpha^2 |V|^2 + \frac{U_0''}{c - U_0} |V|^2 \right) dy = 0$$

Il primo addendo di questo integrale si integra per parti:

$$\int_{-1}^{+1} V^* V'' dy = V^* V'|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} V'^* V' dy$$

in cui il primo termine a secondo membro è nullo a motivo delle condizioni al contorno. Il secondo termine invece è pari all'integrale di $|V'|^2$. L'unica quantità complessa che rimane nell'equazione è dunque il coefficiente $c = c_R + ic_I$:

$$\int_{-1}^{+1} \left(-|V'|^2 - \alpha^2 |V|^2 + \frac{U_0''}{c_R - U_0 + ic_I} |V|^2 \right) dy = 0$$

Ponendo uguali a zero separatamente la parte reale e la parte immaginaria, si ottiene:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(c_R - U_0)U_0''|V|^2}{(c_R - U_0)^2 + c_I^2} dy = \int_{-1}^{+1} (|V'|^2 + \alpha^2|V|^2) dy$$

$$c_I \int_{-1}^{+1} \frac{U_0''|V|^2}{(c_R - U_0)^2 + c_I^2} dy = 0$$

Nella seconda equazione compare un integrale della quantità U_0'' moltiplicata per un'altra quantità sempre positiva. Se la derivata seconda del profilo base U_0 ha sempre lo stesso segno nell'intervallo di integrazione, l'integrale non può mai annullarsi (se non quando $V = 0$), e quindi se si vogliono soluzioni non banali, cioè per $|V| \neq 0$, deve essere necessariamente essere $c_I = 0$. Quindi in questo caso l'equazione di Rayleigh non può avere autovalori con parte immaginaria diversa da zero, ed il flusso è certamente stabile. Il criterio di Rayleigh per la stabilità afferma dunque che condizione necessaria (ma non sempre sufficiente) per avere un profilo instabile è che sia $U_0'' = 0$, che significa che il profilo di velocità $U_0(y)$ attorno a cui abbiamo linearizzato presenta un punto di flesso.

Il criterio di Rayleigh assume particolare importanza pratica con riferimento a correnti acceleranti o deceleranti. Infatti che la presenza di punti di flesso nel profilo è associata al segno del gradiente di pressione: profili con gradiente di pressione favorevole non hanno punti di flesso e quindi sono stabili secondo il criterio di Rayleigh, mentre profili con gradiente di pressione contrario hanno un punto di flesso e risultano instabili.

Il criterio di Fjortoft Un'altra condizione necessaria è stata ricavata da Fjortoft. Se U_s è il valore del profilo base $U_0(y)$ in corrispondenza di un punto di flesso alla quota y_s , deve risultare:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{U_0''(U_0 - U_s)}{(U_0 - c_R)^2 + c_I^2} |V|^2 dy \leq 0$$

Questa condizione, il cui significato è illustrato graficamente in figura 13.5, risulta meno importante della condizione di Rayleigh, in quanto quasi sempre realizzata in flussi di interesse pratico.

13.5.3 Stabilità del flusso di Poiseuille

Applichiamo i risultati ora esposti al semplice caso del flusso piano laminare di Poiseuille, dove il flusso base $U_0(y)$ ha un andamento quadratico analiticamente noto, che è descritto dopo opportune adimensionalizzazioni da:

$$U_0(y) = 1 - y^2$$

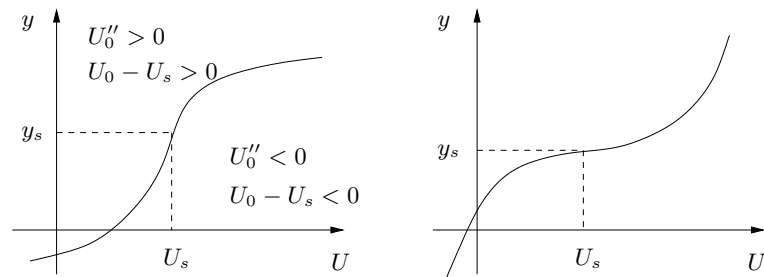


Figura 13.5 Profilo base di velocità stabile (a sinistra) e instabile (a destra) secondo il criterio di Fjortoft.

La derivata seconda U''_0 è sempre negativa, e quindi secondo il criterio di Rayleigh il flusso di Poiseuille piano è stabile in assenza di viscosità.

Per valutare l'effetto della viscosità, occorre considerare l'equazione di Orr-Sommerfeld (13.22), che con questo flusso base diviene, dopo aver ulteriormente diviso per $i\alpha$:

$$\left(\frac{\omega}{\alpha} - 1 + y^2\right) \nabla^2 V - 2V = \frac{1}{i\alpha Re} \nabla^2 \nabla^2 V$$

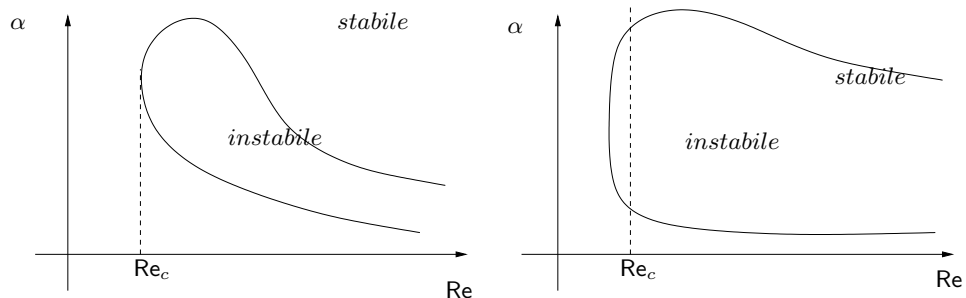


Figura 13.6 Esempio di curva di stabilità neutra per il flusso piano di Poiseuille (a sinistra) e per un flusso base dotato di punto di flesso (a destra)

L'equazione può essere risolta solo numericamente o per via approssimata. La sua soluzione numerica permette di identificare nel piano Re, α una curva neutra costituita dal luogo dei punti in cui ω_I cambia segno. Tale curva neutra, illustrata qualitativamente in figura 13.6, mostra che ω cambia segno in corrispondenza di due valori di α , quando il numero di Reynolds è superiore ad un certo valore critico $Re_c \simeq 5780$. Quando invece $Re < Re_c$, il flusso risulta sempre

stabile. La curva neutra corrispondente all'instabilità viscosa di un profilo dotato di un punto di flesso ha un aspetto diverso, sempre illustrato in figura 13.6.

Per il flusso di Poiseuille l'effetto della viscosità è quindi destabilizzante, avendo reso instabile un flusso che risulta stabile sulla base delle equazioni non viscosi. Esistono al contrario altri casi di flussi instabili secondo un'analisi non viscosa che diventano stabili se studiati con l'equazione di Orr-Sommerfeld.

Qualche osservazione critica Abbiamo visto che il flusso piano di Poiseuille risulta stabile rispetto a piccoli disturbi bidimensionali se il numero di Reynolds è inferiore a circa 5800. Il flusso di Couette, con analoghi ragionamenti, risulta sempre stabile, e lo stesso comportamento è previsto per il flusso di Poiseuille in geometria cilindrica.

L'esperienza (sia sperimentale che numerica) stabilisce invece che tutti questi flussi sono instabili, e che il numero di Reynolds a cui si osserva l'instabilità del flusso piano di Poiseuille non è particolarmente ripetibile, ma sicuramente inferiore a 5800.

La conseguenza di queste osservazioni è naturalmente che la teoria dei piccoli disturbi (tanto più se bidimensionali) non è sufficiente a dare un quadro realistico di alcuni fenomeni di instabilità fluidodinamica (pur essendo sufficiente a descriverne con buona precisione molti altri): disturbi di ampiezza finita, oppure tridimensionali, possono cambiare il quadro della situazione in modo anche sostanziale.

13.6 Transizione (cenni)

La transizione dal regime di moto laminare a quello turbolento è un fenomeno di notevole importanza pratica, a causa della sostanziale diversità fra i due tipi di flusso che rende importante conoscere le cause della transizione (in modo da poterla controllare) ma anche saper prevedere la posizione o l'istante di tempo in cui tale transizione ha luogo. Il flusso con la maggior rilevanza pratica è naturalmente lo strato limite.

L'equazione di Orr-Sommerfeld può essere applicata anche allo studio della stabilità dello strato limite, che non è un flusso piano e parallelo ma presenta un'evoluzione con la coordinata x allineata con la corrente esterna, grazie al fatto che tale evoluzione è molto più lenta rispetto alle variazioni con la coordinata y normale alla parete.

Senza entrare nei dettagli del procedimento matematico (il metodo delle scale multiple) che giustifica l'uso dell'equazione di Orr-Sommerfeld per un flusso, come lo strato limite, lentamente variabile con x , ci limitiamo ad esporre i risultati fondamentali. I disturbi più instabili individuati dall'equazione di Orr-Sommerfeld per lo strato limite su lastra piana si chiamano onde di Tollmien-Schlichting. Quando il numero di Reynolds Re_x (basato sulla distanza x dal bordo di attacco della lastra piana) ha valori molto bassi, lo strato limite risulta co-

dunque stabile, mentre quando $Re_x \simeq 100.000$ le onde di Tollmien-Schlichting iniziano ad essere instabili.

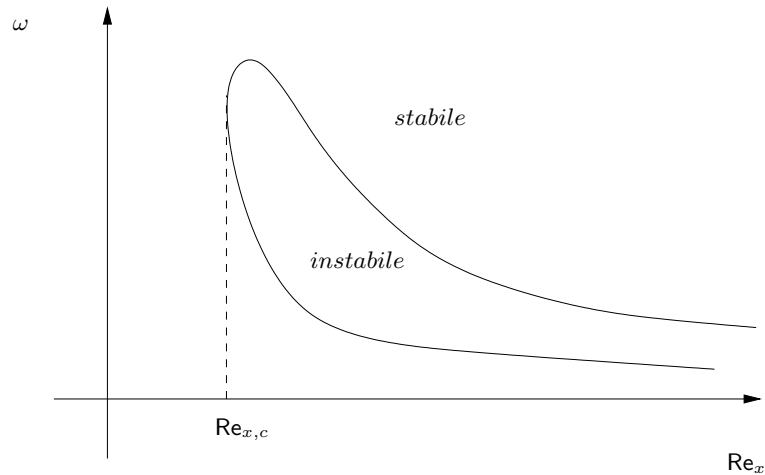


Figura 13.7 Esempio di curva di stabilità neutra per lo strato limite di Blasius

Esse rappresentano un'instabilità bidimensionale di tipo convettivo, che si manifesta quindi con una certa gradualità, e solo quando il valore critico del numero di Reynolds sia stato superato con un certo margine. In effetti nella pratica la transizione su lastra piana si osserva per valori di Re_x dell'ordine del milione (figura 13.7).

Non esistendo per le instabilità convettive un meccanismo di autosostentamento delle oscillazioni, la transizione dovuta alle onde di Tollmien-Schlichting dipende dall'ampiezza dei piccoli disturbi che, provenendo in pratica dalla corrente incidente o dalle imperfezioni della parete, vengono amplificati dallo strato limite. Mentre le sorgenti di questi disturbi iniziali sono difficilmente prevedibili, la loro amplificazione è ben descritta dalla teoria, che prevede che le loro ampiezze siano proporzionali all'esponenziale dell'integrale in x della parte immaginaria del numero d'onda locale α ricavato dalla soluzione dell'equazione di Orr-Sommerfeld.

Previsione della transizione Se la quantità $\alpha_I = \alpha_I(x)$ varia lentamente con la coordinata x , l'ampiezza locale $A(x)$ del disturbo che si amplifica si calcola con:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \alpha_I(x)$$

che, integrata, dà:

$$A(x) = A(0) \exp \left(\int_0^x \alpha_I(x) dx \right)$$

Sulla base di queste considerazioni si è sviluppato il cosiddetto metodo e^N per la previsione della transizione, basato sull'ipotesi che la transizione avvenga quando l'integrale della parte immaginaria di α a partire dal punto neutro (una grandezza che ha assunto il nome di fattore N) raggiunge un valore dell'ordine di 10 (amplificazione dell'ordine di 80 decibel):

$$\exp\left(\int \alpha_I dx\right) = e^N$$

Questo valore dell'esponente N corrisponde alla situazione per cui le onde raggiungono un'ampiezza paragonabile con il flusso-base: per avere transizione non basta quindi che l'esponente sia positivo (instabilità), occorre anche che il disturbo acquisti un'ampiezza paragonabile con quella del flusso base. Questa ipotesi è tutt'altro che scontata, ma abbastanza ben verificata in condizioni di bassa turbolenza della corrente incidente (come avviene solitamente nel volo transatmosferico) da fare del metodo e^N un valido strumento utilizzato in sede industriale per il progetto di profili alari.

Altre possibili instabilità Dopo il punto individuato empiricamente dal metodo e^N , la non linearità dà rapidamente luogo a disturbi tridimensionali e quindi a quel regime di moto caotico che va sotto il nome di turbolenza. Occorre però ricordare che le onde di Tollmien-Schlichting sono solo uno dei possibili disturbi che possono portare all'instabilità del flusso. Ad esempio l'instabilità di Görtler è un tipo di instabilità tridimensionale associata alla concavità della superficie, e può quindi essere importante sul ventre di un profilo alare molto ricurvo. Altri tipi di instabilità tridimensionali si rilevano nel flusso anche in assenza di curvatura, senza essere precedute da uno sviluppo apprezzabile di onde di Tollmien-Schlichting; esse rappresentano ancora un fenomeno non del tutto compreso, cui si dà globalmente il nome di *bypass transition*, nel senso che la transizione ha luogo saltando lo stadio delle onde bidimensionali. Altri tipi ancora di instabilità possono manifestarsi sul dorso di un profilo nel momento in cui l'ala possiede un angolo di freccia, ed è quindi investita da una corrente che ha una componente di velocità non nulla nella direzione ortogonale al profilo (instabilità di bordo di attacco).

13.7 La turbolenza

Lo studio della turbolenza, probabilmente l'ultimo capitolo della fisica classica a non aver ancora ricevuto una sistemazione teorica soddisfacente, merita molto più spazio di quello qui a disposizione. Ci limiteremo quindi ad esporre alcuni risultati di interesse pratico fondamentale, inclusi quelli ricavati grazie all'analisi dimensionale.

Da un punto di vista matematico, il concetto di turbolenza si identifica con quello di comportamento caotico delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes, che come è noto descrivono anche il moto turbolento di un fluido purché resti

valida l'ipotesi del continuo. La caratteristica che rende casuali i moto turbolenti è la forte sensibilità alle condizioni iniziali esibita dalle equazioni di Navier–Stokes, in misura tanto maggiore quanto più grande è il numero di Reynolds. Questo significa che la distanza (in una opportuna norma) delle condizioni iniziali che è lecito dare ad un tempo t_0 per ottenere soluzioni distanti meno di una quantità data ad un tempo t tende esponenzialmente a zero per $t_0 \rightarrow -\infty$. Notiamo che questa proprietà è collegata ma non coincidente con quella di instabilità: non è escluso infatti che la distanza fra le due soluzioni resti limitata per $t \rightarrow +\infty$.

Assenza di separazione delle scale In quanto moto caotico, il moto turbolento è affine ai moti molecolari che avvengono all'interno di un qualsiasi corpo macroscopico. Come tutti i moti casuali, esso può essere affrontato con gli strumenti propri della statistica, ma la particolare difficoltà della turbolenza consiste nella mancanza di separazione delle scale, che invece esiste ad esempio nei moti molecolari. I moti molecolari infatti hanno luogo su di una scala di lunghezza molto più piccola dei moti macroscopici, ed il postulato statistico che tutte le proprietà meccaniche delle molecole diverse dagli invarianti dinamici (massa, quantità di moto, energia e momento angolare) diventino statisticamente indipendenti a distanze maggiori di questa scala molecolare risulta adeguato (infatti la termodinamica e la meccanica dei continui che se ne costruiscono sono ottimi modelli della realtà). I flussi turbolenti invece coinvolgono una gamma di scale di lunghezza (e di tempo) che si estende fino alle dimensioni dell'intero sistema, richiedendo quindi per una modellizzazione accurata una difficile combinazione di elementi statistici, che sono necessari per descrivere le piccole scale universali, ed elementi deterministici, con i quali si devono descrivere le scale più grandi, direttamente legate al particolare problema considerato.

13.7.1 Equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds

A causa della forte sensibilità alle condizioni iniziali esibita dalle equazioni di Navier–Stokes, la descrizione dei flussi turbolenti deve avvenire secondo un approccio statistico, ma le equazioni differenziali restano comunque valide e descrivono deterministicamente il moto, sotto ipotesi molto generali legate essenzialmente all'ipotesi del continuo. Da quest'equazioni differenziali si possono quindi ricavare, mediante operazioni di media statistica, importanti informazioni sulle proprietà, anche statistiche, del sistema.

Indichiamo l'operatore di una qualsiasi media statistica (media temporale, media di insieme, etc) da applicare alle equazioni del moto con il simbolo $\langle \cdot \rangle$. Un operatore di questo tipo è anzitutto un operatore lineare. Ciò significa che, se u e v sono due variabili aleatorie ed a e b sono due costanti, si ha:

$$\langle au + bv \rangle = a \langle u \rangle + b \langle v \rangle$$

Di conseguenza l'operatore di media commuta con tutti gli altri operatori lineari, compresi quelli di derivazione ed integrazione. Lo stesso operatore non

commuta invece con operatori non lineari: infatti la media del prodotto $\langle uv \rangle$ è in generale diversa dal prodotto delle medie $\langle u \rangle \langle v \rangle$, e non riconducibile ad esse.

Applicando allora l'operazione di media statistica alle equazioni di Navier-Stokes, scritte nel caso particolare di fluido incomprimibile e a proprietà costanti, si ottiene:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{V} \rangle = 0 \quad (13.25a)$$

$$\rho \frac{\partial \langle \mathbf{V} \rangle}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle + \nabla \langle p \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{J}_Q^{(d)} \rangle = 0 \quad (13.25b)$$

in cui $\langle \mathbf{J}_Q^{(d)} \rangle$, la media della parte dissipativa del tensore degli sforzi, per fluidi newtoniani a proprietà costanti si scrive per componenti come:

$$\langle J_{Q,ij}^{(d)} \rangle = -\mu \left(\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_i} \right)$$

Dalle equazioni mediate di bilancio della massa (13.25a) e della quantità di moto (13.25b), si vede che tutti i termini lineari sono esprimono immediatamente in termini della velocità media $\langle \mathbf{V} \rangle$. Il termine $\langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle$ della (13.25b) invece, in quanto media di un prodotto, si pone uguale a:

$$\langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{V}' \mathbf{V}' \rangle \quad (13.26)$$

dove $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \langle \mathbf{V} \rangle$ è la fluttuazione della velocità attorno al suo valor medio.

I due addendi della (13.26) hanno un comportamento diverso al variare del sistema di riferimento. Nel Capitolo 1 abbiamo mostrato come si possono scrivere le equazioni del moto di un fluido richiedendo semplicemente l'indipendenza rispetto ad un cambiamento inerziale del sistema di riferimento, e come in questo modo si arriva a definire la parte dissipativa del tensore flusso di quantità di moto, che è assimilabile al tensore degli sforzi della Meccanica dei Solidi. Appliciamo ora un cambio inerziale del sistema di riferimento, secondo la trasformazione (1.7), passando cioè ad una terna in moto relativo con una velocità costante \mathbf{V}_0 . Nella (13.26) solo il secondo dei due addendi che costituiscono $\langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle$, cioè il prodotto delle fluttuazioni, resta immutato. La grandezza indipendente dai cambi inerziali di sistema di riferimento $\rho \langle \mathbf{V}' \mathbf{V}' \rangle$, che dimensionalmente è uno sforzo, prende il nome di tensore \mathbf{R} degli sforzi di Reynolds:

$$\mathbf{R} = \rho \langle \mathbf{V}' \mathbf{V}' \rangle .$$

Si definisce allora un tensore degli sforzi totali \mathbf{T} , come:

$$\mathbf{T} = \langle \mathbf{J}_Q^{(d)} \rangle + \mathbf{R} \quad (13.27)$$

che per componenti è dato da:

$$T_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \rho \langle V'_i V'_j \rangle$$

Questo permette di scrivere l'equazione mediata (13.25b) di bilancio della quantità di moto nella forma:

$$\rho \frac{\partial \langle \mathbf{V} \rangle}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \langle \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{V} \rangle + \nabla \langle p \rangle + \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (13.28)$$

che è del tutto analoga all'equazione di partenza ma con $\langle \mathbf{V} \rangle$ in luogo di \mathbf{V} , se si eccettua il tensore degli sforzi di Reynolds all'interno del tensore degli sforzi totali.

Il problema della chiusura Le equazioni mediate (13.25a) di bilancio della massa e (13.28) di bilancio della quantità di moto non sono però sufficienti a determinare univocamente il campo di velocità media $\langle \mathbf{V} \rangle$, dal momento che non esiste una relazione come quella fra $\mathbf{J}_Q^{(d)}$ e \mathbf{V} che legghi il tensore degli sforzi totali (ed in particolare quello degli sforzi di Reynolds) alla velocità media. Si pone così il problema della chiusura delle equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds: occorre specificare un modello che permetta di risalire al tensore \mathbf{R} e quindi a \mathbf{T} a partire da informazioni relative al solo campo medio.

13.8 Flusso turbolento in condotti

Analogamente a quanto accade nel regime di moto laminare, i casi più semplici di flusso turbolento sono quelli di flusso parallelo, in cui una sola delle componenti del vettore velocità (media) è diversa da zero. Naturalmente le componenti fluttuanti della velocità dipendono da tutte e tre le coordinate spaziali e dal tempo, ma in una geometria con una sola direzione di non omogeneità ci si può aspettare l'esistenza di un flusso medio $U(y)$ che dipende solo da quella coordinata. Questo tipo di flussi sono l'equivalente turbolento dei flussi laminari di Couette (in geometria piana) e di Poiseuille (in condotti a sezione circolare).

Considerando le equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds, dall'equazione di continuità (13.25a) si ricava immediatamente che, come nel caso laminare, deve essere $\langle v_y \rangle = 0$ e quindi $\langle v \rangle = 0$ se v (e quindi il suo valor medio) si annulla sul contorno.

Considerando poi l'equazione (13.28) di bilancio per la quantità di moto, proiettata in direzione x ed y , si ha:

$$\langle p_x \rangle + \left\langle \frac{\partial T_{12}}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad (13.29a)$$

$$\langle p_y \rangle + \left\langle \frac{\partial T_{22}}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad (13.29b)$$

in cui T_{12} e T_{22} sono le componenti in direzione x ed y della componente y del tensore \mathbf{T} degli sforzi totali definito dalla (13.27).

Variazione lineare degli sforzi totali L'equazione (13.29b) mostra subito che, a differenza dei flussi laminari, la pressione media non è in generale costante con la coordinata y . D'altro canto, dato che T_{22} è indipendente da x come tutte le grandezze medie derivate dalla velocità, basta derivare la (13.29b) rispetto ad x per ricavare che $\langle p_x \rangle$ deve essere indipendente da y . L'equazione (13.29a) mostra quindi che la derivata $\langle \partial T_{12} / \partial y \rangle$ è costante, e quindi il valor medio della componente T_{12} del tensore degli sforzi deve variare linearmente con y .

Questo importante risultato è valido indipendentemente dal legame fra $\langle T_{12} \rangle$ e le componenti medie della velocità. Scrivendo le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche, si vede in modo analogo che la validità di questo risultato non riguarda solo condotti piani, ma si estende anche a condotti a sezione cilindrica.

Dalla definizione (13.27) del tensore \mathbf{T} risulta:

$$\langle T_{12} \rangle = \rho \langle u'v' \rangle - \mu \frac{dU}{dy} \quad (13.30)$$

In un flusso turbolento il secondo addendo è trascurabile rispetto al primo in gran parte della sezione del condotto, tranne per un sottile strato vicino a ciascuna delle due pareti dove $\langle u'v' \rangle$ deve necessariamente tendere a zero perché sia $\langle u' \rangle$ che $\langle v' \rangle$ singolarmente si annullano alla parete. Al contrario il profilo medio di velocità ha la sua derivata massima proprio a parete.

Un esempio di un profilo di sforzo totale è mostrato in figura 13.8 per il flusso turbolento entro un condotto piano indefinito. È evidente come in gran parte della sezione del canale il diagramma di $\langle u'v' \rangle$ si mantiene molto vicino ad una legge lineare, da cui si discosta solo nei tratti prossimi alle pareti. L'estensione della regione lineare dipende dal numero di Reynolds della corrente, ed in particolare diminuisce al crescere del numero di Reynolds, come si può immediatamente comprendere riscrivendo la relazione (13.30) in termini adimensionali. Lo sforzo totale ha invece un andamento rettilineo in tutto il canale, ed assume su una parete un valore τ_w (unitario con le normalizzazioni adottate in figura) uguale ed opposto a quello relativo all'altra parete. Essendo le due pareti piane fisse (si tratta cioè dell'equivalente turbolento del flusso piano laminare di Poiseuille), la componente $\langle T_{12} \rangle$ dello sforzo totale si deve annullare per simmetria al centro del canale, variando quindi da un valore $+\tau_w$ su una parete al valore $-\tau_w$ sull'altra.

Legame fra sforzo a parete e gradiente di pressione Se h è l'altezza del condotto, la derivata dT_{12}/dy è costante attraverso il canale e vale $2\tau_w/h$. Dalla (13.29a) risulta allora:

$$p_x = -\frac{2\tau_w}{h}$$

Il gradiente di pressione risulta così direttamente legato allo sforzo tangenziale esercitato sulla parete, come è anche possibile ricavare da considerazioni di bilancio globale della quantità di moto. Il medesimo risultato vale per un condotto di forma qualsiasi, a patto di sostituire alla distanza h fra le due pareti il raggio

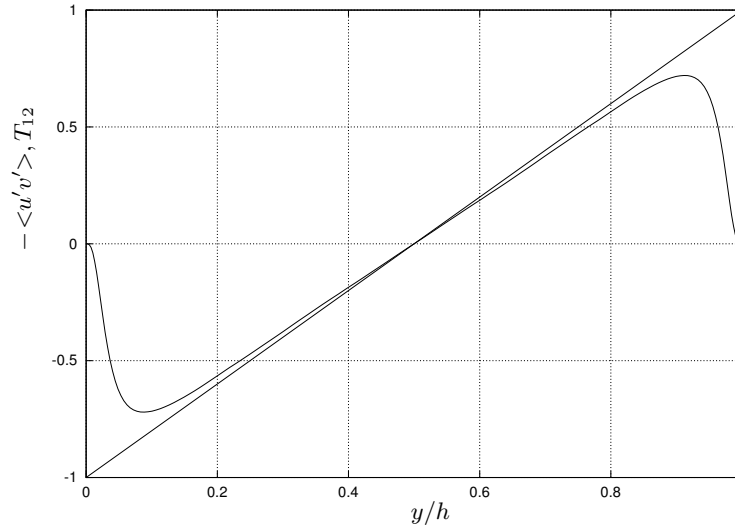


Figura 13.8 Andamento della quantità $\rho \langle u'v' \rangle = R_{12}$ e dello sforzo totale $T_{12} = R_{12} - \mu dU/dy$ in funzione della coordinata y fra le due pareti di un canale piano indefinito. La figura è tratta da una Simulazione Numerica Diretta (DNS) delle equazioni di Navier–Stokes, condotta dagli autori per $Re_\tau = 180$.

idraulico r_h del condotto, definito come rapporto fra il doppio dell'area A del condotto ed il perimetro P :

$$r_h = \frac{2A}{P}$$

Si ottiene quindi il seguente risultato generale

$$p_x = -\frac{2\tau_w}{r_h} \quad (13.31)$$

La velocità di attrito Dalla definizione (13.30) dello sforzo $\langle T_{12} \rangle$ si ricava che la grandezza definita come la radice quadrata del valor medio dello sforzo totale valutato a parete:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\langle T_{12}(0) \rangle}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (13.32)$$

ha le dimensioni di una velocità. Essa costituisce un valore tipico delle fluttuazioni turbolente u' e v' , se si eccettua la regione immediatamente prossima alla parete. Questa velocità caratteristica si chiama velocità di attrito, e gioca un ruolo fondamentale nell'analisi dimensionale dei flussi turbolenti.

13.8.1 Leggi di resistenza dei condotti

Un importante problema pratico legato al flusso turbolento nei condotti è la stima della resistenza di attrito offerta dai tubi a sezione circolare, che equivale a determinare un legame fra il gradiente di pressione e la portata.

Il coefficiente adimensionale che ci interessa è il coefficiente di attrito c_f , definito come il gradiente di pressione adimensionalizzato secondo la relazione:

$$c_f = -\frac{p_x r_h}{\rho U_b^2}$$

in cui U_b è la velocità media o *bulk velocity* (cioè la portata diviso per l'area). Considerando la relazione (13.31) fra il gradiente di pressione e lo sforzo medio a parete τ_w , e la definizione (13.32) per la velocità di attrito, si ottiene:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_b^2} = 2 \left(\frac{u_\tau}{U_b} \right)^2$$

Il legame cercato fra gradiente di pressione e portata si esprime utilmente in forma adimensionale esprimendo il coefficiente di attrito in funzione del numero di Reynolds basato sulla velocità media e sul raggio idraulico:

$$\text{Re}_b = \frac{U_b r_h}{\nu}$$

Formula dell'attrito di Blasius Nel caso laminare questo legame per il moto di Poiseuille entro un tubo a sezione circolare diviene $c_f = 8/\text{Re}$. Nel caso turbolento, la prima formula empirica, basata su misure sperimentali, è dovuta a Blasius, è:

$$c_f = 0.0665 \text{Re}^{-0.25} \quad (13.33)$$

e prende il nome di formula della resistenza di Blasius. Tale formula, particolarmente semplice, risulta anche ragionevolmente accurata, anche se il suo campo di validità si estende dalla transizione sino a non oltre $\text{Re} \simeq 50000$.

Contrariamente a quanto accade nel regime laminare, la dipendenza del coefficiente di attrito dal numero di Reynolds è relativamente debole: l'esponente che fornisce da dipendenza da Re è -1 nel caso laminare e solo -0.25 nel caso turbolento.

Formula dell'attrito di Prandtl Un'espressione migliore, dovuta a Prandtl, si ricava assumendo che, indipendentemente dal valore del numero di Reynolds, il profilo di velocità abbia una forma del tipo:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \log \frac{y u_\tau}{\nu} + A$$

in cui y è una coordinata che misura la distanza dalla parete del condotto. Ovviamente questo andamento presenta due incongruenze, sia sull'asse del tubo, dove

è discontinuo, sia a parete, dove la velocità risulta infinita. Entrambe le singolarità sono però integrabili. Basta allora integrare questa formula sulla sezione del condotto cilindrico per giungere alla seguente relazione implicita, che esprime il coefficiente di attrito in funzione del numero di Reynolds:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4 \log_{10} (\sqrt{c_f} \text{Re}_D) - 0.4 \quad (13.34)$$

In questa formula il numero di Reynolds Re_D è basato sul diametro idraulico del condotto.

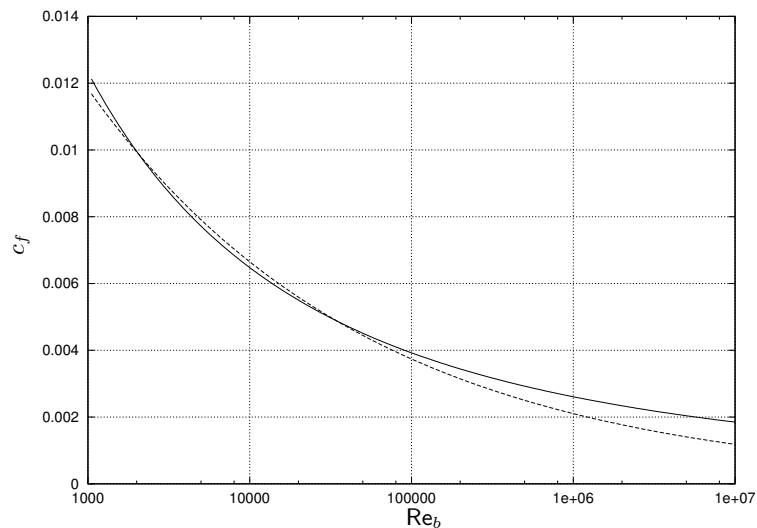


Figura 13.9 Variazione del coefficiente di attrito c_f con il numero di Reynolds Re_b : confronto fra la formula di Blasius (13.33) (linea tratteggiata) e la formula implicita di Prandtl (13.34) (linea continua).

La figura 13.9 riporta il confronto fra il valore del coefficiente di attrito predetto dalle due formule. Si noti come per valori relativamente elevati del numero di Reynolds la più accurata formula di Prandtl dia come risultato un valore di c_f non lontano da una costante. Fino a che $\text{Re} < 50000$ invece le due formule forniscono un risultato sostanzialmente equivalente.

Ricordiamo infine che spesso nella letteratura si trovano misure sperimentali del coefficiente di attrito descritte attraverso un ulteriore coefficiente di attrito λ definito come

$$\lambda = 4c_f.$$

13.8.2 Il profilo di velocità media

Una importante espressione funzionale per il profilo di velocità medio di un flusso turbolento che scorre su una parete si ottiene attraverso semplici considerazioni di analisi dimensionale.

È ragionevole supporre che, agli alti numeri di Reynolds propri dei flussi turbolenti, l'effetto della viscosità molecolare possa essere trascurato in gran parte del campo di moto, eccettuato un sottile strato adiacente alla parete. Viceversa si può ipotizzare che ciò che succede in questo strato sia relativamente indipendente dalle caratteristiche in grande del flusso, ad esempio dalla geometria del condotto, e dipenda solo dall'intensità delle fluttuazioni turbolente, che hanno un valore tipico espresso dalla velocità caratteristica u_τ .

In generale la velocità è $u = u(y, \tau_w, h, \nu)$. Adimensionalizzando le velocità con la velocità di attrito e le lunghezze con la lunghezza di riferimento h tipica delle grandezze esterne, i parametri da cui può dipendere il profilo adimensionale di velocità media si riducono a due:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u}{u_\tau} \left(\frac{y}{h}, \frac{yu_\tau}{\nu} \right)$$

La quantità adimensionale yu_τ/ν misura la distanza dalla parete adimensionalizzata con le quantità "interne", e si indica spesso con un indice +:

$$\frac{yu_\tau}{\nu} = y^+$$

ed analogamente la velocità u/u_τ si indica con u^+ .

Wall layer e defect layer Nello strato più prossimo alla parete, che prende il nome di *wall layer*, y/h è prossimo a zero, e solo la viscosità molecolare può influenzare il profilo di velocità. Nella regione più vicina alla parete si ha dunque:

$$\frac{u}{u_\tau} = f \left(\frac{yu_\tau}{\nu} \right) = f(y^+) \quad (13.35)$$

Nello strato più lontano, dove al contrario y^+ assume valori molto elevati, il profilo di velocità adimensionale è sensibile alla geometria del condotto ma non alla viscosità molecolare, e si ha:

$$\frac{U_c - u}{u_\tau} = F \left(\frac{y}{h} \right) \quad (13.36)$$

dove U_c è per esempio la velocità massima al centro del condotto. Siccome non è possibile imporre a questo profilo "esterno" la condizione di aderenza alla parete, possono essere individuate solo differenze di velocità. Dato che in questo strato viene specificata dalla (13.36) il difetto di velocità $U_c - u$, questa regione prende il nome di *defect layer*.

Zona logaritmica di raccordo I profili di velocità nello strato interno e nello strato esterno devono necessariamente raccordarsi in una zona intermedia, in cui y^+ è grande ma contemporaneamente y/h è piccolo. Una zona di questo tipo esiste sicuramente, in quanto il rapporto fra le due coordinate è:

$$\frac{y^+ h}{y} = \frac{u_\tau h}{\nu} = \text{Re}_\tau$$

ed è cioè pari al numero di Reynolds Re_τ basato sulla velocità di attrito e su una scala di lunghezza tipica della zona esterna. La separazione fra le due zone è quindi garantita dal valore necessariamente elevato del numero di Reynolds.

Si vede facilmente, solo in base a considerazioni di tipo dimensionale, che il raccordo è possibile solo se il profilo di velocità adimensionale assume nella regione intermedia un andamento logaritmico. Se infatti per y^+ grande la forma asintotica della funzione $f(y^+)$ è del tipo:

$$f(y^+) \simeq c + d \log y^+$$

il profilo di velocità interno (13.35) nella zona di raccordo diventa:

$$\frac{u}{u_\tau} \simeq c + d \log y^+ = c + d \log y + d \log \frac{u_\tau}{\nu} \quad (13.37)$$

Analogamente se la forma asintotica della funzione $F(y/h)$ è del tipo:

$$F\left(\frac{y}{h}\right) \simeq C + D \log \frac{y}{h}$$

il profilo di velocità esterno (13.36) nella zona di raccordo diventa:

$$\frac{u}{u_\tau} \simeq \frac{U_c}{u_\tau} - C - D \log y + D \log h \quad (13.38)$$

I due andamenti (13.37) e (13.38) possono coincidere solo se il termine $\log y$ è moltiplicato dallo stesso coefficiente. Segue quindi che $D = -d$. Inoltre, eguagliando i termini costanti, deve essere:

$$\frac{U_c}{u_\tau} = C - D \log h + c + d \log \frac{u_\tau}{\nu} = C + c + \log \frac{h u_\tau}{\nu} = \text{cost} + \text{Re}_\tau$$

Per inciso, notiamo che la legge di attrito di Prandtl (13.34) è stata ricavata integrando sulla sezione del condotto circolare il profilo di velocità dato dalla (13.38), trascurando cioè il contributo alla portata complessiva del profilo di velocità nello strato interno. Il contributo del profilo nella regione interna, per quanto poco importante dal punto di vista quantitativo, è proprio quello che permette di rimuovere la singolarità alla parete.

Un procedimento più immediato Il risultato che nella regione intermedia fra la regione interna e quella esterna il profilo adimensionale di velocità media debba avere un andamento logaritmico può essere ricavato anche mediante un ragionamento dimensionale ancora più immediato.

Nella regione intermedia infatti né la viscosità molecolare né la geometria del condotto sono rilevanti, e le differenze di velocità media possono dipendere solo dalla distanza dalla parete e dall'intensità caratteristica delle fluttuazioni turbolente di velocità, che sappiamo essere la velocità di attrito. In particolare il gradiente di velocità può dipendere da queste grandezze solo nella forma:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u_\tau}{y}$$

da cui, per integrazione, si ottiene immediatamente una dipendenza della velocità u/u_τ dal logaritmo della distanza dalla parete.

13.8.3 La legge universale della parete

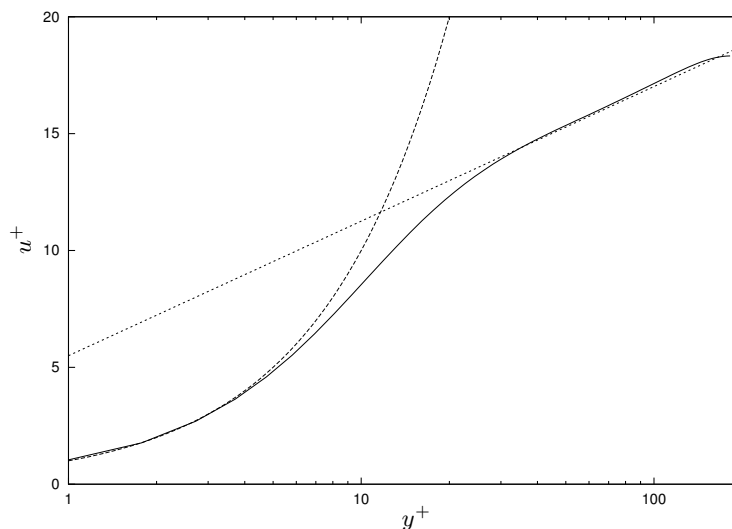


Figura 13.10 Profilo medio di velocità per il flusso turbolento in un canale piano indefinito, confrontato con la legge lineare $u^+ = y^+$ (linea a tratto corto) e con la legge logaritmica $u^+ = 2.5 \log y^+ + 5.5$ (linea a tratto lungo). DNS degli autori a $Re_\tau = 180$.

Un tipico profilo di velocità media nel wall layer è rappresentato in figura 13.10. Per $y^+ < 5$ il profilo si accorda molto bene con la legge lineare:

$$u^+ = y^+$$

che si ottiene eguagliando lo sforzo totale τ_w al solo termine viscoso $\mu \partial u / \partial y$. In questa zona quindi gli sforzi di Reynolds sono trascurabili rispetto allo sforzo viscoso: questa zona prende il nome di substrato viscoso dello strato limite turbolento.

Per $y^+ > 30$ invece il profilo di velocità è ben rappresentato dalla legge logaritmica:

$$u^+ = \frac{1}{k} \log y^+ + A$$

dove $k = 0.41$ è la costante di von Karman, mentre la costante A vale 5.5. Tale legge, essendo indipendente dalla geometria del condotto, ha come la legge lineare carattere universale. L'ampiezza della regione logaritmica dipende naturalmente dal valore del numero di Reynolds, e quindi non è particolarmente elevata nel caso rappresentato in figura, dove Re è relativamente basso. In ogni caso, la parte più esterna del profilo di velocità dipende dalle coordinate esterne, e quindi si presenta in modo diverso a seconda del tipo di flusso (strato limite, corrente nel canale, etc).

Un profilo di velocità come quello rappresentato in figura si dice legge universale della parete, e vale per condotti piani o circolari o di forma diversa, ed anche per flussi quasi-paralleli come strati limite turbolenti, che si differenziano invece per la forma della funzione che esprime il difetto di velocità. Una certa variabilità nel valore della costante A si verifica per flussi manipolati in modo da ottenere riduzione di resistenza di attrito (il valore di A aumenta) oppure flussi su parete non liscia (il valore di A diminuisce). Ricordiamo anche che la validità empirica della legge di parete supera di molto i limiti sotto i quali è stata ricavata. Si verifica infatti empiricamente che il profilo di velocità segue abbastanza bene la legge della parete anche in presenza di (moderati) gradienti di pressione non nulli, o in presenza di curvatura trasversale. I valori numerici delle costanti in gioco presentano però una certa variabilità.

