
Quando il numero di Reynolds è elevato, gli effetti della viscosità restano confinati in uno strato sottile (lo strato limite) molto prossimo alla superficie del corpo. Sulla base di questa osservazione, nella parte del campo di moto interessata dalla viscosità si può risolvere un problema differenziale semplificato rispetto alle equazioni viscose complete, ma che permette di imporre l'adesione del fluido alla parete. Queste equazioni (le equazioni dello strato limite) vanno poi opportunamente accoppiate a quelle che reggono il moto all'esterno dello strato limite. Descriviamo in questo capitolo le equazioni dello strato limite laminare nel caso lineare e nel caso stazionario. Accenneremo poi alle soluzioni ottenibili per similitudine e mediante metodi approssimati.

Indice del capitolo

12.1	Concetto di strato limite	284
12.2	Gli sviluppi interno ed esterno	285
12.2.1	Lo sviluppo esterno	285
12.2.2	Lo sviluppo interno	287
12.2.3	Le condizioni all'interfaccia	289
12.2.4	Risoluzione in sequenza	290
12.2.5	Strato limite all'ordine zero	291
12.3	Il caso temporale (lineare)	292
12.3.1	Soluzione per separazione delle variabili	293
12.3.2	Soluzioni simili: il primo problema di Stokes	296
12.3.3	Soluzione con la funzione di Green: dominio di dipendenza	299
12.4	Il caso stazionario (non lineare)	302
12.4.1	Le equazioni con la funzione di corrente	302
12.4.2	Le equazioni nella forma di von Mises	302
12.5	Le soluzioni simili di Falkner-Skan	304
12.5.1	La resistenza di attrito di una lastra piana	310
12.5.2	Lo spessore di spostamento	311

12.6 Soluzioni simili per strati limite liberi	313
12.6.1 Il getto bidimensionale	314
12.6.2 Lo strato di mescolamento	317
12.6.3 La scia	318
12.7 La resistenza dovuta alla viscosità	319
12.7.1 L'equazione integrale di von Kàrmàn	321
12.8 Soluzioni approssimate per lo strato limite	324
12.8.1 Il metodo di Polhausen	324
12.8.2 Il metodo di Thwaites	326
12.9 Calcolo della separazione: Stratford	327

12.1 Concetto di strato limite

Il comportamento di un fluido reale, che è viscoso ma con coefficiente di viscosità molto piccolo, è profondamente diverso da quello di un fluido ideale, per il quale la viscosità è nulla. La controparte matematica di questa differenza consiste nel fatto che le soluzioni delle equazioni non viscosi possono essere molto diverse da quelle delle equazioni viscosi quando la viscosità tende a zero.

Nelle equazioni di Navier–Stokes i termini viscosi sono moltiplicati per un fattore pari al reciproco del numero di Reynolds. Si potrebbe pensare che, al crescere di questo parametro adimensionale, l'effetto dei termini viscosi divenga sempre meno importante, fino a poter essere trascurato nel limite di $Re \rightarrow \infty$. In realtà se i termini viscosi vengono semplicemente cancellati dalle equazioni di Navier–Stokes, l'ordine delle equazioni ne risulta abbassato dal secondo al primo: le condizioni al contorno (che nel caso viscoso comprendono anche quella di adesione del fluido alla parete) vengono ad essere in soprannumero e non possono essere soddisfatte tutte contemporaneamente.

Le condizioni che non possono essere più soddisfatte nel limite di numero di Reynolds infinito si recuperano in una regione molto sottile prossima alla parete, caratterizzata da scale spaziali nella direzione parallela al moto molto diverse da quelle tipiche della direzione normale. Queste due scale stanno fra di loro proprio in un rapporto tale da rendere non più trascurabili i termini che invece si pensava di poter trascurare: all'interno dello strato limite, che è molto sottile, le derivate seconde delle variabili fluidodinamiche sono elevate ed i termini viscosi, che sono dati da derivate seconde moltiplicate per la viscosità, non sono trascurabili anche nel limite di viscosità piccola.

Il cambio (espansione) di coordinate L'entità degli effetti viscosi è quantificata dal parametro numero di Reynolds:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

in cui occorre definire una lunghezza L ed una velocità U tipiche del fenomeno in esame. Non sempre però tali lunghezza e velocità sono caratteristiche

dell'intero campo di moto. Nel caso dello strato limite, oltre ad una dimensione tipica L in direzione longitudinale (per esempio, la lunghezza del corpo su cui lo strato limite si sviluppa), esiste una dimensione tipica δ in direzione normale alla superficie del corpo, lo spessore dello strato limite.

Lo spessore δ si determina ragionando sull'ordine di grandezza di alcuni termini delle equazioni del moto, e risulta legato alla scala L secondo la relazione:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}L$$

Per giustificare questo legame, basta considerare una equazione del tipo:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ed effettuare un cambio di coordinate consistente in una trasformazione di scala generica della coordinata y , cioè:

$$y = \epsilon Y \quad (12.1)$$

determinando ϵ in modo che il secondo membro sia confrontabile con il primo.

L'equazione nella nuova variabile Y diviene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$$

ed il fattore di scala ϵ che rende confrontabili i termini viscosi con i termini a primo membro è proprio il reciproco della radice quadrata del numero di Reynolds:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (12.2)$$

12.2 Gli sviluppi interno ed esterno

Dopo aver introdotto il parametro piccolo ϵ secondo la relazione (12.2), rappresentiamo la soluzione in serie di Taylor rispetto ad ϵ . Occorre effettuare due sviluppi in serie, corrispondenti alle due diverse scale L e $\delta = \epsilon L$ caratteristiche del moto. Il primo sviluppo (lo sviluppo esterno) rappresenta la zona esterna del flusso, ed il secondo (lo sviluppo interno) la zona interna, ovvero lo strato limite. Tali sviluppi dovranno soddisfare, oltre alle condizioni al contorno del problema completo (cioè a parete per lo strato limite e all'infinito per il problema esterno), opportune ulteriori condizioni nella regione di interfaccia.

12.2.1 Lo sviluppo esterno

Poniamoci, senza perdere di generalità, nel caso bidimensionale, con fluido incomprimibile, parete piana e asse x del sistema di coordinate orientato parallelamente alla parete. Sviluppiamo la soluzione nella zona esterna come:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_0^{(e)}(x, y) + \epsilon u_1^{(e)}(x, y) + \epsilon^2 u_2^{(e)}(x, y) + \dots \\
v(x, y) &= v_0^{(e)}(x, y) + \epsilon v_1^{(e)}(x, y) + \epsilon^2 v_2^{(e)}(x, y) + \dots \\
p(x, y) &= p_0^{(e)}(x, y) + \epsilon p_1^{(e)}(x, y) + \epsilon^2 p_2^{(e)}(x, y) + \dots
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Consideriamo poi le equazioni di Navier–Stokes, scritte direttamente in forma adimensionale ed in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_t + uu_x + vv_y + p_x = \frac{1}{\text{Re}}(u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + uv_x + vv_y + p_y = \frac{1}{\text{Re}}(v_{xx} + v_{yy}) \end{cases} \tag{12.4}$$

e procediamo sostituendovi gli sviluppi esterni (12.3) per le variabili.

Ordine zero Raccogliamo insieme i termini dello stesso ordine in ϵ ; eguagliando i termini in ϵ^0 si ottiene:

$$\begin{cases} u_{0,x}^{(e)} + v_{0,y}^{(e)} = 0 \\ u_{0,t}^{(e)} + u_0^{(e)}u_{0,x}^{(e)} + v_0^{(e)}u_{0,y}^{(e)} + p_{0,x}^{(e)} = 0 \\ v_{0,t}^{(e)} + u_0^{(e)}v_{0,x}^{(e)} + v_0^{(e)}v_{0,y}^{(e)} + p_{0,y}^{(e)} = 0 \end{cases} \tag{12.5}$$

che non sono altro che le già note equazioni di Eulero, discusse in §2.2.

Ordini successivi Ora però si può procedere oltre nello sviluppo; eguagliando i termini in ϵ si ottiene infatti il seguente sistema:

$$\begin{cases} u_{1,x}^{(e)} + v_{1,y}^{(e)} = 0 \\ u_{1,t}^{(e)} + u_0^{(e)}u_{1,x}^{(e)} + u_1^{(e)}u_{0,x}^{(e)} + v_0^{(e)}u_{1,y}^{(e)} + v_1^{(e)}u_{0,y}^{(e)} + p_{1,x}^{(e)} = 0 \\ v_{1,t}^{(e)} + u_0^{(e)}v_{1,x}^{(e)} + u_1^{(e)}v_{0,x}^{(e)} + v_0^{(e)}v_{1,y}^{(e)} + v_1^{(e)}v_{0,y}^{(e)} + p_{1,y}^{(e)} = 0 \end{cases}$$

Eguagliando poi i termini in ϵ^2 si ottiene:

$$\begin{cases} u_{2,x}^{(e)} + v_{2,y}^{(e)} = 0 \\ u_{2,t}^{(e)} + u_0^{(e)} u_{2,x}^{(e)} + u_1^{(e)} u_{1,x}^{(e)} + u_2^{(e)} u_{0,x}^{(e)} + \dots + p_{2,x}^{(e)} = u_{0,xx}^{(e)} + u_{0,yy}^{(e)} \\ v_{2,t}^{(e)} + u_0^{(e)} v_{2,x}^{(e)} + u_1^{(e)} v_{1,x}^{(e)} + u_2^{(e)} v_{2,x}^{(e)} + \dots + p_{2,y}^{(e)} = v_{0,xx}^{(e)} + v_{0,yy}^{(e)} \end{cases}$$

Queste equazioni sono, al contrario delle precedenti, lineari e del primo ordine; è diventato più complicato il termine noto, che contiene termini provenienti dalla soluzione ai gradi inferiori.

Questi sistemi di equazioni (e tutti quelli che si potrebbero ricavare proseguendo nello sviluppo) necessitano naturalmente di condizioni al contorno. Mentre la condizione all'infinito è la stessa delle equazioni di Eulero, per poter dare le condizioni ad $y = 0$, ovvero all'interfaccia fra la zona esterna e lo strato limite, occorre prima procedere allo sviluppo delle equazioni nella zona interna.

12.2.2 Lo sviluppo interno

Operiamo anzitutto l'espansione di coordinate (12.1) nelle cambio di variabili: equazioni complete di Navier–Stokes (12.4), giungendo alla nuova formulazione in funzione delle coordinate x ed Y :

$$\begin{cases} u_x + \frac{1}{\epsilon} v_Y = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\epsilon} vv_Y + p_x = \epsilon^2 \left(u_{xx} + \frac{1}{\epsilon^2} u_{YY} \right) \\ v_t + uv_x + \frac{1}{\epsilon} vv_Y + \frac{1}{\epsilon} p_Y = \epsilon^2 \left(v_{xx} + \frac{1}{\epsilon^2} v_{YY} \right) \end{cases}$$

Analogamente a quanto fatto per la zona esterna con le relazioni (12.3), sviluppiamo in serie la soluzione nella zona interna come:

$$\begin{aligned} u(x, Y) &= u_0^{(i)}(x, Y) + \epsilon u_1^{(i)}(x, Y) + \epsilon^2 u_2^{(i)}(x, Y) + \dots \\ v(x, Y) &= v_0^{(i)}(x, Y) + \epsilon v_1^{(i)}(x, Y) + \epsilon^2 v_2^{(i)}(x, Y) + \dots \\ p(x, Y) &= p_0^{(i)}(x, Y) + \epsilon p_1^{(i)}(x, Y) + \epsilon^2 p_2^{(i)}(x, Y) + \dots \end{aligned} \quad (12.6)$$

Ordine -1 Eguagliando fra loro i termini di ordine più elevato, cioè quelli in ϵ^{-1} , si ottiene:

$$\begin{cases} v_{0,Y}^{(i)} = 0 \\ v_0^{(i)} u_{0,Y}^{(i)} = 0 \\ v_0^{(i)} v_{0,Y}^{(i)} + p_{0,Y}^{(i)} = 0 \end{cases}$$

Considerando la prima equazione, e ricordando che la condizione al contorno sul corpo è $v_0^{(i)}(x, 0) = 0$, si ricava subito che in tutta la zona interna è $v_0^{(i)} = \text{cost} = 0$. Di conseguenza la seconda equazione non fornisce alcuna informazione aggiuntiva, mentre la terza afferma che $p_{0,Y}^{(i)} = 0$, ovvero nella zona interna la pressione $p_0^{(i)}$ è costante lungo la coordinata Y .

Ordine zero Per i termini che moltiplicano ϵ^0 si ha invece:

$$\begin{cases} u_{0,x}^{(i)} + v_{1,Y}^{(i)} = 0 \\ u_{0,t}^{(i)} + u_0^{(i)} u_{0,x}^{(i)} + v_0^{(i)} u_{1,Y}^{(i)} + v_1^{(i)} u_{0,Y}^{(i)} + p_{0,x}^{(i)} = u_{0,Y}^{(i)} \\ v_{0,t}^{(i)} + u_0^{(i)} v_{0,x}^{(i)} + v_0^{(i)} v_{1,Y}^{(i)} + v_1^{(i)} v_{0,Y}^{(i)} + p_{1,Y}^{(i)} = v_{0,Y}^{(i)} \end{cases} \quad (12.7)$$

Tali equazioni possono semplificarsi tenendo conto dei risultati precedenti (in particolare $v_0^{(i)} = 0$), diventando semplicemente:

$$\begin{cases} u_{0,x}^{(i)} + v_{1,Y}^{(i)} = 0 \\ u_{0,t}^{(i)} + u_0^{(i)} u_{0,x}^{(i)} + v_1^{(i)} u_{0,Y}^{(i)} + p_{0,x}^{(i)} = u_{0,Y}^{(i)} \\ p_{1,Y}^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (12.8)$$

Notiamo che sono presenti termini di derivata seconda: l'equazione differenziale è del secondo ordine, e si possono assegnare condizioni al contorno di adesione alle pareti. Inoltre si vede subito che anche $p_1^{(i)}$ è costante con la coordinata Y .

Ordini successivi Per i termini proporzionali ad ϵ si ottiene infine:

$$\begin{cases} u_{1,x}^{(i)} + v_{2,Y}^{(i)} = 0 \\ u_{1,t}^{(i)} + u_0^{(i)} u_{1,x}^{(i)} + u_1^{(i)} u_{0,x}^{(i)} + v_1^{(i)} u_{1,Y}^{(i)} + v_2^{(i)} u_{0,Y}^{(i)} + p_{1,x}^{(i)} = u_{1,Y}^{(i)} \\ v_{1,t}^{(i)} + u_0^{(i)} v_{1,x}^{(i)} + v_1^{(i)} v_{1,Y}^{(i)} + p_{2,Y}^{(i)} = v_{1,Y}^{(i)} \end{cases}$$

in cui si vede che $p_2^{(i)}$ è il primo termine dello sviluppo della pressione a non essere costante lungo Y .

12.2.3 Le condizioni all'interfaccia

Dopo aver ricavato le equazioni per gli sviluppi interno ed esterno, occorre ora imporre che essi si raccordino con continuità l'uno con l'altro. Deve infatti esistere una regione (caratterizzata da valori piccoli di y e contemporaneamente valori grandi di Y) in cui gli sviluppi sono entrambi validi e rappresentano la stessa funzione. Occorre quindi considerare il limite dei due sviluppi in serie quando $Re \rightarrow \infty$ ma in modo tale che $y \rightarrow 0$ e contemporaneamente $Y \rightarrow \infty$. Questa condizione è possibile grazie alle due relazioni (12.1) e (12.2) che legano le due coordinate y ed Y attraverso il numero di Reynolds.

Consideriamo, a titolo di esempio, la sola componente longitudinale u della velocità (risultati analoghi varranno per v e p). Nella zona di raccordo deve essere:

$$u_0^{(i)}(x, Y) + \epsilon u_1^{(i)}(x, Y) + \dots = u_0^{(e)}(x, y) + \epsilon u_1^{(e)}(x, y) + \dots$$

Portando tutto nella stessa variabile Y si ha:

$$u_0^{(i)}(x, Y) + \epsilon u_1^{(i)}(x, Y) + \dots = u_0^{(e)}(x, \epsilon Y) + \epsilon u_1^{(e)}(x, \epsilon Y) + \dots$$

e sviluppando in serie di Taylor rispetto al parametro piccolo $y = \epsilon Y$ la soluzione esterna si ottiene infine:

$$\begin{aligned} u_0^{(i)}(x, Y) + \epsilon u_1^{(i)}(x, Y) + \dots &= u_0^{(e)}(x, 0) + \epsilon Y u_{0,y}^{(e)}(x, 0) + \dots \\ &+ \epsilon u_1^{(e)}(x, 0) + \epsilon^2 Y u_{1,y}^{(e)}(x, 0) + \dots \end{aligned}$$

Eguagliando i termini in ϵ^0 si ottiene la condizione di interfaccia:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} [u_0^{(i)}(x, Y) - u_0^{(e)}(x, 0)] = 0 \quad (12.9)$$

Questa condizione richiede che il valore a zero del termine zero della soluzione esterna coincida con il valore all'infinito del termine zero della soluzione interna.

Eguagliando i termini di ordine 1 in ϵ si ottiene invece la condizione non banale:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \left[u_1^{(i)}(x, Y) - Y u_{0,y}^{(e)}(x, 0) - u_1^{(e)}(x, 0) \right] = 0 \quad (12.10)$$

nella quale i singoli addendi possono anche essere infiniti, ma la somma deve andare a zero.

Proseguendo nell'eguaglianza dei termini di potenze superiori di ϵ , è possibile assegnare tutte le condizioni all'interfaccia per lo sviluppo troncato ad un numero qualsiasi di termini. Dall'uguaglianza dei termini di ordine due si vede ad esempio che deve essere:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \left[u_2^{(i)}(x, Y) - \frac{Y^2}{2} u_{0,yy}^{(e)}(x, 0) - Y u_{1,y}^{(e)}(x, 0) - u_2^{(e)}(x, 0) \right] = 0$$

12.2.4 Risoluzione in sequenza

Il problema completo consiste dunque, oltre ai due sviluppi interno ed esterno troncati all'ordine desiderato e alle usuali condizioni alla parete ($Y = 0$) e all'infinito ($y \rightarrow \infty$), anche delle opportune condizioni all'interfaccia. In linea di principio tutte le equazioni sono accoppiate, e lo sviluppo sarebbe più complicato che la soluzione del sistema di partenza. Fortunatamente però la soluzione delle equazioni può essere impostata in maniera sequenziale.

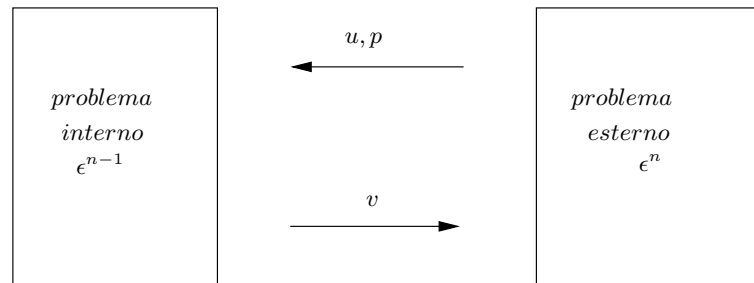


Figura 12.1 Risoluzione in sequenza delle equazioni dello strato limite: problema interno di ordine $n - 1$ e problema esterno di ordine n .

La logica della procedura sequenziale di soluzione è schematizzata nella figura 12.1. Essa prende le mosse dal termine -1 della soluzione interna: $v_0^{(i)}(x, Y) \equiv 0$. Per la condizione di interfaccia (12.9) applicata a v , ciò significa che deve essere $v_0^{(e)}(x, 0) = 0$, che è la condizione alla parete finora utilizzata per risolvere le equazioni di Eulero, e che trova qui la sua giustificazione. Con questa condizione, le equazioni di Eulero permettono di ricavare la soluzione esterna di ordine zero,

cioè $u_0^{(e)}(x, y)$, $v_0^{(e)}(x, y)$ e $p_0^{(e)}(x, y)$. Tale soluzione, ancora tramite la condizione all'interfaccia (12.9), fornisce le due condizioni per $p_0^{(i)}(x, \infty) = p_0^{(e)}(x, 0)$ e $u_0^{(i)}(x, \infty) = u_0^{(e)}(x, 0)$.

Equazioni dello strato limite A questo punto, ci sono condizioni al contorno sufficienti per poter risolvere le equazioni (12.8), che costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite $u_0^{(i)}$ e $v_1^{(i)}$. Tali equazioni si chiamano anche equazioni dello strato limite di ordine zero, e costituiscono il primo set non banale di equazioni interne. Le condizioni al contorno (rispetto alla direzione y) per queste equazioni sono:

$$\begin{aligned} u_0^{(i)}(t, x, 0) &= 0 \\ v_1^{(i)}(t, x, 0) &= 0 \\ u_0^{(i)}(t, x, \infty) &= u_0^{(e)}(t, x, 0) \\ p_0^{(i)}(t, x, \infty) &= p_0^{(e)}(t, x, 0) \end{aligned}$$

Una volta risolte le equazioni dello strato limite all'ordine zero, si torna alle condizioni di accoppiamento all'ordine successivo, cioè le (12.10), per ricavare una condizione al contorno per $v_1^{(e)}(x, 0)$, che risulta uguale non al valore all'infinito del corrispondente termine interno, ma all'opportuno limite lì indicato. Da questo punto la procedura si può ripetere in modo sequenziale.

La soluzione avviene quindi passando dalla zona interna alla zona esterna la componente v , e da quella esterna a quella interna u e p , ed iterando fino all'ordine desiderato la procedura sequenziale ora descritta. Nella pratica, è abbastanza frequente che occorra giungere fino alla soluzione del problema esterno al primo ordine, ovvero modificando la condizione al contorno per v nel problema esterno in modo da tenere in conto la modifica del flusso esterno indotta dalla presenza dello strato limite.

Limiti di questa trattazione Come osservazione conclusiva, notiamo che, almeno fino a questo ordine dello sviluppo, le equazioni sono valide anche per pareti (non troppo) curve, cioè con un raggio di curvatura di ordine L e non δ , come tipicamente avviene in un profilo alare. Si può vedere infatti, scrivendo le equazioni anche con i termini contenenti la curvatura, che le equazioni di ordine zero dello strato limite si presentano inalterate, e gli effetti della curvatura si iniziano a vedere solo in quelle di ordine uno. XXX AGGIUNGERE TURBOLENTO E CFR CAP. 13; SPOSTARE IL TUTTO ALTROVE

12.2.5 Strato limite all'ordine zero

Riguardo al sistema (12.8) di equazioni all'ordine zero, di cui ci occuperemo nel seguito del Capitolo, si può fare una prima semplice ma fondamentale osserva-

zione, sottolineando la mancanza, in tali equazioni, del numero di Reynolds. Ciò significa che, una volta che il valore del numero di Reynolds è sufficientemente elevato per dare significato ad uno sviluppo in serie di potenze di ϵ , la soluzione è valida per ogni Re , e questo costituisce un grosso vantaggio.

La soluzione dipende solo da $u_0^{(e)}(t, x, 0)$ e $p_0^{(e)}(t, x, 0)$, che derivano dalla soluzione del problema esterno all'ordine zero. Tali quantità sono inoltre non indipendenti, ma legate fra di loro dalla relazione di Bernoulli. Scrivendola nella più generale forma instazionaria (2.14), si ha:

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \frac{V^2}{2} \right) = 0.$$

Scambiando poi l'ordine delle derivate spaziali e temporali, proiettando in direzione x ed indicando esplicitamente che si tratta della soluzione esterna di ordine zero, si ottiene:

$$u_{0,t}^{(e)} + u_0^{(e)} u_{0,x}^{(e)} + p_{0,x}^{(e)} = 0$$

(In due dimensioni, questa relazione si può ricavare anche scrivendo le equazioni esterne di ordine zero alla parete, dove $v \equiv 0$.)

La pressione può quindi essere eliminata dalle equazioni, ed il sistema si riduce alla forma seguente, in cui sono stati omissi i pedici, e si è indicata per comodità con la lettera minuscola y la coordinata Y normale alla parete:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_t + uu_x + vv_y = u_{yy} + u_t^{(e)} + u^{(e)} u_x^{(e)} \end{cases} \quad (12.11)$$

A tale sistema, la cui seconda equazione è non lineare, va associato un set di condizioni al contorno, in cui non compare più esplicitamente la pressione:

$$\begin{aligned} u(t, x, 0) &= 0 \\ v(t, x, 0) &= 0 \\ u(t, x, \infty) &= u^{(e)}(t, x) \end{aligned}$$

Per la soluzione del sistema occorrono anche delle condizioni iniziali; per poter definire quali condizioni iniziali sono necessarie perché il problema sia ben posto, occorre studiare meglio la natura del problema e le caratteristiche del dominio di dipendenza, come verrà fatto in §12.3.3

12.3 Il caso temporale (lineare)

Il sistema (12.11) assume un aspetto più semplice quando le tre variabili indipendenti x, y, t si riducono a due: ciò si può verificare nel caso stazionario, oppure

nel caso indipendente dalla coordinata x , che consiste nel considerare una legge di moto instazionaria ma una parete indefinitamente estesa nella direzione x . Quest'ultimo caso, che diremo per brevità caso temporale, è interessante perché schematizza in modo generale moti su scale di tempo abbastanza piccole da non risentire dell'esistenza di un bordo di attacco.

Nel problema temporale, l'equazione di continuità si limita ad affermare che la componente normale della velocità, essendo nulla alla parete ed avendo derivata rispetto ad y nulla, resta identicamente nulla all'interno di tutto lo strato limite. Tenuto conto di questo risultato, il problema temporale dello strato limite consiste nel determinare le soluzioni dell'equazione:

$$u_t = u_{yy} + u_t^{(e)} \quad (12.12)$$

da risolversi con opportune condizioni al contorno. Si noti che sono spariti i termini non lineari.

L'equazione differenziale trovata è l'equazione del calore (o della diffusione), ed è di tipo parabolico. Un'equazione parabolica si può considerare come caso limite di una equazione iperbolica in cui le direzioni caratteristiche divengono coincidenti ed opposte, ed il dominio di dipendenza si estende a tutto un semipiano. Come si vedrà in seguito, le condizioni al contorno che assicurano che il problema è ben posto consistono in una condizione iniziale assegnata per tutte le y , e in tre condizioni a due quote y per tutti i valori di t . Nel caso specifico, si impone di solito:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u_i(y) \\ u(t, 0) &= 0 \\ v(t, 0) &= 0 \\ u(t, \infty) &= u^{(e)}(t) \end{aligned}$$

Il problema temporale è particolarmente semplice e significativo per il fatto che è *lineare*. Per la sua risoluzione si possono allora usare tutte le tecniche risolutive già utilizzate per l'equazione di Laplace.

12.3.1 Soluzione per separazione delle variabili

Un primo tentativo per trovare soluzioni dell'equazione (12.12) consiste nella separazione delle variabili. Si suppone cioè che esistano soluzioni del tipo:

$$u(t, y) - u^{(e)}(t) = F(t) G(y)$$

Se la soluzione può essere espressa in questa forma, l'equazione dello strato limite (12.12) diviene, derivando e dividendo per il prodotto FG :

$$\frac{F'}{F} - \frac{G''}{G} = 0.$$

Perché ciò sia possibile, i due addendi, funzioni il primo solo di t ed il secondo solo di y , devono necessariamente essere costanti. Tali costanti, inoltre, sono legate dalla relazione data dall'equazione stessa. Quindi:

$$\frac{F'}{F} = A; \quad \frac{G''}{G} = A.$$

Con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati in §5.1 si può allora affermare che la soluzione generale dell'equazione dello strato limite nel caso temporale è esprimibile come combinazione lineare (o nell'integrale) di soluzioni elementari del tipo:

$$u(t, y) - u^{(e)}(t) = e^{at} e^{\pm\sqrt{a}y} \quad (12.13)$$

dove, in dipendenza dal tipo di condizioni al contorno, l'esponente a oppure quello \sqrt{a} saranno immaginari puri. Il segno dell'esponente viene determinato in modo che la funzione $u - u^{(e)}$ vada a zero quando $y \rightarrow \infty$.

Condizioni per $t=0$: problema ai valori iniziali Supponiamo ora di conoscere una condizione al contorno $u(0, y) = u_0(y)$ sulla retta $t = 0$ per $-\infty < y < +\infty$. La soluzione generale sarà una combinazione lineare di singole soluzioni del tipo (12.13), pesate attraverso opportuni coefficienti \mathbb{C} funzioni del parametro a . Occorre però considerare solo quelle particolari soluzioni che non vadano all'infinito quando $y \rightarrow \pm\infty$. Si considerino quindi solo i termini con $a = -b^2$ con b reale e quindi \sqrt{a} immaginario puro; posto $\sqrt{a} = ib$, si ottiene:

$$u(t, y) - u^{(e)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}(b) e^{-b^2 t} e^{iby} db$$

da cui si nota come la soluzione ha un andamento che decade nel tempo secondo una legge esponenziale.

I coefficienti $\mathbb{C}(b)$, funzioni del parametro reale b , si calcolano utilizzando l'informazione della condizione al contorno:

$$u_0(y) - u^{(e)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}(b) e^{iby} db$$

Questa relazione, che è una trasformata di Fourier, può essere invertita per esprimere i coefficienti in funzione della condizione al contorno:

$$\mathbb{C}(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(y) - u^{(e)}(0)) e^{-iby} dy$$

e questi coefficienti, inseriti nell'espressione della soluzione, permettono di valutarla in forma chiusa:

$$u(t, y) = u^{(e)}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(y) - u^{(e)}(0)) e^{-iby} dy \right) e^{-b^2 t} e^{iby} db$$

Condizioni per $y = 0$: problema ai limiti Consideriamo ora una condizione al contorno del tipo $u(t, 0) = u_0(t)$, cioè assegnata sulla parete ad $y = 0$ (oltre che all'infinito, dove la velocità deve coincidere con la velocità esterna), per $-\infty < t < +\infty$. Assumiamo per semplicità $u^{(e)}(t) = 0$. La soluzione generale delle equazioni dello strato limite sarà una combinazione lineare di singole soluzioni del tipo (12.13), pesate attraverso opportuni coefficienti \mathbb{C} funzioni del parametro a . Occorre però considerare solo quelle soluzioni che non divergono quando $t \rightarrow \pm\infty$, da cui segue che l'esponente a deve essere immaginario puro. Posto allora $a = ib$ con b reale, la soluzione è:

$$u(t, y) - u^{(e)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}(b) e^{ibt} e^{-\sqrt{ib}y} db$$

dove, per avere coerenza con le condizioni all'infinito, si è posto il segno negativo alla radice, intendendo tale radice definita come quella con parte reale positiva.

I coefficienti $\mathbb{C}(b)$, funzioni del parametro reale b , si valutano utilizzando l'informazione della condizione al contorno:

$$u_0(t) - u^{(e)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}(b) e^{ibt} db$$

Tale relazione, che è una trasformata di Fourier, può essere invertita per esprimere i coefficienti in funzione della condizione al contorno:

$$\mathbb{C}(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(t) - u^{(e)}(t)) e^{-ibt} dt$$

e questi coefficienti, inseriti nell'espressione della soluzione, permettono di valutarla in forma chiusa.

Strato limite su parete in moto armonico Un esempio significativo che ricade all'interno di questa categoria è costituito dallo strato limite che si sviluppa su una parete in movimento con una legge temporale nota, sopra la quale si trovi un fluido in quiete all'infinito. Per esempio il caso, noto anche come secondo problema di Stokes, di una parete che oscilla con legge temporale data da $u(t, 0) - u^{(e)}(t) = A \cos(bt)$, ha soluzione data da:

$$u(t, y) = A \Re \left[e^{-\sqrt{ib}y} e^{ibt} \right] \tag{12.14}$$

Dal momento che stiamo risolvendo un problema lineare, questa soluzione particolare può essere utilizzata per costruire per sovrapposizione la soluzione corrispondente ad un arbitrario movimento periodico della parete.

Spessore dello strato di Stokes Osservando l'esponentiale in y , si può ottenere una stima dell'ordine di grandezza della distanza δ dalla parete a cui il moto del fluido si riduce a zero. Scegliendo per δ quella quota in cui l'esponente diviene -1 e la funzione esponenziale si riduce quindi a circa il 35% del suo valore per $y = 0$, si ha:

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{b}}$$

ovvero diminuisce all'aumentare della frequenza di oscillazione. Per determinare tale distanza in termini dimensionali, si introducono una lunghezza $L^{(d)}$ ed una velocità $V^{(d)}$ di riferimento; indicando con il suffisso (d) le grandezze dimensionali, per cui $\omega^{(d)}$ è la frequenza di oscillazione della parete, si ha:

$$t = \frac{t^{(d)}V^{(d)}}{L^{(d)}}; \quad y = \sqrt{\frac{L^{(d)}V^{(d)}}{\nu}} \frac{y^{(d)}}{L^{(d)}}; \quad b = \omega^{(d)} \frac{L^{(d)}}{V^{(d)}}$$

Sostituendo nella soluzione (12.14), si ottiene:

$$u^{(d)}(t^{(d)}, y^{(d)}) = A \Re \left[e^{i\omega^{(d)}t^{(d)}} e^{-\sqrt{i\omega^{(d)}/\nu}y^{(d)}} \right]$$

Lo spessore tipico $\delta^{(d)}$ risulta quindi dato da:

$$\delta^{(d)} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega^{(d)}}}$$

in cui la lunghezza e la velocità di riferimento sono scomparse, dato che il problema è indefinito e non ammette scale particolari. Lo spessore dello strato di Stokes risulta quindi determinato, oltre che dalla viscosità cinematica del fluido, solo dalla frequenza dell'oscillazione, e si riduce al crescere di questa.

12.3.2 Soluzioni simili: il primo problema di Stokes

Per trovare soluzioni della (12.12) si può anche tentare un cambio di variabili del tipo:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{t}}; \quad T = t$$

per cui le derivate si trasformano nel modo seguente:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = u_T - \frac{\eta}{2T} u_\eta; \quad u_{yy} = \frac{1}{T} u_{\eta\eta}$$

(Si può in modo generale condurre il ragionamento per un generico cambio di variabili $\eta = y/h(t)$, dove $h(t)$ è una funzione da determinare. Per questa via

quando $h(t) = cost$ si riottiene il caso discusso in §12.3.1, mentre si vede che si possono avere altre soluzioni solo quando $h(t) = \sqrt{t}$.

L'equazione nelle nuove variabili T ed η , dopo aver moltiplicato per T , diviene:

$$Tu_T - \frac{\eta}{2}u_\eta = u_{\eta\eta}$$

e se ne possono cercare soluzioni in variabili separabili, che abbiano cioè la forma:

$$u(T, \eta) = F(T)G(\eta)$$

L'equazione diviene, derivando e dividendo tutto per il prodotto FG :

$$\frac{TF'}{F} - \frac{\eta/2G' + G''}{G} = 0$$

in cui i due addendi, funzioni il primo solo di T ed il secondo solo di η , devono essere costanti. Tali costanti inoltre sono legate dalla relazione data dall'equazione stessa. Quindi si trovano le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{TF'}{F} = m; \quad \frac{\eta/2 G' + G''}{G} = m$$

L'equazione per F è piuttosto semplice, e (come già visto nel Capitolo 4) il suo integrale è dato da:

$$F = T^m \tag{12.15}$$

Più complessa è l'integrazione della seconda equazione:

$$G'' + \frac{\eta}{2}G' = mG \tag{12.16}$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine, nota come equazione di Hermite, che ha soluzioni particolarmente semplici quando la costante m è un numero intero o la metà di un numero intero. Le soluzioni corrispondenti ai diversi valori di m formano un set di funzioni ortogonali, e sono tutte le derivate e tutti gli integrali della soluzione base costituita dalla funzione gaussiana:

$$G(\eta) = e^{-\eta^2/4} \tag{12.17}$$

Non è difficile verificare che le derivate prima e seconda di questa soluzione base soddisfano identicamente l'equazione (12.16) quando $m = -1/2$. Derivando poi una volta l'equazione di Hermite si vede che anche la derivata prima della soluzione (12.17) è soluzione della stessa equazione, in cui però la costante m valga $-1/2 - 1/2 = -1$. Infatti l'equazione derivata una volta è:

$$G''' + \frac{\eta}{2}G'' + \frac{1}{2}G' = -\frac{1}{2}G'$$

che si può scrivere anche come

$$(G')'' + \frac{\eta}{2}(G')' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) G'$$

mettendo quindi in evidenza come si sia ottenuta ancora una equazione di Hermite nella funzione incognita G' e con $m = -1$.

In generale si può quindi affermare che la derivata n -sima della funzione (12.17) sarà soluzione dell'equazione di Hermite (12.16) con $m = -1/2 - n/2$, per $n > 0$. Lo stesso risultato vale inoltre per gli integrali n -simi della gaussiana (12.17), che sono soluzioni dell'equazione di Hermite con $m = -1/2 + n/2$, $n > 0$. Gli integrali della gaussiana però non si annullano all'infinito.

Indichiamo allora con $H_n(\eta)$ le derivate n -sime della funzione $e^{-\eta^2/4}$ quando $n > 0$, cioè:

$$H_n(\eta) = \frac{d^n}{d\eta^n} e^{-\eta^2/4}$$

Abbiamo così individuato una famiglia di soluzioni simili dell'equazione (12.12) dello strato limite temporale. Combinando le soluzioni $H_n(\eta)$ con l'integrale (12.15) dell'altra equazione differenziale ordinaria, tali soluzioni in funzione delle variabili indipendenti t ed y sono date da:

$$u_n(t, y) = t^{-(n+1)/2} H_n\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) \quad (12.18)$$

La formula ha senso anche per $n < 0$, se la funzione H_n viene definita per n negativo come $-n$ volte l'integrale della soluzione base (12.17); ad esempio:

$$H_{-1}(\eta) = \int_0^\eta e^{-p^2/4} dp$$

La soluzione per il caso $n = 0$ (e quindi $m = -1/2$) assume la forma:

$$u_0(t, y) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-y^2/4t} \quad (12.19)$$

La soluzione che si ottiene per $n = -1$ ed $m = 0$ risulta particolarmente interessante, in quanto non contiene il tempo a fattore dell'esponenziale. Essa rappresenta la soluzione del problema di una parete che al tempo $t = 0$ subisce un avviamento impulsivo; questo caso prende anche il nome di primo problema di Stokes.

$$u_{-1}(t, y) = H_{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^{y/\sqrt{t}} e^{-p^2/4} dp$$

Il valore di u_{-1} per $y = 0$ risulta uguale a $-\sqrt{\pi}$, e l'integrale a secondo membro è, a meno della normalizzazione, la funzione degli errori $\text{erf}(x)$, definita come:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

Se si vuole normalizzare la soluzione in modo che la velocità sia unitaria alla parete, la soluzione si scrive direttamente attraverso la funzione complementare degli errori:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-p^2} dp$$

come:

$$u_{-1}(t, y) = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)$$

La funzione H_{-3} consente invece di costruire la soluzione del problema di una parete che, al tempo $t = 0$, si metta in moto con accelerazione costante.

12.3.3 Soluzione con la funzione di Green: dominio di dipendenza

Grazie alla linearità del problema, in maniera analoga al ragionamento svolto in §5.5 per l'equazione di Laplace si può determinare una funzione di Green $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, t_0, y, y_0)$ per il problema dello strato limite temporale. Questo permette di trarre informazioni sul tipo di dominio di dipendenza dell'equazione, e tali conclusioni risulteranno, come si vedrà in seguito, valide anche per il caso non lineare.

Il problema aggiunto dello strato limite temporale si costruisce moltiplicando l'equazione:

$$u_t - u_{yy} = 0$$

per una funzione \mathcal{G} , supposta per ora generica:

$$\iint \mathcal{G} (u_t - u_{yy}) dt dy = 0$$

Si deve ora integrare nello spazio y, t , fra gli estremi t_i e t_f e fra gli estremi y_i e y_f , utilizzando un'integrazione per parti che sposti le derivate applicate alla funzione u sulla funzione \mathcal{G} :

$$\int_{y_i}^{y_f} (\mathcal{G}u) dy \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} (\mathcal{G}u_y - \mathcal{G}_y u) dt \Big|_{y_i}^{y_f} - \iint (\mathcal{G}_t + \mathcal{G}_{yy}) u dt dy = 0$$

I primi due addendi sono da calcolarsi esclusivamente sul contorno, mentre il terzo va valutato all'interno del dominio di integrazione.

Ora si può scegliere la funzione \mathcal{G} come soluzione dell'equazione aggiunta avente una funzione delta di Dirac a termine noto, in modo che il calcolo dell'integrale di superficie nell'espressione precedente fornisca come risultato la funzione u :

$$-\mathcal{G}_t - \mathcal{G}_{yy} = \delta(t - t_0)\delta(y - y_0) \quad (12.20)$$

In questo modo l'integrale di superficie fornisce direttamente la soluzione in un generico punto interno $u(y_0, t_0)$, grazie alla proprietà integrale della funzione δ . Si noti però che, mentre per il problema di Laplace l'equazione aggiunta è ancora un'equazione di Laplace (si dice infatti che il problema di Laplace è autoaggiunto), qui l'equazione aggiunta ora scritta differisce dall'equazione di partenza, e quindi il problema non è autoaggiunto.

L'equazione aggiunta (12.20) è però di semplice soluzione, in quanto differisce dall'equazione di partenza solo perché ha t cambiato in $-t$. Le sue soluzioni allora si determinano cambiando t in $-t$ nelle soluzioni simili del tipo (12.19), già determinate nel paragrafo §12.3.2. Soluzioni di questo tipo presentano effettivamente una singolarità nell'origine del piano t, y , e convergono quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Consideriamo allora una funzione così definita (nel caso particolare di $y_0 = 0$ e $t_0 = 0$):

$$\mathcal{G}(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-t}} e^{+y^2/4t} & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

ed esaminiamone il tipo di singolarità. Tranne che nell'origine del piano, tale funzione va con continuità a zero passando dal semipiano $t < 0$ al semipiano $t > 0$. Integrando l'equazione aggiunta lungo un percorso a lati rettilinei e paralleli agli assi coordinati t, y che contenga l'origine, si ottiene:

$$\iint [\mathcal{G}_t + \mathcal{G}_{yy}] dy dt = \int_{y_i}^{y_f} [\mathcal{G}(t_f, y) - \mathcal{G}(t_i, y)] dy + \int_{t_i}^{t_f} [\mathcal{G}_y(t, y_f) - \mathcal{G}_y(t, y_i)] dt$$

Per la definizione della funzione \mathcal{G} , che è nulla per tutti i $t > 0$, si ha $\mathcal{G}(t_f, y) = 0$ e quindi anche il suo integrale è identicamente nullo. Inoltre:

$$- \int_{y_i}^{y_f} \mathcal{G}(t_i, y) dy = - \int_{y_i}^{y_f} \frac{1}{\sqrt{-t_i}} e^{y^2/4t_i} dy$$

Se y_i ed y_f tendono all'infinito rispettivamente negativo e positivo, questo integrale diviene quello della funzione degli errori, che vale:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = 2\sqrt{\pi}$$

Quando y_i ed y_f tendono all'infinito, infine, i due integrali da calcolarsi lungo i lati paralleli all'asse t tendono a zero in maniera esponenziale. Di conseguenza il fattore normalizzante perché l'integrale della funzione di Green abbia valore unitario è $-(2\sqrt{\pi})^{-1}$, e conduce alla seguente espressione per \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(t, y) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{-t}} e^{+y^2/4t} & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Questa funzione di Green permette dunque di esprimere la velocità $u(t_0, y_0)$ in un punto interno al dominio di calcolo, in funzione della velocità u e della sua derivata u_y da conoscersi solamente sul contorno.

Dal punto di vista del dominio di dipendenza, per poter scrivere la soluzione in un punto occorre conoscere la sola u sul lato parallelo all'asse y a $t = t_i$, cioè è necessaria una condizione iniziale, mentre sui due lati paralleli all'asse t occorre conoscere sia u che u_y , cioè sono necessarie due condizioni al contorno per ogni lato. Il dominio di dipendenza è del tipo $t < t_0$. Si ha quindi un problema ben posto quando si assegna una condizione sul contorno di un dominio aperto a C nel semipiano $t < t_0$, come mostrato schematicamente in figura 12.2.

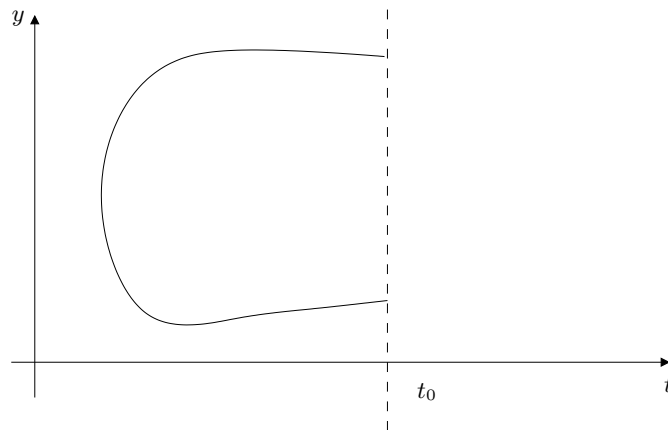


Figura 12.2 Le equazioni dello strato limite temporale richiedono condizioni su un dominio aperto a forma di C

Osserviamo inoltre, in analogia a quanto visto per l'equazione di Laplace, che su ogni lato parallelo all'asse t occorrono due condizioni, sulla funzione incognita e sulla sua derivata, che però non sono indipendenti fra loro. Come per Laplace, allora, si può utilizzare una diversa funzione di Green che abbia l'ulteriore caratteristica di annullare il coefficiente di una delle due funzioni (si veda §5.5.2), oppure scrivere un'equazione integrale aggiuntiva al contorno, e risolverla per via numerica (come descritto in §5.6.3).

12.4 Il caso stazionario (non lineare)

Dopo aver trattato i casi lineari, utili sia in quanto per sé interessanti sia per le conclusioni generali che consentono di trarre a riguardo del dominio di dipendenza, occorre ora affrontare il caso stazionario, che non è lineare e non permette quindi l'utilizzo di tutte quelle tecniche di analisi (con, alla base, la sovrapposizione degli effetti) che sono state utilizzate nei paragrafi precedenti.

Le equazioni del moto, in questo caso, si scrivono come:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ uu_x + vv_y = u_{yy} + U_e U_{e,x} \end{cases} \quad (12.21)$$

da risolversi con le condizioni al contorno:

$$u(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = 0; \quad u(x, \infty) = U_e(x) \quad (12.22)$$

e con una opportuna condizione iniziale, del tipo:

$$u(0, y) = u_i(y)$$

12.4.1 Le equazioni con la funzione di corrente

Una prima possibilità di semplificazione consiste nell'eliminare una funzione incognita e l'equazione di continuità, grazie all'introduzione della funzione di corrente ψ . Essa infatti è definita in modo da soddisfare automaticamente l'equazione di continuità, ovvero è tale che $\psi_y = u$ e $\psi_x = -v$. L'unica equazione da risolvere è:

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \psi_{yyy} + U_e U_{e,x} \quad (12.23)$$

L'equazione è del terzo ordine, e questo rende evidente il fatto che occorrono tre condizioni al contorno in y anche per il sistema (12.21). Le tre condizioni al contorno (12.22) in termini di funzione di corrente si scrivono:

$$\psi_x(x, 0) = 0; \quad \psi_y(x, 0) = 0; \quad \psi_y(x, \infty) = U_e(x) \quad (12.24)$$

Questa forma delle equazioni dello strato limite risulta spesso utile in pratica, ad esempio quando si voglia affrontare una loro soluzione numerica.

12.4.2 Le equazioni nella forma di von Mises

Ulteriori semplificazioni (ed effetti benefici in termini di stabilità dal punto di vista delle applicazioni numeriche) si possono ancora ottenere effettuando un secondo cambio di variabili, in cui la funzione di corrente ψ compaia come variabile indipendente anziché come variabile dipendente, ovvero sia $u = u(x, \psi)$.

Effettuiamo allora la sostituzione di variabili (che prende il nome di sostituzione di von Mises):

$$X = x; \quad Y = \psi$$

per cui le derivate si trasformano nel modo seguente:

$$u_x = u_X \frac{\partial X}{\partial x} + u_Y \frac{\partial Y}{\partial x} = u_X - v u_Y; \quad u_y = u_X \frac{\partial X}{\partial y} + u_Y \frac{\partial Y}{\partial y} = u u_Y$$

Sostituendo nella seconda delle (12.21) si ottiene:

$$u u_X = u (u u_Y)_Y + U_e U_{e,x}$$

che può anche scriversi, moltiplicando per due e tornando ad indicare le variabili come x e ψ anziché come X e Y , come:

$$(u^2)_x = u (u^2)_{\psi\psi} + (U_e^2)_x \quad (12.25)$$

L'equazione nella forma di von Mises mette in evidenza che il problema differenziale è del secondo ordine come nel caso temporale: la componente v non compare più nelle equazioni, e la condizione al contorno per v nel problema originale viene soddisfatta implicitamente.

Esiste inoltre una somiglianza molto stretta fra l'equazione di von Mises (12.25) e l'equazione del calore, ovvero con il problema (12.12) dello strato limite temporale, cui l'equazione di von Mises si ricondurrebbe se non fosse per il coefficiente variabile u davanti alla derivata seconda. Ciò significa che le proprietà in piccolo dell'equazione dello strato limite stazionario e delle sue soluzioni sono simili a quelle dell'equazione del calore, o dello strato limite temporale. Il coefficiente variabile u però può cambiare segno (si noti che, fisicamente, un cambio di segno di u si ha quando si verifica la separazione dello strato limite).

La stabilità numerica Le soluzioni dell'equazione (12.12) dello strato limite temporale sono del tipo (12.13). In questo contesto, non è difficile vedere che quegli a che garantiscono la stabilità per un certo segno di u provocano l'instabilità della soluzione quando u cambia segno. Mentre nel caso temporale il carattere parabolico dell'equazione fornisce l'informazione relativamente banale che i disturbi si propagano in avanti nel tempo, nel caso spaziale, a seconda del segno locale di u , i disturbi si propagano a monte oppure a valle. Cambia di conseguenza il dominio di dipendenza della soluzione, e nel caso in cui la u cambia di segno nel campo di moto può essere necessario assegnare condizioni al contorno a monte o a valle a seconda del segno locale della u .

La forma di von Mises delle equazioni dello strato limite presenta un'ulteriore vantaggio, che diviene importante quando si è interessati alla soluzione numerica delle equazioni discretizzate. Per un'equazione del tipo:

$$\varphi_x = k\varphi_{yy}$$

esiste un limite di stabilità, che lega il coefficiente k ai passi Δx e Δy di discretizzazione nelle direzioni x ed y :

$$\frac{k\Delta x}{\Delta y^2} < \frac{1}{2}$$

Nel caso delle equazioni dello strato limite stazionario nella forma canonica, esse sono del tipo:

$$u_x = \frac{1}{u}u_{yy} + \dots$$

e quindi il coefficiente k risulta proporzionale al reciproco di u : questo pone certamente problemi di stabilità nella regione prossima alla parete, dove u assume valori piccoli.

Quando invece si considerano le equazioni nella forma (12.25) di von Mises, il coefficiente k è proporzionale ad u , e non si riscontrano di conseguenza particolari problemi di stabilità.

12.5 Le soluzioni simili di Falkner-Skan

L'equazione (12.23) per lo strato limite stazionario, scritta in termini di funzione di corrente, non è lineare e quindi non si possono sovrapporre soluzioni elementari, ma se ne possono nondimeno cercare soluzioni semplici. A tale scopo, si effettui il cambio di variabili:

$$X = x; \quad \eta = \frac{y}{h(x)}$$

in cui $h(x)$ è una funzione per ora arbitraria.

Le derivate si trasformano nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\eta}{h} h' \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (12.26)$$

L'equazione (12.23) diviene:

$$\frac{1}{h^2} \psi_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi_X - \frac{\eta}{h} h' \psi_\eta \right) - \left(\psi_X - \frac{\eta}{h} h' \psi_\eta \right) \frac{1}{h^2} \psi_{\eta\eta} = \frac{1}{h^3} \psi_{\eta\eta\eta} + U_e U_{e,x}$$

Utilizzando nuovamente la lettera x , si trasformano le equazioni in modo da mostrare che due addendi sono uguali ed opposti:

$$\frac{1}{h} \psi_\eta \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi_x - \frac{h' \eta}{h} \psi_\eta \right) - \left(\psi_x - \frac{h' \eta}{h} \psi_\eta \right) \frac{1}{h^2} \psi_{\eta\eta} = \frac{1}{h^3} \psi_{\eta\eta\eta} + U_e U_{e,x}$$

ovvero, riarrangiando i vari termini e moltiplicando per h^3 :

$$h\psi_\eta\psi_{x\eta} - h'\psi_\eta^2 - h\psi_x\psi_{\eta\eta} = \psi_{\eta\eta\eta} + h^3U_eU_{e,x}$$

Soluzioni simili All'interno di tutte le soluzioni possibili, cerchiamo se esistono soluzioni del tipo:

$$u(x, \eta) = F(x)G'(\eta) \quad (12.27)$$

che prendono il nome di soluzioni *simili*, e rappresentano una generalizzazione di quelle ottenibili per separazione di variabili. Il nome deriva dal fatto che soluzioni di questa forma presentano profili di velocità che si riducono l'uno all'altro mediante un cambiamento di scala nelle coordinate x ed y .

Si faccia ora l'ipotesi che le soluzioni abbiano la forma (12.27), il che si traduce nella condizione per la $\psi = \int u \, dy$:

$$\psi(x, \eta) = F(x)h(x)G(\eta)$$

Sostituendo si ottiene:

$$Fh^2G'(Fh)'G' - h'(Fh)^2G'^2 - h(Fh)'GG'' = FhG''' + h^3U_eU_{e,x}$$

Dopo aver ulteriormente riarrangiato l'equazione, si può moltiplicarla per un fattore che renda indipendente da x uno degli addendi. Scegliendo per esempio quello con la derivata di grado massimo, si divide per hF :

$$F'h^2G'^2 - h(Fh)'GG'' = G''' + h^2\frac{U_e}{F}U_{e,x}$$

Le condizioni al contorno di aderenza (12.24) divengono $G(0) = G'(0) = 0$ alla parete, mentre fuori dallo strato limite deve essere $F(x)G'(\eta) = U_e(x)$ quando $\eta \rightarrow \infty$. Ciò significa che $G'(\eta)$ deve tendere ad una costante, per esempio unitaria, e di conseguenza si ha $F(x) = U_e(x)$. Tenendo conto di questo ulteriore vincolo, l'equazione diviene:

$$h^2U_{e,x}(G'^2 - 1) - h(hU_e)'GG'' = G'''$$

Perché ciò sia possibile, devono contemporaneamente essere costanti i due raggruppamenti funzioni di x . Dette k_1 e k_2 due costanti, devono allora essere soddisfatte le due relazioni:

$$h^2(x)\frac{dU_e}{dx} = k_1 \quad (12.28a)$$

$$h(x)\frac{d(hU_e)}{dx} = k_2 \quad (12.28b)$$

Queste due equazioni differenziali ordinarie possono essere verificate contemporaneamente solo per particolari espressioni della velocità $U_e(x)$. Se però ciò avviene, si può sfruttare il fatto che la variabile x non compare esplicitamente nei coefficienti. Una nuova equazione si può ottenere sottraendo uno al rapporto fra la (12.28b) e la (12.28a), e denominando k_3 la nuova costante:

$$\frac{k_2}{k_1} - 1 = k_3 = \frac{hh'U_e}{h^2U_{e,x}} = \frac{U_e}{h} \frac{dh}{dU_e}$$

È ora possibile utilizzare la tecnica di separazione delle variabili per integrare quest'ultima equazione:

$$\frac{dh}{h} = k_3 \frac{dU_e}{U_e}$$

$$\log h = \log k_4 U_e(x)^{k_3}$$

e ricavare infine per la funzione $h(x)$, finora indeterminata, l'espressione:

$$h(x) = k_4 U_e^{k_3}(x)$$

Tale espressione per $h(x)$, sostituita nella relazione (12.28a), permette infine di integrare (ancora per separazione) l'equazione differenziale:

$$k_4^2 U_e^{2k_3} \frac{dU_e}{dx} = k_1$$

e ricavare così la velocità esterna nella forma:

$$\frac{k_4^2}{2k_3 + 1} U_e^{2k_3+1} = k_1 x + k_5$$

Occorre poi ricordare il caso particolare di $2k_3 + 1 = 0$, che fornisce l'integrale $\log U_e = k_1 x + k_5$.

Tutte le costanti moltiplicative che compaiono nell'espressione precedente possono ora essere assorbite in un'unica costante, che si può inoltre rendere unitaria con un'adeguata adimensionalizzazione.

Si conclude quindi che soluzioni simili dell'equazione (12.23) dello strato limite stazionario, cioè soluzioni del tipo (12.27), esistono solo quando la velocità esterna varia secondo una legge del tipo:

$$U_e(x) \sim (x - x_0)^m \quad (12.29)$$

cioè proporzionale ad una potenza di x .

Il caso particolare sopra ricordato corrisponde ad $m \rightarrow \infty$, e la velocità esterna deve di conseguenza variare secondo la legge $U_e(x) = e^{(x-x_0)}$.

Restano ora da determinare, in funzione del parametro m , le espressioni che devono assumere le costanti k_1 e k_2 che compaiono nelle equazioni (12.28a) e

(12.28b). Affinché possano esistere soluzioni simili, la velocità esterna deve variare secondo una legge del tipo (12.29); prendendo la costante k_1 nella (12.28a) pari ad m , risulta per la funzione $h(x)$ l'espressione:

$$h(x) = \sqrt{\frac{k_1}{m(x-x_0)^{m-1}}} = (x-x_0)^{(1-m)/2}$$

Sostituendo questa relazione nella (12.28b) si ricava il valore per la seconda costante k_2 :

$$k_2 = \frac{1+m}{2}(x-x_0)^{(m-1)/2}(x-x_0)^{(1-m)/2} = \frac{1+m}{2}$$

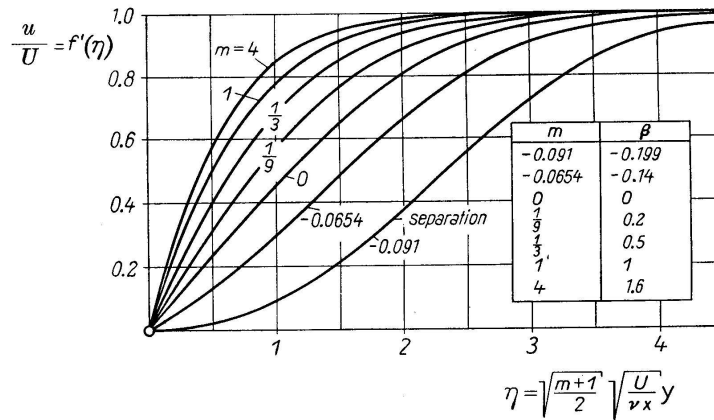


Figura 12.3 Soluzioni dell'equazione di Falkner-Skan, per diversi valori del parametro m . Da H.Schlichting

Si ottiene così un'equazione a derivate ordinarie per la funzione incognita G , che prende il nome di equazione di Falkner-Skan:

$$m(G'^2 - 1) - \frac{1+m}{2}GG'' = G''' \tag{12.30}$$

L'equazione di Falkner-Skan va risolta con le condizioni al contorno:

$$G(0) = 0; \quad G'(0) = 0; \quad G'(\infty) = 1$$

L'equazione è differenziale ordinaria del terzo ordine, e non risulta in generale risolvibile in forma chiusa, ma nonostante ciò rappresenta una grossa semplificazione rispetto al problema originario a derivate parziali, in quanto non è difficile

risolverla numericamente, determinando così per ogni m (e quindi per ogni andamento della velocità esterna), la funzione G e di conseguenza l'intera soluzione ad ogni x . Si ottengono al variare di m delle soluzioni come quelle riportate in Figura 12.3. La funzione $G'(\eta)$, che fornisce il profilo di velocità adimensionale nella coordinata simile η , ha derivata prima a parete non nulla, e derivata seconda pari a $G'''(0) = -m$; di conseguenza il profilo di velocità si presenta sempre più pieno quanto più m è grande.

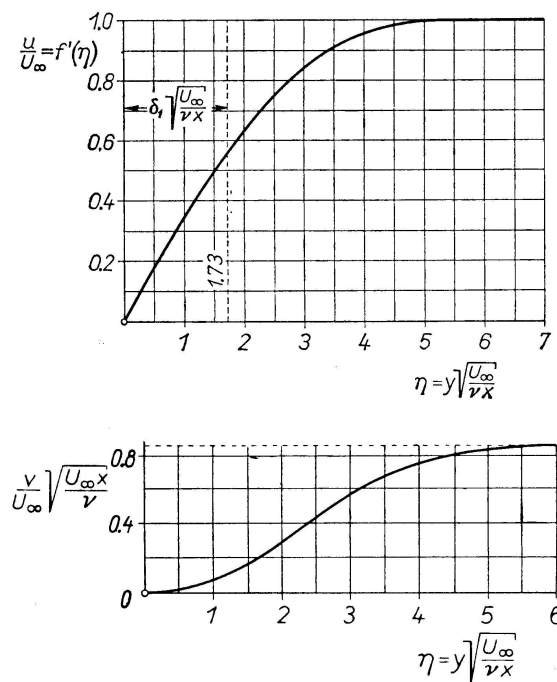


Figura 12.4 Soluzione simile di Blasius. Da H.Schlichting.

L'equazione di Blasius L'equazione di Falkner-Skan (12.30), nel caso particolare in cui il parametro m ha valore nullo, corrisponde alla situazione fisica della lastra piana, per la quale la velocità esterna è costante con x . L'equazione (12.30) assume la forma più semplice:

$$G''' = -\frac{1}{2}GG'' \quad (12.31)$$

Questa equazione è nota anche con il nome di equazione di Blasius. La funzione $G'(\eta)$ ha derivata prima a parete uguale a 0.332, e derivata seconda nulla a

parete: in coordinate simili quindi il profilo di velocità è lineare con y nella regione prossima alla parete. In Figura 12.4 è riportato l'andamento dei profili adimensionali delle componenti u e v della velocità. Si noti che nella regione esterna dello strato limite la componente verticale v ha un valore non nullo: la presenza di flusso che si allontana dalla parete si spiega con il fatto che lo spessore dello strato limite aumenta con la coordinata x , e questo comporta un allontanamento di fluido dalla parete stessa.

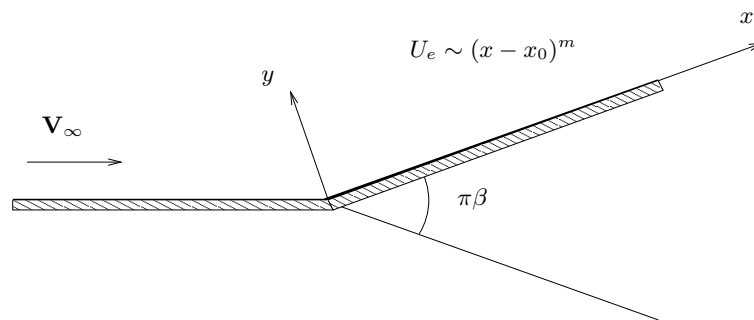


Figura 12.5 Flusso intorno ad uno spigolo.

Strato limite su spigoli Le soluzioni con m positivo dell'equazione di Falkner-Skan (12.30) corrispondono a casi in cui la corrente esterna è accelerante secondo la legge di potenza (12.29), e rappresentano quindi lo strato limite che si sviluppa su una parete dopo uno spigolo concavo (Figura 12.5). Per quanto detto nel paragrafo §6.3 sulla trasformazione conforme di elevamento a potenza, $U_e(x) \sim x^m$ è la velocità di un flusso potenziale attorno ad uno spigolo di ampiezza $\pi\beta$, in un sistema di assi orientato come la parete dopo lo spigolo, dove:

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

Le soluzioni dell'equazione di Falkner-Skan per valori negativi di m rappresentano invece la corrente che investe uno spigolo convesso. La funzione G' presenta però in questo caso un flesso, come si vede dalla Figura 12.3. Riducendo il valore di m si ha una zona, in una regione limitata a piccoli valori di η , in cui la funzione G' cambia segno. Quando $m = -0.091$ il profilo di velocità ha derivata nulla a parete, e questo identifica la condizione di separazione. Le soluzioni simili mostrano quindi come, in generale, uno strato limite laminare è in grado di sopportare senza separazione solo flussi esterni debolmente deceleranti.

Al di là del punto di separazione, la stessa approssimazione di strato limite cade in difetto. Il problema matematico cambia carattere, ed il dominio di dipendenza diviene più complicato.

12.5.1 La resistenza di attrito di una lastra piana

Uno dei risultati più interessanti che possono essere ricavati dalla teoria delle soluzioni simili delle equazioni dello strato limite consiste nel calcolo della resistenza di attrito per una lastra piana investita senza incidenza da una corrente uniforme, nell'ipotesi di strato limite laminare. La resistenza d'attrito è l'integrale lungo la coordinata x dello sforzo τ_t tangente alla parete, che coincide con la componente fuori diagonale del tensore degli sforzi. Essendo $v = 0$ e quindi $v_x = 0$ lungo la parete, risulta semplicemente:

$$\tau_t^{(d)} = -\mu^{(d)} \left. \frac{\partial u^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right|_{y^{(d)}=0}$$

Questa espressione, in cui compaiono quantità dimensionali indicate con il suffisso (d) , può essere legata alla derivata a parete del profilo adimensionale di velocità. Si introducono quindi le opportune grandezze di riferimento:

$$x^{(d)} = L^{(d)} x; \quad y^{(d)} = \epsilon L^{(d)} y = \frac{L^{(d)}}{\sqrt{\text{Re}}} y; \quad u^{(d)} = U_e^{(d)} u$$

In questo modo, lo sforzo tangente, fissata una determinata ascissa, può scriversi (a meno del segno) come:

$$\tau_t^{(d)} = \mu^{(d)} \frac{U_e^{(d)} \sqrt{\text{Re}}}{L^{(d)}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho^{(d)} U_e^{(d)2} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Ricaviamo già l'informazione che lo sforzo locale di attrito, e quindi il coefficiente di attrito, risultano proporzionali all'inverso della radice quadrata del numero di Reynolds. Per ottenere l'intera resistenza di attrito, occorre poi integrare lo sforzo su tutta la lunghezza della lastra.

Soluzioni simili La derivata a parete del profilo di velocità adimensionale, può essere calcolata nel caso di soluzioni simili, ed in particolare nel caso di Blasius, ricordando il legame (12.26) fra la derivata $\partial/\partial y$ e la $d/d\eta$. Risulta:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = U_e(x) \frac{1}{h(x)} G''(\eta) \Big|_{\eta=0} = \frac{U_e(x)}{h(x)} G''(0)$$

Abbiamo già ricordato che nella soluzione dell'equazione di Blasius la derivata a parete della funzione $G'(\eta)$ vale $G''(0) = 0.332$. Inoltre per $m = 0$ si ha che:

$$\frac{U(x)}{h(x)} = \frac{x^m}{x^{(1-m)/2}} = x^{-1/2}$$

e quindi la derivata a parete rispetto ad y del profilo di velocità adimensionale vale $0.332x^{-1/2}$. Esprimendo anche la x adimensionale in funzione delle quantità dimensionali, si ha quindi:

$$\tau_t^{(d)} = \rho^{(d)} U_e^{(d)2} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} 0.332 \left(\frac{x^{(d)}}{L^{(d)}} \right)^{-1/2} = \frac{0.332}{\sqrt{\text{Re}_x}} \rho^{(d)} U_e^{(d)2}$$

in cui Re_x indica un numero di Reynolds basato sull'ascissa dimensionale $x^{(d)}$, distanza dal bordo di attacco della lastra. La lunghezza di riferimento $L^{(d)}$ è scomparsa, dal momento che il problema è infinito e non può ammettere scale preferenziali in direzione x .

Per ottenere l'intera resistenza di attrito che agisce sulla lastra piana (per unità di apertura), occorre anzitutto tenere conto di entrambe le facce della lastra, ed inoltre integrare rispetto a x . Se $\ell^{(d)}$ è la lunghezza della lastra, si ottiene:

$$D = 1.328 U_e^{(d)} \sqrt{\mu^{(d)} \rho^{(d)} \ell^{(d)} U_e^{(d)3}}$$

La resistenza di attrito è quindi una funzione più che lineare della velocità, mentre dipende dalla radice quadrata della lunghezza della lastra. Questo è dovuto al fatto che la parte posteriore della lastra contribuisce meno alla resistenza di attrito rispetto alla parte anteriore, perché dove lo strato limite è più spesso i gradienti di velocità (e quindi lo sforzo di attrito) a parete sono minori.

12.5.2 Lo spessore di spostamento

Un'altra informazione interessante, che si ricava in modo analitico dalle soluzioni simili, è costituita da una dimensione caratteristica in direzione normale alla parete. In particolare si utilizza spesso lo spessore di spostamento δ^* dello strato limite, che è definito come:

$$\delta^* = \frac{1}{U_e} \int_0^{\infty} (U_e - u) dy \quad (12.32)$$

Lo spessore δ^* esprime il difetto di portata che si ha, a causa dello strato limite, rispetto alla corrente non viscosa. Esso inoltre riveste il significato di posizione baricentrica della distribuzione di vorticità nello strato limite.

Un ulteriore interessante significato dello spessore di spostamento può essere messo in evidenza considerando la condizione di interfaccia (12.10) fra sviluppo interno ed esterno, scritta per la componente v della velocità:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \left[v_1^{(i)}(x, Y) - Y v_{0,y}^{(e)}(x, 0) - v_1^{(e)}(x, 0) \right] = 0$$

Grazie alle equazioni di continuità interna (prima equazione del sistema (12.7)) ed esterna (prima equazione del sistema (12.5)) si ricava:

$$v_1^{(i)}(x, Y) = - \int_0^Y u_{0,x}^{(i)}(x, Y') dY'; \quad v_{0,y}^{(e)}(x, 0) = -u_{0,x}^{(e)}(x, 0) = -U_{e,x}$$

Per la condizione di interfaccia ora ricordata, la velocità di ordine uno a parete per il problema esterno è data da:

$$v_1^{(e)}(x, 0) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \left[- \int_0^Y u_{0,x}^{(i)}(x, Y') dY' + Y U_{e,x} \right] = \int_0^{\infty} [U_{e,x} - u_{0,x}^{(i)}(x, Y')] dY'$$

e quindi, cambiando notazione, risulta:

$$v_1^{(e)}(x, 0) = \int_0^{\infty} (U_{e,x} - u_{0,x}^{(i)}) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} (U_e - u) dy = \frac{d}{dx} U_e \delta^*$$

Si vede quindi come la soluzione esterna avverte la presenza dello strato limite attraverso una velocità normale a parete non nulla, ovvero attraverso una parete modificata. La descrizione della parete avviene tramite la derivata rispetto a x dello spessore di spostamento δ^* .

Soluzioni simili Lo spessore δ^* può essere calcolato in modo semplice nel caso di soluzioni simili. Anzitutto occorre ricordare che per avere lo spessore in termini dimensionali occorre utilizzare la relazione:

$$\delta^{*(d)} = \frac{L^{(d)}}{\sqrt{\text{Re}}} \delta^*$$

Ora, per soluzioni simili, l'integrale (12.32) che definisce δ^* può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{1}{U_e} \int_0^{\infty} (U_e - u) dy = \int_0^{\infty} (1 - G'(\eta)) h(x) d\eta$$

Portando fuori dal segno di integrale $h(x)$, che non dipende da η , si ha:

$$\delta^{*(d)} = \frac{L^{(d)}}{\sqrt{\text{Re}}} h(x) \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - G(\eta))$$

Nel caso di Blasius, per esempio, il limite vale circa 1.7 mentre $h(x) = \sqrt{x}$. Di conseguenza lo spessore di spostamento dello strato limite laminare su una lastra piana è dato da:

$$\delta^{*(d)} = 1.7 \sqrt{\frac{x^{(d)} \nu^{(d)}}{U_e^{(d)}}}$$

e come si vede cresce con la radice quadrata della coordinata x .

12.6 Soluzioni simili per strati limite liberi

Esistono soluzioni simili anche nel caso di assenza della parete solida: si dice in questo caso che siamo in presenza di uno strato limite *libero*. In questi casi, lo strato limite sostituisce le discontinuità che le equazioni non viscosi ammetterebbero in presenza di strati vorticosi, anziché la discontinuità fra la velocità esterna e la velocità nulla a parete.

Le equazioni, e lo sviluppo interno ed esterno accoppiati, naturalmente non cambiano rispetto al caso di strato limite su parete, mentre sono diverse le condizioni al contorno del problema. Infatti, in uno strato limite confinato da parete (o libero ma in condizioni di simmetria) si possono imporre le due condizioni di adesione $u = 0$ e $v = 0$ alla parete (che diventano $v = 0$ e $u_y = 0$ nel caso di simmetria) ed una all'infinito, ovvero $u(x, +\infty) = U_e(x)$. Nel caso di strato limite libero (non simmetrico), occorre invece risolvere le equazioni da $-\infty$ a $+\infty$, e si ha la possibilità di imporre solo due condizioni al contorno, ovvero $u(x, -\infty) = U_e^-(x)$ e $u(x, +\infty) = U_e^+(x)$.

Per il caso di getti e scie, come si vedrà in seguito, si arriva a risultati interessanti ed anche esatti. La portata di tali risultati non va però sopravvalutata: occorre ricordare che getti e scie diventano molto presto turbolenti, ed il caso laminare è quindi di scarso interesse pratico. D'altro lato, lo studio di queste soluzioni laminari prepara la strada ad una migliore comprensione anche del problema turbolento.

La trasformazione di Prandtl Nei limiti dell'approssimazione al primo ordine, le equazioni hanno una soluzione essenzialmente unica, nonostante la possibilità di assegnare solo due condizioni al contorno. È facile mostrare che la mancanza di una condizione significa semplicemente che si può determinare il comportamento di una scia o di un getto, solo a meno di uno spostamento in direzione y che resta indeterminato, e che può essere determinato solo considerando le approssimazioni superiori della zona interna ed esterna. In altri termini, se $u(x, y)$ è una soluzione delle equazioni, anche $u(x, y - y_0(x))$ soddisfa le stesse equazioni. Un cambio di variabili del tipo:

$$x' = x; \quad y' = y - y_0(x)$$

modifica infatti le derivate nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{dy_0}{dx} \frac{\partial}{\partial y'}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

e trasforma di conseguenza l'equazione di continuità nella forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{dy_0}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y'} = 0$$

È sufficiente definire una nuova v' nel modo seguente:

$$v' = v - \frac{dy_0}{dx} u$$

perché l'equazione di continuità si ritrasformi in:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

L'equazione per la quantità di moto diviene invece:

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{dy_0}{dx} \right) + \left(v' + \frac{dy_0}{dx} u \right) \frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + U_e U_{e,x}$$

ovvero, cancellando i due termini eguali ed opposti, non cambia forma.

Questa trasformazione, detta di Prandtl, permette di trasformare l'una nell'altra le diverse soluzioni delle equazioni dello strato limite che corrispondono a diverse velocità $v(0)$, e dimostra che esse danno in realtà tutto lo stesso profilo di velocità $u(y)$.

12.6.1 Il getto bidimensionale

Si consideri un getto, per esempio determinato da una corrente che fuoriesce da un ugello e viene immessa in aria in quiete. Supponiamo che il getto si possa considerare bidimensionale, cioè che l'ugello abbia una dimensione trasversale molto maggiore della dimensione y . Nella zona prossima all'uscita dell'ugello esistono due strati limite distinti, dovuti al fatto che il getto trascina con sé parte del fluido in quiete. Ad una certa distanza a valle dell'ugello, però, tali strati limite finiscono per coalescere, ed il getto perde traccia, ad una distanza x sufficientemente elevata, della geometria dell'ugello stesso, e può essere descritto mediante soluzioni simili come se l'ugello fosse puntiforme.

Le condizioni al contorno sono, nel caso del getto in aria ferma, $U_e^+ = U_e^- = 0$, oltre che di simmetria al centro; questo corrisponde a:

$$G'(\infty) = 0; \quad G(0) = 0; \quad G''(0) = 0$$

Ogni esponente m nella (12.29) sembra andar bene, ma non è detto a priori che esistano soluzioni diverse da quella banale $u \equiv 0$. Infatti, come in un problema di autovalori, la soluzione non banale esiste solo per un ben preciso valore di m , che si può ottenere dalle considerazioni che seguono.

L'equazione della quantità di moto, scritta nella forma conservativa, è:

$$(u^2)_x + (uv)_y = u_{yy}$$

e può essere integrata nella direzione y da $-\infty$ a $+\infty$, ottenendo:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy + [uv - u_y]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Nel caso di getto in aria in quiete, la quantità racchiusa in parentesi quadre è identicamente nulla. Infatti il primo addendo all'infinito è nullo perché è nulla la U_e , mentre il secondo è nullo perché è nulla la derivata rispetto ad y di u .

Si ottiene quindi il risultato che il flusso di quantità di moto associato al getto si deve conservare con la distanza x , e rimane quindi pari a quello che inizialmente fuoriesce dall'ugello:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = cost$$

Per soluzioni simili, questa condizione si traduce in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} G'^2(\eta) x^{(1-m)/2} d\eta = x^{(3m+1)/2} \int_{-\infty}^{+\infty} G'^2 d\eta = cost$$

che può essere verificata, quando m è qualsiasi, solo dalla soluzione banale $u \equiv 0$. Quando invece m assume il particolare valore di $-1/3$ si può avere una soluzione diversa da quella identicamente nulla, e di conseguenza $m = -1/3$ è l'unico esponente possibile per un getto simile. In corrispondenza di questo valore, si trova che $h(x) = x^{2/3}$.

L'equazione di Falkner-Skan (12.30) va modificata, nel caso dei getti, per tener conto della diversa condizione all'infinito di U_e nulla:

$$mG'^2 - \frac{m+1}{2}GG'' = G'''$$

e quando $m = -1/3$ si ha:

$$-\frac{1}{3}G'^2 - \frac{1}{3}GG'' = G'''$$

In questo caso particolare, essa ammette una soluzione in forma chiusa, trovata da Schlichting. Infatti l'equazione può essere riscritta nella forma:

$$-\frac{1}{3}(GG')' = G'''$$

che mostra come entrambi i membri siano differenziali esatti; è facile quindi integrarla una volta, per ottenere:

$$G'' + \frac{1}{3}GG' = G'' + \frac{1}{3}\left(\frac{G^2}{2}\right)' = \text{cost}$$

dove, grazie alle condizioni al contorno, si può vedere che la costante di integrazione deve risultare nulla. Si può integrare un'altra volta, perché ancora siamo in presenza di differenziali esatti, ottenendo la seguente equazione del primo ordine integrabile:

$$G' + \frac{1}{6}G^2 = k$$

Essa fornisce la funzione G , naturalmente determinata a meno della costante k . Con qualche passaggio, si trova, dopo aver separato le variabili:

$$\eta = \sqrt{\frac{6}{k}} \text{SettTanh} \sqrt{\frac{1}{6k}} G$$

e quindi:

$$G(\eta) = \sqrt{6k} \text{Tanh} \sqrt{\frac{k}{6}} \eta$$

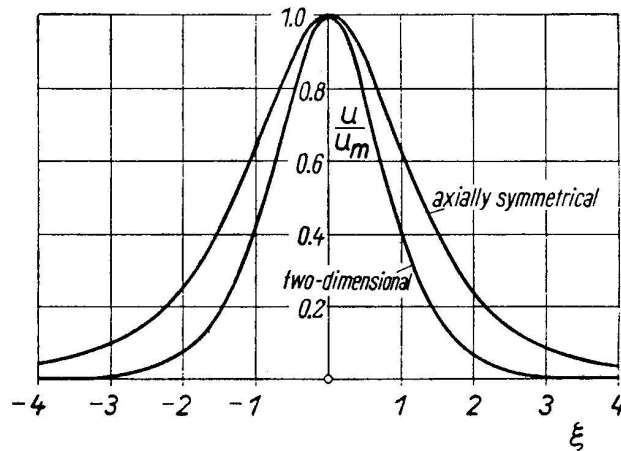


Figura 12.6 Profilo di velocità in getti laminari liberi: getto piano bidimensionale e getto circolare. Da H.Schlichting.

La costante k è l'unica costante libera, legata al flusso di quantità di moto che fuoriesce dall'ugello, ed in funzione di essa è possibile determinare tutte le altre quantità. Si è già determinato che il flusso di quantità di moto è costante. Per quanto riguarda la portata complessiva, eguale a $\psi(\infty)$, si ha:

$$\psi(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \, dy = x^m x^{(1-m)/2} \int_{-\infty}^{+\infty} G'(\eta) \, d\eta \sim x^{1/3}$$

La portata quindi cresce proporzionalmente a $x^{1/3}$, e si può vedere in modo analogo che la velocità massima del getto decresce come $x^{-1/3}$. Quindi un getto trascina con sé parte del fluido esterno in quiete durante il suo moto, aumentando il suo flusso di massa e mantenendo quindi costante il flusso di quantità di moto nonostante le velocità diminuiscano.

L'andamento della soluzione in termini di profilo di velocità in coordinate simili è mostrato nella Figura 12.6, in cui si mostra per confronto anche l'analogo risultato per getto circolare, che risulta meno stretto.

Si noti che la soluzione ora descritta corrisponde a condizioni iniziali di tipo impulsivo; fisicamente, ciò significa che si tratta di una soluzione valida sufficientemente a valle dell'ugello perché quest'ultimo possa essere considerato puntiforme.

12.6.2 Lo strato di mescolamento

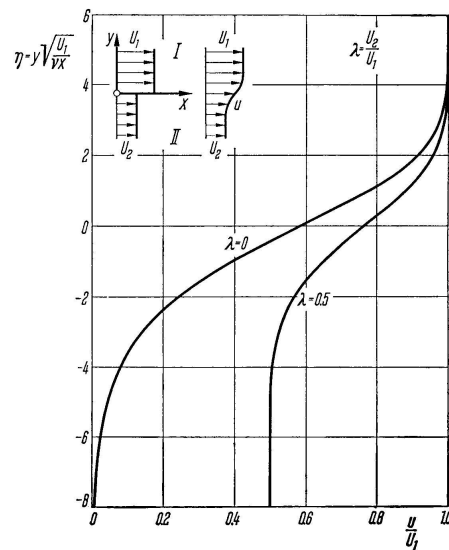


Figura 12.7 Profilo di velocità in uno strato di mescolamento. Da H.Schlichting.

Si sviluppa uno strato limite anche quando due correnti laminari, piane e parallele, dotate di velocità diverse e separate per esempio da un setto vengo-

no messe a contatto. Un caso di questo tipo rappresenta anche una scia non simmetrica.

Lo strato di mescolamento è un caso assai simile al caso di Blasius. Infatti le condizioni al contorno:

$$u(x, -\infty) = U_e^-; \quad u(x, +\infty) = U_e^+$$

in cui U_e^- e U_e^+ sono costanti, implicano che sia $m = 0$.

L'equazione per G quindi diviene ancora l'equazione di Blasius (12.31), ma con le condizioni al contorno:

$$G'(-\infty) = U_e^-; \quad G'(+\infty) = U_e^+; \quad G(0) = 0$$

In questo caso l'equazione non ammette soluzione in forma chiusa, e va risolta numericamente. L'andamento della soluzione è riportato in Figura 12.7.

12.6.3 La scia

Un ragionamento analogo può essere svolto per la scia che si sviluppa dietro un corpo solido investito da una corrente uniforme: essa ha un comportamento simile a quello del getto, ma presenta un difetto anziché un eccesso di quantità di moto, e si studia matematicamente mediante linearizzazione.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, la scia costituisce un caso simmetrico; come per il getto, nella zona prossima al punto di distacco le condizioni particolari del distacco hanno un loro effetto, ma abbastanza lontano il difetto di velocità, ovvero la quantità $(U_e - u)$, ha un comportamento descrivibile mediante soluzioni simili, avendo ormai perso traccia dei dettagli del corpo solido su cui è avvenuta la separazione.

Le due condizioni al contorno sono:

$$u(x, +\infty) = U_e; \quad u(x, -\infty) = U_e$$

e corrispondono ad una velocità all'infinito costante, ma non nulla come nel caso del getto. La scia simile può svilupparsi solo molto lontano dal corpo, e quindi in regioni dove $u \sim U_e$. Di conseguenza le equazioni dello strato limite possono essere linearizzate attorno ad U_e , che ha derivata nulla all'infinito. Posto $u = U_e + \delta u$, si ottiene:

$$\delta u_x = \delta u_{yy}$$

Si è ritrovata di nuovo l'equazione del calore, del tutto analoga alla (12.12) che descrive lo strato limite nel caso temporale: qui la variabile x gioca il ruolo di t .

Tra le soluzioni simili dell'equazione del calore, che abbiamo già calcolato, possiamo cercare di determinare quella che assicuri la conservazione del difetto di flusso di quantità di moto in direzione x . Ricordando che per l'equazione lineare è sempre $h(x) = \sqrt{x}$, in generale le soluzioni simili sono:

$$\delta u = x^m G' \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right)$$

che, come nel caso del getto, presentano singolarità in $x = 0$. Per determinare l'esponente m , si noti che, nel caso del getto, deve mantenersi costante con la coordinata x il flusso di quantità di moto. Questa condizione si scrive:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} [(U_e + \delta u)^2 - U_e] dy = 0$$

e, dopo la linearizzazione, diviene:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta u dy = 0$$

Si ottiene quindi la condizione:

$$\frac{d}{dx} \left[x^m x^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} G'(\eta) d\eta \right] = 0$$

che richiede necessariamente $m = -1/2$ perché esista una soluzione diversa dalla soluzione banale $\delta u \equiv 0$.

In corrispondenza di questo valore di m , si ottiene la soluzione in forma chiusa:

$$\delta u = k \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-y^2/4x}$$

in cui la costante (negativa) k è l'unico parametro libero. Il valore di k si calcola sulla base del difetto di quantità di moto nella regione iniziale della scia, dove non c'è ancora similitudine. Per $m = -1/2$, è immediato ricavare la dipendenza da x delle altre quantità; in particolare risulta $h(x) \sim x^{3/4}$. Se si calcola anche il difetto di flusso di massa, si trova che, al contrario del getto, anche questo risulta costante con x .

12.7 La resistenza dovuta alla viscosità

La presenza di fenomeni viscosi sulla superficie di un corpo altera il bilancio di quantità di moto, dando origine ad una resistenza anche nel caso incomprimibile bidimensionale. In precedenza (si veda il paragrafo §4.6 e la Figura ??) abbiamo ricavato la forza aerodinamica che agisce su un corpo in termini dell'integrale (4.10), calcolato lungo un contorno \mathcal{S}_∞ molto lontano dal corpo, del flusso di

quantità di moto \mathbf{J}_Q ; per tale flusso si è poi usata su tutto il contorno \mathcal{S}_∞ l'espressione non viscosa, utilizzando la relazione di Bernoulli per esprimere la pressione in termini della velocità.

Quando la corrente che investe il corpo è viscosa, sembra ancora corretto utilizzare sul contorno \mathcal{S}_∞ la medesima espressione non viscosa per \mathbf{J}_Q , dal momento che \mathcal{S}_∞ si può scegliere arbitrariamente lontana dal corpo, e come è noto gli effetti viscosi vanno a zero molto rapidamente con la distanza dal corpo stesso.

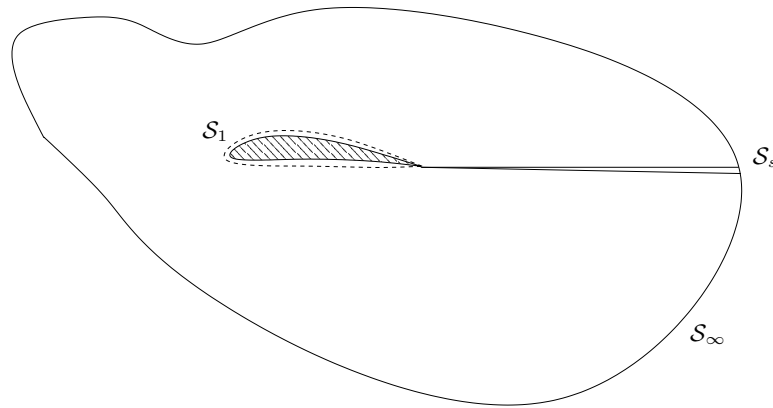


Figura 12.8 Resistenza viscosa dovuta alla scia non infinitesima dietro ad un corpo con bordo di uscita aguzzo

Ma come si giustifica allora la nascita di una resistenza, già calcolata ad esempio nel paragrafo §12.5.1 in un caso particolare? Questa resistenza è associata al difetto di quantità di moto esistente nel tratto \mathcal{S}_s del contorno \mathcal{S}_∞ che è intersecato dalla scia, come si mostra in Figura 12.8. Nella scia non è più lecito utilizzare il teorema di Bernoulli, per la caduta dell'ipotesi di irrotazionalità.

Si può però sfruttare il fatto che questo tratto di contorno è piccolo, ed utilizzare in tutta la parte del contorno \mathcal{S}_∞ non intersecata dalla scia il risultato non viscoso. Definiamo allora una pressione p_B come quella pressione che, data una certa velocità, sarebbe prevista dal teorema di Bernoulli:

$$p_B = p_\infty + \rho \frac{V_\infty^2}{2} - \rho \frac{V^2}{2} \quad (12.33)$$

In questo modo, la pressione p può essere pensata come somma di $p_B + \Delta p$, dove la correzione Δp rispetto al valore di Bernoulli è nulla ovunque sia applicabile il teorema di Bernoulli, cioè ovunque tranne che sulla scia. La forza aerodinamica può dunque essere calcolata attraverso i due integrali:

$$\mathbf{F} = \iint_{\mathcal{S}_\infty} (\rho \mathbf{V}\mathbf{V} + p_B \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}_s} (p - p_B) \mathbf{n} \, d\mathcal{S} \quad (12.34)$$

La velocità \mathbf{V} che compare nel primo integrale è diversa da quella del caso non viscoso, a causa della correzione di ordine uno alla velocità esterna dovuta alla presenza dello strato limite; ma il fatto che un integrale di questo tipo comporti una pura portanza è stato ricavato senza specificare l'espressione di \mathbf{V} , ma solo sulla base della validità della relazione di Bernoulli fra pressione e velocità. Quindi anche in questo caso il primo integrale fornisce solo un contributo di pura portanza (ed un eventuale contributo di resistenza indotta nel caso tridimensionale): la resistenza viscosa, dovendo necessariamente provenire dal secondo integrale, può quindi essere calcolata mediante integrazione estesa al solo tratto di contorno intersecato dalla scia. Possiamo quindi scrivere:

$$R_v = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (p - p_B) dy$$

in cui y indica una coordinata normale ed interna alla scia.

Sulla base delle considerazioni svolte nei paragrafi precedenti, in particolare dalle equazioni dello strato limite, sappiamo che attraverso la scia risulta $\partial p / \partial y = 0$, ovvero la pressione p è costante, e quindi vale p_∞ , dal momento che ci troviamo in una regione infinitamente lontana dal corpo. Come conseguenza diretta nella scia p_B deve essere variabile, mentre p resta costante e pari a p_∞ . Di conseguenza nella scia $p - p_B = p_\infty - p_B(y)$.

Per $x \rightarrow \infty$, cioè molto lontano dal profilo, si può linearizzare la funzione integranda intorno alla velocità V_∞ , ponendo:

$$u = V_\infty + u_1$$

e quindi $p - p_B = \rho V_\infty u_1$. La resistenza dovuta alla viscosità può essere scritta come:

$$R_v = \lim_{x \rightarrow \infty} \rho V_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (u - V_\infty) dy \quad (12.35)$$

che è proprio il difetto di quantità di moto che abbiamo visto essere costante lungo la scia.

Questa relazione è stata ricavata senza fare ricorso alle equazioni dello strato limite; è da considerarsi quindi valida anche per lo strato limite turbolento. Essa costituisce inoltre la base di un metodo sperimentale per la misura della resistenza viscosa; può risultare infatti più comodo misurare un profilo di velocità a valle di un profilo alare ed integrarlo che utilizzare una bilancia per la misura diretta delle forze agenti sul profilo stesso.

12.7.1 L'equazione integrale di von Kàrmàn

La resistenza R_v calcolabile attraverso la (12.35) è la resistenza complessiva dovuta all'esistenza di fenomeni viscosi; essa contiene non solo un contributo as-

sociato alla componente di forza tangenziale sul corpo (resistenza di *attrito*), ma anche un ulteriore contributo (talvolta denominato resistenza di *pressione* o di *profilo*) legato alla modifica del campo di pressione che agisce sul profilo, per gli effetti dello strato limite sulla zona esterna, come calcolabili all'ordine uno interno.

Questi due contributi possono essere messi in maggiore evidenza esaminando non il solo limite di distanza infinita dal profilo, ma seguendo l'evoluzione del difetto di quantità di moto via via che ci si allontana dal profilo.

Integriamo quindi le equazioni dello strato limite da 0 ad y_m (che verrà poi fatto tendere all'infinito); si ottiene:

$$\int_0^{y_m} (uu_x + vu_y - U_e U_{e,x}) dy + u_y(0) - u_y(y_m) = \int_0^{y_m} U_e U_{e,x} dy \quad (12.36)$$

Utilizzando l'equazione di continuità la componente v può essere scritta come:

$$v = - \int_0^y u_x dy'$$

e quindi, sostituendovi questa espressione della v , il secondo addendo della (12.36) può essere integrato per parti:

$$- \int_0^{y_m} u_y \int_0^y u_x dy' dy = -(u - U_e) \int_0^{y_m} u_x dy' \Big|_0^{y_m} + \int_0^{y_m} (u - U_e) u_x dy$$

in cui come primitiva della funzione u_y si è scelta, invece di u , la quantità $(u - U_e)$, che presenta il vantaggio di annullarsi all'infinito.

Quando allora si considera il limite per $y_m \rightarrow \infty$, il fattore finito dell'espressione ora scritta è nullo in entrambi gli estremi di integrazione: per $y = 0$ è nullo l'intervallo di integrazione, mentre quando $y \rightarrow \infty$ è nulla la quantità $(u - U_e)$. Tenendo conto di questo, e notando anche che $u_y(\infty) = 0$, si può riscrivere l'equazione integrata dello strato limite nel modo seguente:

$$\int_0^{\infty} [uu_x + u_x(u - U_e) - U_e U_{e,x}] dy + u_y(0) = 0$$

Riarrangiando i termini si ottiene:

$$\int_0^{\infty} [(u^2)_x - (U_e u)_x + U_{e,x} u - U_e U_{e,x}] dy + u_y(0) = 0$$

Si arriva quindi alla cosiddetta equazione integrale di von Kàrmàn:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(u - U_e) dy + U_{e,x} \int_0^{\infty} (u - U_e) dy + u_y(0) = 0$$

Ricordando ora la definizione (12.32) per lo spessore di spostamento δ^* , ed introducendo l'ulteriore spessore θ , detto di quantità di moto¹ e definito come:

$$\theta = \frac{1}{U_e^2} \int_0^{\infty} u(U_e - u) dy$$

l'equazione di von Kàrmàn può risciversi in funzione degli spessori:

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + U_e U_{e,x} \delta^* = u_y(0) \quad (12.37)$$

Questa equazione è valida non solo per $0 < x < 1$, ovvero sulla superficie del corpo, ma anche per $x > 1$, cioè sulla scia. Ivi nel caso simmetrico $u_y(0) = 0$; nel caso non simmetrico, si ha una u_y non nulla, che però fornisce due contributi eguali ed opposti all'integrale, relativi ai due lati della scia. Sufficientemente lontano dal corpo, si può infine ritenere anche che $U_{e,x} = 0$. Si vede quindi che $\theta = cost$, ovvero si ha una ulteriore conferma della conservazione del flusso di quantità di moto.

L'equazione integrale di von Kàrmàn può anche essere ulteriormente integrata rispetto alla coordinata x ; questo permette di evidenziare i due contributi (di attrito e di forma) alla resistenza viscosa:

$$(U_e^2 \theta)_{\infty} = \int_0^1 u_y(0) dx - \int_0^{\infty} U_e U_{e,x} \delta^* dx$$

Il primo addendo corrisponde alla resistenza di attrito sul corpo, dal momento che è nullo nel tratto da 1 a ∞ . Il secondo addendo dipende dallo spessore di spostamento δ^* : a seguito della nascita dello strato limite sul corpo, e del conseguente δ^* , la soluzione esterna avverte una variazione di pressione. Tale variazione è di ordine $1/\sqrt{Re}$ e quindi paragonabile con gli effetti dello sforzo tangenziale.

¹Lo spessore θ può anche essere interpretato come una media dell'inverso della pendenza del profilo di velocità, pesata attraverso una funzione peso che è massima nel punto dove la velocità assume un valore pari al 50% della velocità esterna:

$$\theta = \int_0^{\infty} u(1 - u) dy = \int_0^1 u(1 - u) \frac{dy}{du} du = \int_0^1 \frac{u(1 - u)}{u_y} du$$

La forma adimensionale L'equazione integrale (12.37) può anche essere scritta in una forma adimensionale: introducendo il coefficiente di attrito c_f , definito sulla base della derivata a parete del profilo di velocità:

$$c_f = \frac{u_y(0)}{U_e^2/2}$$

ed il fattore di forma H , definito come rapporto fra gli spessori di spostamento e di quantità di moto:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

si ottiene:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{c_f}{2} - (H + 2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$$

12.8 Soluzioni approssimate per lo strato limite

Come si è visto nei paragrafi precedenti, non sono molte le soluzioni esatte per i problemi di strato limite. Quando non esiste soluzione analitica, oltre alla strada, sempre percorribile, della soluzione numerica delle equazioni, esiste la possibilità di cercare soluzioni approssimate. Nel caso dello strato limite, questa tecnica può dare buoni risultati, grazie al fatto che le soluzioni delle equazioni dello strato limite hanno spesso un andamento relativamente standard e prevedibile. È così possibile esprimere i vari profili di strato limite in funzione di pochi ma significativi parametri, i quali a loro volta possono essere determinati per il particolare problema di interesse mediante l'imposizione, per esempio, della relazione integrale di von Kàrmàn, oppure scrivendo le equazioni dello strato limite alla parete, che si traduce semplicemente nella relazione $u_{yy}(0) = -U_e U_{e,x}$, o ancora di altre condizioni specifiche.

12.8.1 Il metodo di Polhausen

Il primo metodo approssimato, dovuto a Polhausen (1921), consiste nell'approssimare l'andamento del profilo di velocità, fino ad una certa distanza δ_P dalla parete, con un polinomio, di grado scelto in base al numero di condizioni disponibili per determinarne i coefficienti. Al di sopra della quota δ_P , poi, si suppone che l'andamento della velocità sia costante ed uguale ad $U_e(x)$. È chiaro che un'approssimazione polinomiale di questo tipo è piuttosto rozza; nonostante i risultati non accuratissimi il metodo di Polhausen risulta comunque di un certo interesse concettuale, oltre che storico.

Le condizioni a disposizione sono l'imposizione di velocità nulla a parete, la conoscenza della velocità ad $y = \delta_P$, dove il profilo di velocità deve avere derivata prima e seconda nulla, ed infine l'equazione dello strato limite scritta alla parete e

l'equazione integrale di von Kàrmàn: a queste sei condizioni corrispondono le sei incognite costituite dai cinque coefficienti che definiscono un polinomio di quarto grado, più la distanza δ_P .

Posto $\eta = y/\delta_P$, il profilo dello strato limite si approssima come:

$$\frac{u}{U_e} = \begin{cases} a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 & \text{per } y \leq \delta_P, \eta \leq 1 \\ 1 & \text{per } y > \delta_P, \eta > 1 \end{cases} \quad (12.38)$$

L'applicazione delle condizioni $u(0) = 0$, $u(\delta_P) = U_e$, $u_y(\delta_P) = 0$, $u_{yy}(\delta_P) = 0$ ed $u_{yy}(0) = -U_e U_{e,x}$ fornisce il seguente sistema di cinque equazioni:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0 \\ 2a_2 = -\delta_P^2 U_{e,x} \end{cases}$$

La sua risoluzione consente di esprimere i coefficienti che compaiono nell'espressione del profilo di velocità in funzione dell'unico parametro $\delta_P^2 U_{e,x} = \lambda$:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 2 + \frac{\lambda}{6}; \quad a_2 = -\frac{\lambda}{2}; \quad a_3 = -2 + \frac{\lambda}{2}; \quad a_4 = 1 - \frac{\lambda}{6}$$

L'espressione analitica approssimata (12.38) del profilo di velocità diviene:

$$\frac{u}{U_e} = A(\eta) + \lambda B(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\lambda}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4)$$

Si possono ora calcolare le espressioni degli spessori δ^* e θ (di spostamento e di quantità di moto) e della derivata a parete $u_y(0)$, che risultano funzioni facilmente determinabili di λ . Si ottiene:

$$\frac{\delta^*}{\delta_P} = \int_0^1 (1 - A(\eta) - \lambda B(\eta)) d\eta = \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120} = f_1(\lambda)$$

$$\frac{\theta}{\delta_P} = \int_0^1 (A(\eta) + \lambda B(\eta)) (1 - A(\eta) - \lambda B(\eta)) d\eta = \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\lambda}{15} - \frac{\lambda^2}{144} \right) = f_2(\lambda)$$

$$u_y(0) \frac{\delta_P}{U_e} = 2 + \frac{\lambda}{6} = f_3(\lambda)$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione integrale di von Kàrmàn (12.37), si ottiene:

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \delta_P f_2) + U_e U_{e,x} \delta_P f_1 = \frac{U_e}{\delta_P} f_3$$

che è una equazione differenziale ordinaria del primo ordine nella variabile λ . Lo si vede moltiplicando ambo i membri per δ_P/U_e , ottenendo:

$$2\lambda f_2(\lambda) + \frac{U_e}{U_{e,x}} \lambda \frac{d}{dx} f_2(\lambda) + \lambda f_1(\lambda) = f_3(\lambda)$$

Questa equazione, che si può ora integrare per separazione di variabili, richiede per la sua soluzione una condizione iniziale, ovvero uno spessore di strato limite al bordo di attacco, che si può determinare grazie alle soluzioni simili. Se il bordo di attacco ha uno spigolo, si utilizzano le soluzioni di Falkner–Skan; se invece il bordo di attacco è arrotondato, si ha in piccolo il comportamento della soluzione per spigolo inclinato di $\pi/2$. Tale soluzione corrisponde all'esponente $m = 1$ delle soluzioni simili di Falkner-Skan, per la quale lo spessore è:

$$h(x) = x^{(1-m)/2} = 1$$

e quindi è da ritenersi non nullo.

Il metodo di Polhausen, per quanto molto approssimato, funziona in modo accettabile nelle regioni di strato limite in cui il flusso si mantiene accelerante. Le sue prestazioni degradano nella zona in cui si ha decelerazione, ed il metodo diventa inapplicabile per la ricerca del punto di separazione, per la quale occorrono metodi appositamente progettati.

12.8.2 Il metodo di Thwaites

Il metodo di Thwaites rappresenta un'evoluzione del metodo di Polhausen, in cui come funzione che approssimi il profilo di velocità si sceglie non più un polinomio, ma una soluzione simile, descrivibile con un solo parametro, che può essere m ma anche $\delta_P^2 U_{e,x}$. In questo caso però la distanza δ_P può essere scelta liberamente, e la scelta $\delta_P = \theta$ porta ad avere solo due funzioni:

$$\frac{\delta^*}{\theta} = g_1(\theta^2 U_{e,x}); \quad u_y(0) \frac{\theta}{U_e} = g_3(\theta^2 U_{e,x})$$

Le funzioni g_1 e g_3 , funzioni del parametro $\theta^2 U_{e,x} = \lambda$, sono state determinate da Thwaites avvalendosi sia di dati ricavati sperimentalmente sia delle soluzioni simili di Falkner–Skan, ed hanno un andamento piuttosto complicato. Noto comunque questo andamento, l'equazione integrale si scrive più semplicemente come:

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + U_e U_{e,x} \theta g_1 = \frac{U_e}{\theta} g_3$$

ovvero anche:

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) = \frac{U_e}{\theta} [g_3(\lambda) - \lambda g_1(\lambda)]$$

Esplicitando la derivata a primo membro, e moltiplicando entrambi i membri per θ/U_e , si ottiene:

$$U_e \theta \frac{d\theta}{dx} = g_3 - \lambda g_1 - 2\theta^2 U_{e,x}$$

e quindi in definitiva:

$$U_e \frac{d\theta^2}{dx} = F(\lambda)$$

Mentre le funzioni g_1 e g_3 hanno un andamento relativamente complicato, Thwaites notò che la funzione $F(\lambda)$ risulta ottimamente approssimata da una funzione lineare $A + B\lambda$, in cui le due costanti valgono $A = 0.450$ e $B = -6$. L'equazione può essere integrata in forma chiusa, in quanto equazione lineare del primo ordine nella variabile θ^2 . Si ottiene così

$$U_e^6 \frac{d\theta^2}{dx} = 0.45U_e^5 - 6\theta^2 U_e^5 U_{e,x}$$

ovvero:

$$\frac{d}{dx} (U_e^6 \theta^2) = 0.45U_e^5$$

e quindi:

$$\theta^2(x) = \theta^2|_{x=0} + \frac{0.45}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5 dx'$$

Come nel metodo di Polhausen, la condizione iniziale per θ necessaria per la soluzione dell'equazione si ricava dalle soluzioni simili. Nota che sia dalla soluzione esterna allo strato limite la funzione $U_e(x)$, è possibile calcolare in sequenza lo spessore θ^2 e quindi tutti gli altri spessori e grandezze di interesse.

Il metodo di Thwaites è più raffinato del metodo di Polhausen, ma presenta fondamentalmente gli stessi difetti strutturali, e di conseguenza non è adatto a determinare con particolare accuratezza la posizione del punto di separazione, che può essere individuato con un errore dell'ordine del 10%.

12.9 La ricerca del punto di separazione: il metodo di Stratford

La conoscenza del punto di separazione costituisce una informazione estremamente importante dal punto di vista applicativo. Il metodo di Stratford permette di individuare con buona approssimazione il punto di separazione in uno strato

limite, e si basa sull'osservazione empirica che la separazione ha luogo poco a valle del punto in cui $U_{e,x}$ cambia segno, cioè del punto in cui la velocità esterna, raggiunto il suo massimo, inizia a diminuire.

Dal bordo di attacco fino a questo punto, si può applicare uno dei metodi precedenti. Nel breve tratto che separa questo punto dal punto di separazione, si può invece ritenere che il grosso delle modifiche avvenga nelle immediate prossimità della parete, dove la separazione sta per avvenire, mentre nella zona più esterna il profilo di velocità resta pressoché costante. Per rendersi conto di ciò, basta considerare che, nell'equazione dello strato limite, i termini convettivi sono piccoli vicino alla parete, mentre i termini di derivata seconda sono piccoli nella regione più esterna.

Si introduce allora una distanza δ_S dalla parete (funzione della coordinata x), che discrimina fra la zona più esterna (dello strato limite) in cui il ruolo della viscosità è trascurabile e la pressione $U_e U_{e,x}$ è bilanciata dalla convezione, ed una zona più vicina alla parete, dove invece la pressione è bilanciata dallo sforzo viscoso u_{yy} . Solo in quest'ultima zona si usa per il profilo di velocità un'approssimazione polinomiale, del tipo:

$$u = ay + by^2$$

Una prima relazione fra i coefficienti a e b viene dalla scrittura dell'equazione dello strato limite a parete: dalla $u_{yy}(0) = -U_e U_{e,x}$ si ricava subito che deve essere $2b = -U_e U_{e,x}$, e quindi:

$$u = ay - \frac{U_e U_{e,x}}{2} y^2 \quad (12.39)$$

Si parte poi dalle equazioni di strato limite (12.25) scritte nella forma di von Mises. Per $y > \delta_S$, ovvero nella zona esterna, dove si assumono trascurabili gli effetti viscosi, l'equazione di von Mises dice che:

$$\frac{d}{dx} (u^2 - U_e^2) = 0 \quad (12.40)$$

e quindi la quantità $u^2 - U_e^2 = f(\psi)$ può ritenersi costante su linee a $\psi = \text{cost}$, ovvero su linee di corrente. Indicando con il pedice 0 le grandezze valutate ad $x = 0$, definito come il punto in cui la velocità ha un massimo e poi inizia a diminuire, si può scrivere una prima relazione esterna imponendo che la quantità $u^2 - U_e^2$ alla quota $\delta_S(x)$ sia uguale al valore $u_0^2 - U_{e0}^2$ che essa assume sulla stessa linea di corrente ad $x = 0$:

$$u_0^2 - U_{e0}^2 = \left(a\delta_S(x) - \frac{U_e U_{e,x}}{2} \delta_S(x)^2 \right)^2 - U_e^2(x) \quad (12.41)$$

Una seconda relazione si ottiene appunto imponendo che la funzione di corrente ψ_0 nel punto ad $x = 0$, sia uguale al valore che essa assume alla quota $\delta_S = \delta_S(x)$. Il valore ψ_0 si ricava tenendo presente che, quando $x = 0$, $U_{e,x} = 0$ e quindi, dalla (12.39), si può ritenere che $u_0 = u_{y,0}y$. Quindi:

$$\psi_0 = u_{y,0} \frac{y^2}{2} = \frac{u_0^2}{2u_{y,0}}$$

e la seconda relazione, che lega le incognite interne a quelle esterne, è:

$$\frac{u_0^2}{2u_{y,0}} = a \frac{\delta_S^2}{2} - U_e U_{e,x} \frac{\delta_S^3}{6} \quad (12.42)$$

Per ottenere una terza relazione ricordiamo anzitutto che, come osservato poc' anzi, ad $x = 0$, la derivata del profilo di velocità $u_{y,0}$ è costante con y . D'altro lato la medesima u_y resta costante lungo linee a ψ costante: questo si vede derivando l'equazione di von Mises (12.40) nella zona esterna rispetto a ψ , e notando che $uu_\psi = u_y$. Infatti:

$$\left. \frac{d}{d\psi} u^2 \right|_{x=0} = \frac{d}{d\psi} u^2 = 2uu_\psi = 2u_y$$

Quindi alla stessa ψ la derivata u_y è pari al valore $u_{y,0}$:

$$u_y = a - U_e U_{e,x} \delta_S = u_{y,0} \quad (12.43)$$

Il sistema di tre equazioni (12.41), (12.42) e (12.43) nelle tre incognite a , δ_S ed u_0 permette di determinarle univocamente. Dal momento che siamo interessati alla ricerca del punto di separazione, poniamoci direttamente nelle condizioni di separazione, il che equivale a porre $a = 0$. Risolvendo in questo modo il sistema, ed eliminando le incognite δ_S e u_0 , si ottiene:

$$U_{e0}^2 - U_e^2 = -\frac{1}{4} (U_e U_{e,x})^2 \frac{u_{y,0}^4}{(U_e U_{e,x})^4} + 2u_{y,0} U_e U_{e,x} \frac{1}{6} \left(\frac{u_{y,0}}{U_e U_{e,x}} \right)^3$$

Riarrangiando i termini, si giunge alla relazione cercata:

$$(U_e U_{e,x})^2 (U_{e0}^2 - U_e^2) = \frac{1}{12} u_{y,0}^4 \quad (12.44)$$

che permette di determinare il valore della velocità esterna a cui avviene la separazione, e quindi la posizione del punto di separazione. Le informazioni necessarie, oltre l'andamento della $U_e = U_e(x)$, riguardano solamente la sezione ad $x = 0$ in cui il flusso inizia a decelerare.

