

Profili sottili in regime comprimibile

L'approssimazione dei profili sottili risulta utile anche in regime comprimibile. L'equazione completa (non lineare) per il potenziale può infatti essere linearizzata, dando luogo a due equazioni molto diverse a seconda che il moto sia subsonico o supersonico. Il regime di moto transonico, caratterizzato da valori del numero di Mach prossimi all'unità, richiede invece diverse e specifiche approssimazioni.

Indice del capitolo

11.1 L'equazione del potenziale linearizzata	255
11.2 Profili sottili in regime subsonico	258
11.2.1 Il caso tridimensionale	261
11.3 L'equazione linearizzata in regime supersonico	262
11.3.1 Le rette caratteristiche	262
11.3.2 Metodo delle caratteristiche e dominio di dipendenza	264
11.4 Profili sottili in regime supersonico	265
11.4.1 Profili di minima resistenza	268
11.4.2 Cenni al caso tridimensionale: la regola delle aree	272
11.5 Il regime transonico	273
11.5.1 L'equazione per il potenziale transonico	275
11.5.2 La similitudine transonica	277

11.1 L'equazione del potenziale linearizzata

Come abbiamo già avuto modo di osservare nel paragrafo §??, l'equazione per il potenziale comprimibile è più complessa della sua controparte incomprimibile, per il fatto che non è lineare. Si riesce però a ricavarne una versione linearizzata, supponendo che la velocità nell'intero campo di moto si discosti poco dal valore

assunto all'infinito. L'equazione risultante consente di risolvere in maniera semplice il problema del moto stazionario ed uniforme intorno a profili sottili, sia in regime subsonico che in regime supersonico. Essa descrive inoltre la propagazione di piccole perturbazioni instazionarie in un fluido in quiete (cioè le onde sonore).

Il procedimento per impostare il problema differenziale linearizzato è analogo a quanto visto nel Capitolo 7 per il problema dei profili sottili in regime incomprimibile. L'equazione e le condizioni al contorno si determinano effettuando uno sviluppo in serie di Taylor della funzione potenziale rispetto ad un parametro (piccolo) ϵ , che descrive la forma del (dorso e del ventre del) profilo secondo una relazione del tipo:

$$y_d(x) = \epsilon f_d(x); \quad y_v(x) = \epsilon y_v(x) \quad (11.1)$$

Supponiamo allora che il potenziale cinetico sia dato da:

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + \dots$$

Lo sviluppo in serie delle condizioni al contorno sul corpo e all'infinito è identico a quanto fatto nel caso incomprimibile. Per quanto riguarda le equazioni del moto, nel sistema (9.20) oltre all'equazione del potenziale compaiono l'equazione per l'entropia e quella per l'entalpia. Lo sviluppo in serie per l'entropia contiene solo il termine zero:

$$s = s_0$$

mentre per quanto riguarda l'entalpia lo sviluppo dell'equazione (9.15) fornisce:

$$h = h_0 - \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \epsilon \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Date le condizioni di moto omoentropico ed omoentalpico, i termini zero degli sviluppi di s ed h sono noti e pari al valore all'infinito:

$$s_0 = s_\infty; \quad h_0 = h_\infty$$

Occorre ora sviluppare in serie anche la prima equazione del sistema (9.20), che riscriviamo qui:

$$\frac{1}{a^2} \frac{Dh}{Dt} + \nabla^2 \varphi = 0$$

e considerarne solo i termini del primo ordine. Ne risulta la seguente equazione per i termini di ordine zero in ϵ :

$$\frac{1}{a_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \right] h_0 + \nabla^2 \varphi_0 = 0$$

In questa equazione sappiamo che le grandezze di ordine zero, ed in particolare h_0 , sono costanti; segue che il problema di ordine zero è ancora retto da un'equazione di Laplace per φ_0 , che date le condizioni al contorno ha soluzione:

$$\varphi_0 = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{x}$$

Il problema linearizzato, cioè al primo ordine in ϵ , si ottiene eguagliando fra loro i vari termini proporzionali ad ϵ . Nell'equazione al primo ordine possiamo inoltre direttamente tralasciare i termini contenenti il termine a_1 di ordine ϵ nello sviluppo della velocità del suono; infatti essi moltiplicano altri termini contenenti derivate (secondo) della soluzione di ordine zero, e quindi sono nulli.

$$\frac{1}{a_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \right] \left[-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi_1 \right] + \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

Definendo il simbolo:

$$D_\infty = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\infty \cdot \nabla$$

l'equazione linearizzata per il potenziale diviene:

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{D_\infty^2 \varphi_1}{D_\infty t^2} \quad (11.2)$$

Si vede che nel limite incomprimibile, in cui $a_\infty \rightarrow 0$, si riottiene l'equazione di Laplace.

La velocità del suono L'equazione (11.2), nel caso di fluido in quiete all'infinito, cioè con $V_\infty = 0$, si riconosce come l'equazione delle onde, ben nota dalla Fisica Matematica:

$$\frac{1}{a^2} \varphi_{1,tt} = \nabla^2 \varphi_1$$

Nel caso monodimensionale, l'equazione diviene semplicemente:

$$\varphi_{1,tt} - a^2 \varphi_{1,xx} = 0$$

Le sue soluzioni (come è immediato verificare) sono del tipo:

$$\varphi_1(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

in cui f e g sono funzioni arbitrarie, che si determinano imponendo che le condizioni al contorno siano soddisfatte. Il coefficiente costante a^2 dell'equazione delle onde ha il significato di quadrato della velocità di propagazione dell'onda. Le celerità del suono ha quindi il significato fisico di velocità a cui si propagano le piccole perturbazioni di pressione in un fluido in quiete.

Nel caso particolare del gas perfetto, ricordando la relazione (9.10) si vede che esiste un legame di proporzionalità diretta fra la velocità del suono e la radice quadrata della temperatura assoluta:

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

Se si risolve l'equazione completa del potenziale, le variazioni di temperatura nel campo di moto danno luogo ad una variazione locale della celerità del suono, che è una funzione dello stato termodinamico del fluido.

11.2 Profili sottili in regime subsonico

Il problema dei profili sottili è governato dalla stesse condizioni al contorno che valgono nel caso incomprimibile, anche se, come abbiamo visto, queste sono condizioni al contorno per l'equazione differenziale (11.2), che è diversa dall'equazione di Laplace.

Come nel caso incomprimibile discusso nel Capitolo 7, poniamo allora l'ulteriore ipotesi di stazionarietà e scegliamo l'asse x allineato al vettore \mathbf{V}_∞ . In questo modo si ha:

$$\frac{D_\infty}{D_\infty t} = V_\infty \frac{\partial}{\partial x}$$

e l'equazione (11.2), scritta per il caso bidimensionale e in coordinate cartesiane, si riduce a:

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy} = 0 \quad (11.3)$$

Il profilo sottile è descritto da due equazioni del tipo (11.1) per la forma del dorso e del ventre. La condizione all'infinito per il potenziale φ_1 è semplicemente:

$$\varphi_{1,x}(\infty) = 0$$

mentre, come nel caso incomprimibile, la condizione sul profilo diviene, ad esempio per il dorso:

$$\varphi_{1,y}(x, 0) = V_\infty \frac{df_d}{dx} \quad (11.4)$$

L'equazione (11.3) è simile all'equazione di Laplace; nel caso subsonico infatti è $M_\infty < 1$ ed il coefficiente che moltiplica la derivata seconda $\varphi_{1,xx}$ ha lo stesso segno di quello della derivata seconda $\varphi_{1,yy}$.

Si riesce a trasformare l'equazione (11.3) nell'equazione di Laplace operando un cambio di scala per la sola coordinata y , del tipo:

$$Y = \beta y$$

con il quale la derivata rispetto ad y si trasforma con la seguente legge di trasformazione:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial Y} = \beta \frac{\partial}{\partial Y} \quad (11.5)$$

L'equazione (11.3), riscritta nel sistema di coordinate (x, Y) , diviene:

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \beta^2\varphi_{YY} = 0$$

Possiamo scegliere il parametro β che specifica il cambio di scala in modo che i coefficienti delle due derivate seconde siano uguali, prendendo cioè:

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

In questo modo, dopo aver diviso per β^2 , l'equazione linearizzata del potenziale si trasforma nell'equazione di Laplace, e quindi identica al caso incomprimibile.

Le geometria del profilo, descritta da una funzione della sola x , non viene modificata dalla cambio di scala per y . La condizione al contorno (11.4) sul profilo è assegnata ad $y = 0$ (che corrisponde ad $Y = 0$), ma contiene una derivata rispetto ad y , e quindi, tenendo conto della (11.5), diviene:

$$\varphi_{1,Y}(x, 0) = \frac{1}{\beta} V_\infty \frac{df_d}{dx} \quad (11.6)$$

ovvero viene modificata di un fattore $1/\beta > 1$.

Grazie alla linearità del problema, allora, tutte le grandezze calcolate ad $Y = 0$, cioè anche ad $y = 0$, sono quelle che si calcolerebbero nel caso incomprimibile per lo stesso profilo ma con la condizione al contorno sul profilo modificata come la (11.6). In particolare questo vale anche per la componente u della velocità sul profilo.

L'effetto complessivo si può interpretare pensando che il profilo viene schiacciato di un fattore β in direzione y , migliorando così l'approssimazione di profilo sottile, ma con la condizione al contorno modificata di un fattore $1/\beta$.

Il coefficiente di pressione linearizzato Per passare dalla velocità u alla pressione sul profilo, non si può ovviamente utilizzare il teorema di Bernoulli nella sua forma incomprimibile: bisogna ricorrere alla conservazione dell'entalpia totale, espressa dalla relazione (9.14). Il coefficiente di pressione è sempre definito come:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{1/2\rho_\infty V_\infty^2}$$

Nel caso comprimibile, tenendo presente che:

$$\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma p_\infty}{\gamma p_\infty} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{\gamma}{2} p_\infty \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}$$

il c_p si scrive come:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\gamma/2 p_\infty M_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (11.7)$$

Nel problema linearizzato che stiamo considerando, le variazioni di entalpia rispetto al valore h_∞ sono piccole, e per un gas caloricamente perfetto legate alla variazione del quadrato della velocità:

$$T - T_\infty = \frac{V_\infty^2 - V^2}{2c_p}$$

cioè anche:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_\infty^2 - V^2}{a_\infty^2}$$

In un flusso isoentropico le variazioni di pressione sono legate alle variazioni di temperatura dalla relazione (9.8):

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Utilizzando lo sviluppo binomiale ed introducendo i vari termini dello sviluppo per la velocità, si vede infine che:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \left(\frac{2u_1}{V_\infty} + \dots \right)$$

Sostituendo nell'espressione (11.7) si ottiene così un'espressione formalmente analoga alla (7.8), che però vale anche per moto comprimibile:

$$c_p = -2 \frac{u_1}{V_\infty} \quad (11.8)$$

La correzione di Prandtl-Glauert La velocità del primo ordine u_1 , soluzione dell'equazione linearizzata per il potenziale comprimibile, contribuisce al coefficiente di pressione attraverso la stessa formula (lineare) del caso incomprimibile. Quindi anche per il c_p (e di conseguenza anche il coefficiente di portanza ed il coefficiente di momento) i risultati che si ottengono sono i medesimi del caso incomprimibile, modificati (aumentati) del fattore correttivo $1/\beta$, che prende il nome di fattore di correzione di Prandtl-Glauert. Il coefficiente di pressione è:

$$c_p = \frac{c_{p,inc}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

dove $c_{p,inc}$ indica il coefficiente di pressione che fornito dalla soluzione dell'equazione di Laplace per il profilo sottile, ma con la condizione al contorno (11.6) modificata. Notiamo che la teoria linearizzata prevede che, tendendo al limite $M_\infty = 1$, i coefficienti aerodinamici debbano tendere all'infinito. Approfondiremo in seguito questo aspetto trattando il regime transonico; la semplice regola di correzione di Prandtl-Glauert si può applicare con buoni risultati solo per numeri di Mach non superiori a circa 0.7.

Supponendo una relazione lineare fra il coefficiente di portanza e l'angolo di incidenza, del tipo $c_l = \partial c_l / \partial \alpha (\alpha - \alpha_0)$, si ottiene:

$$c_l = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial c_l}{\partial \alpha} \right)_{inc} (\alpha - \alpha_0)$$

La pendenza della curva $c_l - \alpha$ risulta quindi aumentata di $1/\beta$ rispetto al caso incomprimibile, mentre l'angolo di portanza nulla è invariato. Per ottenere la stessa portanza quindi occorre portarsi ad una incidenza minore; alla medesima incidenza si ha invece un c_l maggiore.

Per quanto riguarda la resistenza, in regime subsonico anche comprimibile continua a valere il paradosso di D'Alembert: se la distribuzione del c_p nel caso incomprimibile non è in grado di produrre una forza aerodinamica con una componente nella direzione di V_∞ (resistenza), una variazione di c_p che consista solo in una costante moltiplicativa non altera questo risultato.

Se si vuole calcolare la soluzione per $Y \neq 0$, occorre tenere in conto i due effetti contemporanei per cui la perturbazione è $1/\beta$ volte più grande dell'equivalente caso incomprimibile, ma ad una y diversa, in particolare $1/\beta$ più lontano. Osserviamo che all'aumentare del numero di Mach si ingrandisce la zona del campo di moto perturbata dalla presenza del profilo.

11.2.1 Il caso tridimensionale

L'equazione del potenziale linearizzata, sempre nell'ipotesi di problema subsonico e stazionario ma nel caso tridimensionale, è:

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

Si riesce ancora ad ottenere l'equazione di Laplace operando un opportuno cambio di scala, questa volta per le due coordinate y e z . Anche qui il fattore di scala β che rende uguali i coefficienti dei tre addendi è dato da:

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

I risultati del caso incomprimibile forniscono quindi ancora la soluzione, se corretti attraverso il fattore moltiplicativo $1/\beta$. In tre dimensioni ciò significa che l'ala "incomprimibile equivalente" ha non solo uno spessore ridotto di un fattore β , ma anche un allungamento ridotto nello stesso modo.

In tre dimensioni occorre considerare anche la resistenza indotta. A causa del cambio di scala per la coordinata z , ora l'ala vede modificato (diminuito) il proprio allungamento, e di conseguenza anche la velocità indotta e la resistenza indotta sono in generale diverse rispetto al caso incomprimibile.

È interessante però notare che, dei due problemi bidimensionali in cui viene scomposto il problema tridimensionale sotto l'ipotesi di forte allungamento dell'ala, quello nel piano di Trefftz è direttamente un problema di Laplace. La scia infatti è ferma nel sistema di riferimento dell'aria, in cui il numero di Mach è pressoché nullo.

Ciò implica che la curva polare, ovvero la relazione $c_L - c_D$, non viene modificata rispetto al caso incomprimibile. Essa infatti è una proprietà della scia, e non cambia a parità della distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$. Diverso invece è il caso della relazione $c_L - \alpha$, in cui nuovamente la pendenza della curva diviene:

$$\frac{\partial c_L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial c_L}{\partial \alpha} \right)_{inc}$$

Occorre perciò fare una distinzione a seconda che si ragioni a c_L fissato oppure ad incidenza fissata. Nel primo caso, come visto, anche il c_D e la resistenza sono uguali a quelle incomprimibili. Nel secondo, invece, in cui $c_L \sim 1/\beta$, il coefficiente di resistenza indotta aumenta secondo un fattore $1/\beta^2$.

11.3 L'equazione linearizzata in regime supersonico

L'equazione (11.3) quando il numero di Mach supera l'unità cambia natura, dal momento che il segno del coefficiente della derivata φ_{xx} diviene opposto a quello di φ_{yy} . In coordinate cartesiane ed in due dimensioni, e tralasciando il pedice 1 per indicare il potenziale del primo ordine, l'equazione si scrive:

$$(M_\infty^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \quad (11.9)$$

Il segno opposto dei coefficienti delle derivate seconde determina il passaggio da un'equazione di tipo ellittico, che descrive il caso subsonico, ad una di tipo iperbolico, di cui, analogamente a quanto fatto nel Capitolo 9 per l'equazione completa non lineare, esamineremo nel seguito le proprietà fondamentali risolvendo il problema di Cauchy per una linea aperta.

11.3.1 Le rette caratteristiche

Supponiamo di conoscere le equazioni parametriche $x = x_0(s)$ e $y = y_0(s)$ di una linea aperta del piano x, y in funzione del parametro s , e di conoscere sulla linea la soluzione. Siano $f(s)$ e $g(s)$ due funzioni note che descrivono l'andamento delle componenti cartesiane u e v del vettore \mathbf{V} sulla linea. Per conoscere la velocità nell'intorno di un punto P appartenente alla linea, si può, almeno da un punto di vista concettuale, espandere in serie di Taylor le componenti u e v arrestandosi al primo ordine. Si ottiene così il seguente sistema:

$$\begin{cases} u(P') - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ v(P') - v(P) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases}$$

in cui sono ancora incognite le tre derivate seconde del potenziale. Per calcolarle si può risolvere il sistema di tre equazioni costituito dalle due equazioni preceden-

ti, scritte lungo la linea nota di equazione $x = x_0(s)$ e $y = y_0(s)$, dove $u = f(s)$ e $v = g(s)$, e dall'equazione del moto (11.9):

$$\begin{cases} \varphi_{xx} \frac{dx_0}{ds} + \varphi_{xy} \frac{dy_0}{ds} = \frac{df}{ds} \\ \varphi_{xy} \frac{dx_0}{ds} + \varphi_{yy} \frac{dy_0}{ds} = \frac{dg}{ds} \\ (M_\infty^2 - 1) \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per dx_0/ds e la seconda per dy_0/ds , il sistema diviene:

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \varphi_{xy} \frac{dy_0}{dx_0} = \frac{df}{dx_0} \\ \varphi_{xy} \frac{dx_0}{dy_0} + \varphi_{yy} = \frac{dg}{dy_0} \\ (M_\infty^2 - 1) \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \end{cases} \quad (11.10)$$

Il sistema così scritto si può risolvere per esempio ricavando φ_{xx} dalla prima equazione e φ_{yy} dalla seconda, e sostituendo poi nella terza. Si ottiene:

$$\varphi_{xy} = \frac{(M_\infty^2 - 1) df/dx_0 - dg/dy_0}{(M_\infty^2 - 1) dy_0/dx_0 - dx_0/dy_0} \quad (11.11)$$

da cui poi è immediato ricavare le altre due derivate seconde φ_{xx} e φ_{yy} .

L'equazione caratteristica si ottiene eguagliando a zero il denominatore di questa soluzione:

$$(M_\infty^2 - 1) \left(\frac{dy_0}{dx_0} \right)^2 - 1 = 0 \quad (11.12)$$

Essa è un'equazione di secondo grado nell'incognita dy_0/dx_0 , pendenza della linea delle condizioni iniziali, ed ha radici reali quando $M_\infty > 1$. L'equazione in questo caso è iperbolica. Tali radici valgono:

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} = \pm \frac{1}{\beta} \quad (11.13)$$

Le direzioni caratteristiche nel caso lineare non dipendono dalla soluzione nel punto, ma solo dal valore di M_∞ . Di conseguenza le due famiglie \mathcal{C}^+ e \mathcal{C}^- di linee caratteristiche, avendo direzione costante, sono costituite in tutto il campo di moto da rette parallele.

Perchè il sistema (11.10) ammetta una soluzione non infinita anche se indeterminata, occorre che sia verificata anche la condizione di compatibilità. Nel caso lineare essa diviene:

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{df}{dx_0} - \frac{dg}{dy_0} = 0$$

Moltiplicando per $dx_0 dy_0$ si ottiene:

$$\frac{dg}{df} = (M_\infty^2 - 1) \frac{dy_0}{dx_0}$$

Questa condizione deve valere solo quando la pendenza coincide con una delle due pendenze caratteristiche. Sostituendo quindi per dy_0/dx_0 i valori dati dalla (11.13) otteniamo:

$$\frac{dv}{du} = \pm \beta \quad (11.14)$$

dove il segno deve essere coerente con la (11.13).

Analogamente a quanto osservato nel caso non lineare, le condizioni di compatibilità ci dicono come devono variare le proprietà del fluido muovendoci lungo una retta caratteristica.

11.3.2 Metodo delle caratteristiche e dominio di dipendenza.

Questo consente di costruire un metodo di soluzione, noto come metodo delle caratteristiche. Sulla famiglia di caratteristiche \mathcal{C}^+ vale la relazione (11.14), e quindi deve essere:

$$v - \beta u = \text{cost}$$

Di conseguenza:

$$\varphi_y - \beta \varphi_x = F(x - \beta y)$$

in cui F è una funzione generica. Analogamente sulle rette caratteristiche della famiglia \mathcal{C}^- si ha:

$$\varphi_y + \beta \varphi_x = G(x + \beta y)$$

La soluzione nel punto (x, y) si può quindi scrivere come somma di una funzione della sola quantità $x + \beta y$ e di una funzione della sola quantità $x - \beta y$, cioè:

$$\varphi(x, y) = F(x - \beta y) + G(x + \beta y) \quad (11.15)$$

Le funzioni F e G sono completamente determinate dalle condizioni al contorno, che restano costanti lungo le rette caratteristiche.

Il metodo delle caratteristiche permette di stabilire immediatamente la struttura del dominio di dipendenza della soluzione nel generico punto P , ancor più semplice rispetto al caso non lineare.

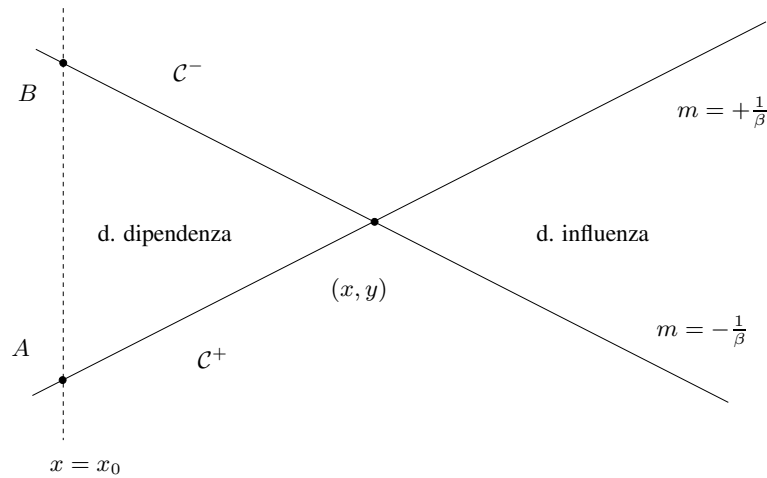


Figura 11.1 Domini di dipendenza e di influenza per il problema supersonico linearizzato.

Supponiamo infatti di conoscere la soluzione su una retta di equazione $x = x_0$: la soluzione in un punto generico di coordinate (x, y) si ottiene immediatamente invertendo il seguente sistema algebrico:

$$\begin{cases} v(x, y) + \beta u(x, y) = v(x_0, x + \beta y) + \beta u(x_0, x + \beta y) \\ v(x, y) - \beta u(x, y) = v(x_0, x - \beta y) - \beta u(x_0, x - \beta y) \end{cases}$$

Si vede quindi, osservando la Figura 11.1, qual è il dominio di dipendenza nel caso dell'equazione del potenziale linearizzata: la soluzione nel punto P di coordinate (x, y) dipende solo dai due punti A e B dati dall'intersezione della linea delle condizioni iniziali con le due rette caratteristiche che passano per P . Analogamente si ricava che la regione di influenza è costituita solo dalle due linee caratteristiche che si dipartono da P .

11.4 Profili sottili in regime supersonico

Consideriamo un profilo sottile, in modo analogo a quanto fatto per il caso subsonico nel paragrafo §11.2, e consideriamo in particolare il dorso del profilo. Con riferimento alla Figura 11.2, sappiamo che a sinistra della retta caratteristica ascendente spiccata dal bordo di attacco A del profilo la corrente è uniforme, e non risente della presenza del profilo. Per ogni punto a valle di questa retta caratteristica, si possono tracciare le due caratteristiche passanti per il punto. Una di esse (quella della famiglia C^- se siamo nel semipiano $y > 0$) proviene dall'infinito a monte, mentre l'altra parte dal profilo stesso. Nel semipiano superiore, quindi, si

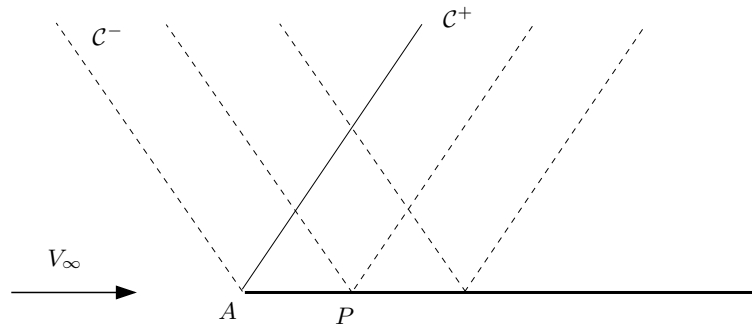


Figura 11.2 Profilo sottile in regime supersonico.

vede che la funzione G è nulla ovunque, mentre F è costante su ogni retta caratteristica ascendente, anche se varia a seconda del punto del profilo da cui la retta è spiccata. Su ogni retta caratteristica, quindi, le due componenti di velocità u e v sono costanti.

Per calcolare le forze aerodinamiche, è sufficiente conoscere la componente u di velocità sul profilo, cioè ad $y = 0$. La componente normale v è assegnata dalla condizione al contorno. Ponendo $G = 0$ nella (11.15), si arriva facilmente a determinare che la u è:

$$u = \frac{1}{\beta} V_\infty \frac{df_d}{dx}$$

Questa relazione permette già di notare che la velocità u dipende solo dalla pendenza locale del profilo. Questa è una grossa semplificazione rispetto al caso incomprimitibile, in cui la u si esprime attraverso un integrale che contiene la pendenza di tutto il profilo. Le forze aerodinamiche si calcolano per integrazione degli sforzi normali sul contorno. La pressione nella teoria linearizzata è data, come già visto nel paragrafo §11.2, dall'espressione (11.8), che è la stessa del caso incomprimitibile. Si ottiene quindi:

$$c_{p,d} = -\frac{2}{\beta} \frac{df_d}{dx}$$

Il calcolo del coefficiente di portanza richiede l'integrazione dello sforzo normale su dorso e ventre del profilo; ciò porta a:

$$c_l = \int_0^1 c_{p,v} dx - \int_0^1 c_{p,d} dx = \frac{4}{\beta} (f(0) - f(1))$$

Se la corda viene definita come il segmento congiungente il bordo di attacco

con il bordo di uscita, quando il profilo è posto ad incidenza nulla si ha $f(0) = f(1)$, e quindi:

$$c_l = \frac{4}{\beta} \alpha \quad (11.16)$$

L'angolo di portanza nulla risulta automaticamente nullo con questa scelta della corda, che si presenta quindi come la più naturale in regime supersonico. Nell'ambito di validità della teoria linearizzata, qualsiasi corpo produce un coefficiente di portanza che dipende solo dall'angolo di incidenza.

La resistenza d'onda Per il calcolo del coefficiente di resistenza, bisogna valutare l'integrale:

$$c_d = \int_0^1 \left(c_{p,v} \frac{df_v}{dx} - c_{p,d} \frac{df_d}{dx} \right) dx = \frac{2}{\beta} \int_0^1 \left[\left(\frac{df_d}{dx} \right)^2 + \left(\frac{df_v}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Il contributo al c_d è sempre positivo, e dipende dalla forma del profilo. Si possono subito separare i contributi di linea media, spessore ed incidenza. Per il dorso si ha:

$$f_d(x) = y_{lm}(x) + \frac{1}{2}s(x) - \alpha x$$

mentre per il ventre risulta:

$$f_v(x) = y_{lm}(x) - \frac{1}{2}s(x) - \alpha x$$

Sostituendo nell'espressione del c_d , e notando che tutti i prodotti incrociati si semplificano quando la corda è scelta come sopra indicato, si ottiene:

$$c_d = \frac{4}{\beta} \left[\alpha^2 + \int_0^1 \left(\frac{dy_{lm}}{dx} \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{ds}{dx} \right)^2 dx \right] \quad (11.17)$$

Il coefficiente di resistenza è quindi non nullo, e composto di tre contributi tutti maggiori o uguali a zero. La resistenza che ne deriva prende il nome di resistenza d'onda, ed è caratteristica del regime di moto supersonico. Essa rende conto dell'energia che viene irradiata per propagazione ondosa. La resistenza d'onda risulta comunque ancora espressa da una funzione quadratica nell'incidenza α , per cui la forma generale della curva polare del profilo resta simile a quella che rende conto, per esempio, della resistenza indotta, fatto salvo l'ordine di grandezza della resistenza stessa, che in regime supersonico è molto più alta.

Il centro aerodinamico Ripetendo un discorso analogo per il calcolo del coefficiente di momento, si trova che il centro aerodinamico è posizionato al 50% della corda, con una sensibile differenza rispetto al caso subsonico. Lo spostamento del centro aerodinamico nel passaggio da volo subsonico a volo supersonico rende particolarmente delicato l'equilibrio di un velivolo che, ottimizzato per il volo supersonico, deve nondimeno essere in grado di volare anche a velocità subsonica. Per risolvere questo problema si adottano talora ali a geometria variabile, nonostante la complessità tecnologica che ciò comporta.

Il coefficiente di momento calcolato rispetto al centro aerodinamico non dipende dalla distribuzione di spessore, e risulta:

$$c_{m,ca} = \frac{4}{\beta} \int_0^1 \frac{dy_{lm}}{dx} x \, dx$$

11.4.1 Profili di minima resistenza

Data la rilevanza delle perdite di energia che la resistenza d'onda comporta, è particolarmente interessante affrontare il problema della minima resistenza in campo supersonico. Osservando la relazione (11.17), si nota anzitutto che, per un dato profilo, la resistenza d'onda contiene un termine proporzionale al quadrato dell'angolo di incidenza. Per un aereo, l'incidenza non può essere variata per ridurre la resistenza, ma il contributo dell'incidenza può essere efficacemente minimizzato in sede di progetto scegliendo una incidenza opportuna per il volo di crociera attraverso la scelta della superficie alare. Il contributo resistente dovuto alla linea media può invece essere completamente annullato utilizzando una linea media rettilinea, in modo da avere pendenza localmente nulla. Il contributo dello spessore invece è nullo solo quando la distribuzione di spessore è identicamente nulla. Complessivamente tutto questo conduce ad individuare nella lastra piana il profilo ottimo dal punto di vista della resistenza (un risultato del tutto diverso da quello della teoria dei profili sottili in regime incomprimibile!). Purtroppo per motivi strutturali la lastra piana non è utilizzabile.

Al contrario del risultato subsonico, per cui esiste per ogni profilo un preciso angolo di incidenza ottima, qui l'ottimizzazione della forma geometrica del profilo è possibile in maniera indipendente dall'incidenza. A titolo di esempio, si possono trattare in maniera analitica i casi di ricerca di minimo per un dato spessore massimo, oppure per una data area, utilizzando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange ed annullando la derivata variazionale della resistenza rispetto alla distribuzione di spessore.

Resistenza minima per spessore massimo imposto In questo caso l'obiettivo di progetto è quello di ottenere una distribuzione di spessore che minimizzi la resistenza, con il requisito di uno spessore massimo imposto. Supponiamo anzitutto di conoscere la posizione x_0 del punto di massimo spessore, posizione che in realtà dovremo determinare in seguito. Dividiamo inoltre il problema in

due sottoproblemi, il primo per $x < x_0$ ed il secondo per $x > x_0$. Cerchiamo quindi dapprima il minimo della quantità:

$$\int_0^{x_0} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx \quad (11.18)$$

con il vincolo di massimo spessore s_0 assegnato, che si scrive come:

$$\int_0^{x_0} \frac{ds}{dx} dx = s_0 \quad (11.19)$$

La funzione ausiliaria di Lagrange, da minimizzare senza vincoli, è data dalla seguente funzione \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \int_0^{x_0} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx + \lambda \left[\int_0^{x_0} \frac{ds}{dx} dx - s_0 \right]$$

in cui il moltiplicatore di Lagrange λ va determinato a posteriori in modo che il vincolo sia soddisfatto. Si consideri ora un piccolo incremento di spessore $\delta s(x)$ intorno alla distribuzione di spessore $\bar{s}(x)$. Occorre imporre che la parte lineare in $\delta s(x)$ di \mathcal{L} sia nulla per una variazione arbitraria $\delta s(x)$.

$$\mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L} = \int_0^{x_0} \left[\left(\frac{d\bar{s}}{dx} \right)^2 + \lambda \frac{d\bar{s}}{dx} \right] dx - \lambda s_0 + \int_0^{x_0} \left(2 \frac{d\bar{s}}{dx} \frac{d\delta s}{dx} + \lambda \frac{d\delta s}{dx} \right) dx + \dots$$

Per una distribuzione di spessore $\bar{s}(x)$ arbitraria ma continua, questo implica che deve essere:

$$\delta \mathcal{L} = \int_0^{x_0} \left(2 \frac{d\bar{s}}{dx} + \lambda \right) \frac{d\delta s}{dx} dx = 0$$

per qualsiasi scelta della funzione $\delta s(x)$. Ne segue che deve essere nullo il coefficiente di $\delta s(x)$, e da questa condizione si ricava l'equazione per \bar{s} :

$$2 \frac{d\bar{s}}{dx} + \lambda = 0$$

La condizione di minimo non vincolato si ottiene quindi per distribuzioni di spessore lineari. Ora occorre scegliere λ in modo che il vincolo sia soddisfatto, e questo si ottiene mettendo a sistema l'equazione ora ricavata per \bar{s} e la condizione di vincolo (11.19). Dalla soluzione del sistema si ottiene:

$$\int_0^{x_0} -\frac{\lambda}{2} dx = s_0$$

da cui si ricava immediatamente $\lambda = -2s_0/x_0$, e quindi:

$$\bar{s}(x) = \frac{s_0}{x_0}x$$

In maniera del tutto simile si tratta la seconda parte del profilo, ottenendo per $x_0 \leq x \leq 1$:

$$\bar{s}(x) = \frac{s_0}{1-x_0}(1-x)$$

Consideriamo ora la resistenza totale generata dai due segmenti così ottenuti, che risulta naturalmente funzione della posizione x_0 del punto di massimo spessore:

$$c_d(x_0) = \int_0^{x_0} \left(\frac{s_0}{x_0}\right)^2 dx + \int_{x_0}^1 \left(\frac{-s_0}{1-x_0}\right)^2 dx = \frac{s_0^2}{x_0} + \frac{s_0^2}{1-x_0}$$

Si può determinare la posizione x_0 imponendo che l'espressione del c_d sia minima anche rispetto alla scelta dello stesso x_0 . Ponendo quindi uguale a zero la derivata rispetto ad x_0 , si ha:

$$-\frac{s_0^2}{x_0^2} + \frac{s_0^2}{(1-x_0)^2} = 0$$

da cui si ricava per il punto di massimo spessore la posizione:

$$x_0 = 1/2$$

Il profilo supersonico di minima resistenza a spessore massimo imposto è quindi un profilo a forma di rombo.

Notiamo in questo caso particolare un risultato di validità generale: il bordo di attacco di un profilo supersonico deve essere appuntito. Se infatti il profilo ha bordo di attacco arrotondato (come avviene per tutti i profili ottimizzati per il regime subsonico) lo spessore, in prossimità del bordo di attacco, è localmente approssimabile con una parabola del tipo $y \sim \sqrt{x}$. Con una distribuzione di spessore di questo tipo, la derivata della funzione $s(x)$ elevata al quadrato è proporzionale a $1/x$, e quindi non integrabile. Se ne deduce che la teoria linearizzata prevede resistenza infinita quando il bordo di attacco è arrotondato. Ovviamente un profilo con un bordo di attacco di questo tipo non soddisfa la condizione di avere piccola pendenza, ed è necessario ricorrere alla teoria esatta per una valutazione quantitativa della resistenza. La teoria linearizzata fornisce comunque l'informazione importante che un bordo di attacco arrotondato provoca una resistenza d'onda molto elevata.

Resistenza minima per area imposta Il problema analogo in cui però il vincolo è assegnato sull'area del profilo si risolve con lo stesso procedimento. Si tratta sempre di determinare il minimo dell'integrale (11.18), ma questa volta il vincolo di massima area A_0 imposta si scrive come:

$$\int_0^1 s(x) dx = A_0 = \int_0^1 \int_0^x \frac{ds}{dx'} dx' dx \quad (11.20)$$

In realtà questo problema deve sottostare ad un secondo vincolo. La distribuzione di spessore deve infatti dar luogo ad un profilo chiuso, cioè deve essere:

$$\int_0^1 \frac{ds}{dx} dx = 0$$

L'integrale (11.20) si può calcolare per parti, ottenendo:

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{ds}{dx'} dx' dx = x \int_0^x \frac{ds}{dx'} dx' \Big|_0^1 + \int_0^1 x \frac{ds}{dx} dx$$

in cui il primo addendo è nullo grazie alla condizione di chiusura del profilo.

La funzione da minimizzare conterrà quindi due parametri, che vanno determinati imponendo che i due vincoli siano soddisfatti. Con qualche calcolo si ricava che la forma del profilo che minimizza la resistenza è simmetrica rispetto alla metà della corda, e che l'andamento dello spessore è parabolico: si ottiene così un profilo a lunetta, che presenta anch'esso bordo di attacco aguzzo.

Il contributo dell'incidenza In sede di progetto, è importante valutare il contributo dell'incidenza alla resistenza d'onda per scegliere la superficie alare, una volta stabilito il peso del velivolo e la velocità di crociera. Il coefficiente di resistenza può essere scritto, per quanto già visto, come:

$$c_d = \frac{4}{\beta} [c_{d,0} + \alpha^2]$$

in cui $c_{d,0}$ è la parte del c_d dipendente dal profilo, e che quindi non varia con l'incidenza. Sostituendo l'incidenza a cui, secondo la (11.16), occorre volare per produrre un certo c_l , si ottiene:

$$c_d = \frac{4}{\beta} \left[c_{d,0} + \left(\frac{\beta c_l}{4} \right)^2 \right] = \frac{\beta}{4} c_l^2 + \frac{4}{\beta} c_{d,0}$$

Questa relazione, considerata come dipendenza del c_d dal c_l , non è qualitativamente diversa da quella del caso subsonico: si tratta sempre di una parabola che

non passa per l'origine. Se considerata invece come funzione $c_d = c_d(\beta)$, essa pone in evidenza come il coefficiente di resistenza tenda all'infinito quando β tende all'infinito (limite ipersonico) oppure a zero (limite transonico). Il c_d presenta un interessante punto di minimo per valori di β intermedi fra il limite transonico (in cui, come in tutti i problemi ondosi, c'è rinforzamento in fase) e nel limite opposto di numeri di Mach molto elevati. Il regime intermedio di velocità per cui si ha il minimo del c_d a pari c_l si determina mediante derivazione della relazione precedente rispetto a β :

$$\frac{dc_d}{d\beta} = \frac{c_l^2}{4} - \frac{4}{\beta^2} c_{d,0}$$

Quando questa derivata è nulla, cioè quando $\beta^2 = 16c_{d,0}/c_l^2$, il coefficiente di resistenza assume il minimo valore per un assegnato coefficiente di portanza:

$$c_{d,min} = 2c_l \sqrt{c_{d,0}}$$

Se si ragiona su un particolare aereo, e non sul solo coefficiente di resistenza, occorre considerare il rapporto c_d/c_l , che rappresenta il rapporto fra la spinta ed il peso del velivolo; si ha:

$$\frac{c_d}{c_l} = \frac{\beta c_l}{4} + \frac{4c_{d,0}}{\beta c_l}$$

In questa relazione compare solo il prodotto βc_l . Il minimo del rapporto c_d/c_l si ottiene quando $(\beta c_l)^2 = 16c_{d,0}$. Dato un problema di progetto, in cui sono fissati il numero di Mach di volo di crociera ed il peso dell'aereo, questa relazione risulta di fondamentale importanza perché permette di determinare il coefficiente di portanza e , di conseguenza, la superficie alare che consente di minimizzare la resistenza d'onda. Il minimo del rapporto c_d/c_l vale:

$$\left(\frac{c_d}{c_l}\right)_{min} = 2\sqrt{c_{d,0}}$$

ed è un parametro essenzialmente geometrico, legato al fatto che in qualche modo l'ala deve avere uno spessore sufficiente per essere costruibile.

Il rapporto c_d/c_l risulta molto più elevato rispetto al regime subsonico. Il grosso aumento di resistenza si ha comunque nel regime transonico; per numeri di Mach più elevati il c_d decresce, e l'aumento di resistenza, oltre ad essere limitato, è anche piuttosto dolce.

11.4.2 Cenni al caso tridimensionale: la regola delle aree

Il caso supersonico è caratterizzato da una resistenza d'onda molto elevata, che prevale decisamente sulle altre componenti resistive. Gli effetti resistivi dovuti alla tridimensionalità si possono ridurre in maniera significativa sagomando opportunamente la pianta dell'ala (e dell'intero velivolo).

Dal punto di vista matematico non ci sono differenze concettuali con quanto visto per le due dimensioni; se il profilo è sottile si può usare l'equazione linearizzata per il potenziale, che diviene:

$$(M_\infty^2 - 1) \varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz}$$

Si tratta ancora di una equazione delle onde, ma in due dimensioni trasversali. Dal punto di vista della resistenza, si ritrova ancora il risultato che il bordo di attacco deve essere aguzzo. Si può vedere inoltre che un parametro importante nel determinare la resistenza è la velocità di variazione, in direzione x , della sezione trasversale A dell'ala (e del velivolo). Una forma di pianta alare molto diffusa è di conseguenza quella dell'ala a forma di triangolo o a delta. Dal punto di vista dell'ottimizzazione, i risultati migliori si ottengono con una superficie alare a forma di rombo; questo però determina rilevanti problemi di controllo. La fusoliera viene sagomata in modo da ridurre la sezione in corrispondenza delle ali, con l'obiettivo di mantenere il più possibile costante la funzione $A(x)$.

11.5 Il regime transonico

Il regime transonico riveste notevole importanza applicativa, dal momento che gran parte dei velivoli commerciali volano oggi in condizioni in cui il numero di Mach è di poco inferiore all'unità. A velocità di crociera di tipo transonico si trova infatti oggi il delicato punto di equilibrio fra costi e benefici da un punto di vista economico.

Come si illustra schematicamente nella Figura 11.3, il flusso attorno ad un profilo alare subisce notevoli modifiche nel passare dal regime di moto subsonico a quello supersonico: particolarmente importante è l'improvviso aumento di resistenza. Al crescere della velocità di volo partendo dal regime completamente subsonico, si raggiunge un valore di M_∞ ancora minore di 1, ma in corrispondenza del quale compare sul profilo, tipicamente sul dorso, un punto in cui il numero di Mach diviene localmente unitario. Al crescere della velocità questo punto diventa una bolla supersonica, delimitata da una linea su cui $M = 1$, la linea sonica. Per numeri di Mach M_∞ ancora superiori ma sempre subsonici, la zona supersonica si ingrandisce rapidamente, ed entro breve il rallentamento del flusso nella parte posteriore della zona supersonica causa la formazione di un'onda d'urto.

Mano a mano che ci si avvicina a $M_\infty = 1$ l'onda d'urto cresce di estensione ed intensità, determinando importanti incrementi di resistenza aerodinamica anche a causa della separazione dello strato limite e del conseguente aumento di spessore della scia. Quando $M_\infty = 1$ la linea sonica si apre fino all'infinito, e dopo un ulteriore piccolo incremento della velocità di volo, compare all'infinito a monte un urto staccato davanti al profilo. L'urto rapidamente si avvicina al bordo di attacco, per diventare un urto attaccato quando il bordo di attacco presenta uno spigolo di semiapertura inferiore all'angolo limite se M_∞ diviene sufficientemente elevato. Solo dopo questa fase il regime di moto si può considerare completamente supersonico.

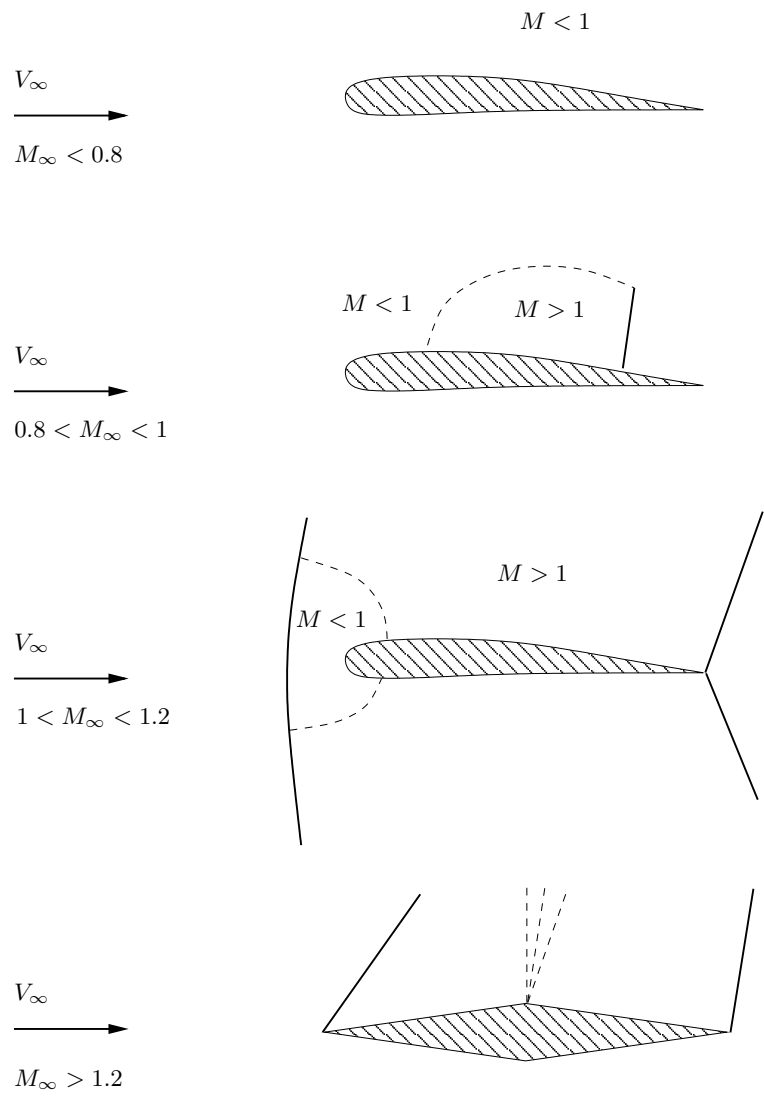


Figura 11.3 Illustrazione qualitativa dei fenomeni aerodinamici in regime transonico al crescere di M_∞ .

11.5.1 L'equazione per il potenziale transonico

È sufficiente osservare l'equazione linearizzata per il potenziale (11.9) per comprendere come nel limite di $M_\infty \rightarrow 1$ essa debba perdere di validità. Infatti in questo caso essa si riduce alla (troppo) semplice equazione:

$$\varphi_{yy} = 0$$

la cui soluzione afferma che la componente v della velocità è costante con la coordinata y . Questa informazione peraltro ha un fondamento fisico, in quanto indica che le perturbazioni si propagano molto lontano in y , e giustifica il fatto che le soluzioni linearizzate, sia subsoniche che supersoniche, se estrapolate fino a $M_\infty = 1$ forniscono forze aerodinamiche infinite.

Nel limite transonico l'equazione linearizzata costituisce un'approssimazione non più accettabile. Si può comunque ottenere un'equazione più semplice rispetto all'equazione completa del potenziale, decidendo di approssimare meglio i coefficienti utilizzandone una espressione linearizzata rispetto alla velocità.

Ripartiamo allora dall'equazione esatta per il potenziale, scritta per il caso bidimensionale e stazionario in coordinate cartesiane:

$$(u^2 - a^2) \varphi_{xx} + 2uv\varphi_{xy} + (v^2 - a^2) \varphi_{yy} = 0$$

Si considera poi un profilo sottile, in modo identico a quanto fatto nel Capitolo 7, scegliendo il sistema di riferimento in modo che l'asse x risulti allineato con la velocità asintotica. Nel regime transonico, il numero di Mach è molto prossimo all'unità, quindi la velocità all'infinito V_∞ non è molto diversa dalla velocità a_* , ed è comodo linearizzare rispetto ad a_* . Si suppone dunque che $\varphi = \varphi_0 + \epsilon\varphi_1$, dove $u = a_* + \varphi_{1,x}$ e $v = \varphi_{1,y}$. La consueta condizione al contorno per il potenziale all'infinito diviene allora:

$$\varphi_{1,x}(\infty) = V_\infty - a_*$$

L'equazione del potenziale contiene inoltre la velocità del suono a , che deve essere espressa come la somma di a_* e di una correzione del primo ordine, che indichiamo con a_1 . La conservazione dell'entalpia totale, scritta nella forma (9.16) per un gas perfetto, diventa:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{a_*^2}{\gamma - 1} + \frac{a_*^2}{2}$$

Questa equazione va linearizzata, trascurando i termini quadratici:

$$\frac{a_*^2 + 2a_*a_1}{\gamma - 1} + \frac{a_*^2 + 2a_*u_1}{2} = \frac{a_*^2}{\gamma - 1} + \frac{a_*^2}{2}$$

I termini costanti sono identici, mentre i termini del primo ordine forniscono un legame fra a_1 ed u_1 , che si può interpretare come la versione linearizzata dell'equazione dell'entalpia totale:

$$a_1 = -\frac{\gamma - 1}{2}u_1 \quad (11.21)$$

Il coefficiente $(u^2 - a^2)$ dell'equazione del potenziale, trascurando di nuovo i termini quadratici, diventa:

$$u^2 - a^2 = (a_*^2 + 2u_1a_*) - (a_*^2 + 2a_1a_*) = 2a_*(u_1 - a_1)$$

Sfruttando ora la (11.21) si ottiene:

$$u^2 - a^2 = a_*(\gamma + 1)u_1$$

Per quanto riguarda il coefficiente $v^2 - a^2$, dal momento che v è già una quantità del primo ordine, si vede che:

$$v^2 - a^2 = -a_*^2 - 2a_*a_1$$

mentre il coefficiente $2uv$ è pari a $2a_*v_1$. Si ottiene quindi l'equazione:

$$(\gamma + 1)a_*u_1\varphi_{1,xx} + 2a_*v_1\varphi_{1,xy} - (a_*^2 + 2a_*a_1)\varphi_{1,yy} = 0$$

che si può ulteriormente dividere per a_*^2 e riscrivere nel modo seguente, trascurando il termine di ordine superiore:

$$(\gamma + 1)\frac{\varphi_{1,x}}{a_*}\varphi_{1,xx} + 2\frac{\varphi_{1,y}}{a_*}\varphi_{1,xy} - \varphi_{1,yy} = 0 \quad (11.22)$$

Il problema transonico dà luogo ad un'equazione che non è lineare, anche se ricavata sotto l'ipotesi di piccole perturbazioni. L'equazione è di natura iperbolica o ellittica a seconda del segno del coefficiente u_1 , e risulta sufficientemente complicata da non permettere l'ottenimento di soluzioni semplici. Esistono però proprietà di scala che possono essere utilmente sfruttate.

Il problema (11.22) è completato dalle condizioni al contorno, che si assegnano sul profilo e all'infinito:

$$\varphi_{1,y}(x, 0) = \epsilon \frac{df}{dx} V_\infty$$

$$\varphi_{1,x}(\infty) = V_\infty - a_*$$

Dal momento che V_∞ e a_* sono molto simili fra loro, possiamo sostituire la condizione sul profilo con la:

$$\varphi_{1,y}(x, 0) = \epsilon a_* \frac{df}{dx} \quad (11.23)$$

che è equivalente nei limiti di una approssimazione al primo ordine.

11.5.2 La similitudine transonica

Il problema del potenziale in regime transonico presenta due gradi di libertà nella scelta di un fattore di scala per la y e per la funzione potenziale. Questa scelta può essere effettuata in modo da eliminare qualcuno fra i parametri ϵ , a_* e γ che caratterizzano il problema.

La coordinata y può essere riscalata con una legge del tipo $y = \eta Y$, perché la condizione sul profilo è nota ad $y = 0$. Il legame fra le derivate è $\partial/\partial Y = \eta \partial/\partial y$, e la condizione (11.23) diviene:

$$\varphi_{1,Y}(x, 0) = \epsilon \eta a_* \frac{df}{dx}$$

mentre l'equazione si scrive:

$$(\gamma + 1) \frac{\varphi_{1,x}}{a_*} \varphi_{1,xx} + \frac{2}{a_*} \frac{1}{\eta^2} \varphi_{1,Y} \varphi_{1,xY} - \frac{1}{\eta^2} \varphi_{1,YY} = 0$$

In maniera indipendente, si può cambiare anche la scala della funzione φ_1 , mediante una trasformazione del tipo $\varphi_1 = A\phi$. Dopo averla divisa per A^2 l'equazione per ϕ diviene:

$$(\gamma + 1) \frac{\phi_x}{a_*} \phi_{xx} + \frac{2}{a_*} \frac{1}{\eta^2} \phi_Y \phi_{xY} - \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{A} \phi_{YY} = 0$$

con le condizioni al contorno:

$$\phi_Y(x, 0) = \frac{1}{A} \epsilon \eta a_* \frac{df}{dx}; \quad \phi_x(\infty) = \frac{1}{A} (V_\infty - a_*)$$

Il parametro ϵ è legato allo spessore del profilo, e compare solo nella condizione al contorno assegnata ad $Y = 0$. Lo si può quindi eliminare mediante una scelta opportuna degli altri due parametri η ed A ; in particolare tutti i parametri scompaiono dalla condizione imposta sul profilo, in maniera indipendente dalla scelta di A , se si sceglie il fattore di scala η come:

$$\eta = \frac{A}{\epsilon a_*} \quad (11.24)$$

così che la condizione al contorno diviene:

$$\phi_Y(x, 0) = \frac{df}{dx}$$

Tutti i parametri scompaiono inoltre dal primo e dal terzo addendo dell'equazione, se si sceglie per A l'espressione:

$$A = \frac{a_*}{(\gamma + 1)\eta^2} = a_*(\gamma + 1)^{-1/3} \epsilon^{2/3} \quad (11.25)$$

Il secondo addendo dell'equazione risulta addirittura trascurabile, perché proporzionale ad η^{-2} ; infatti, esplicitando il legame fra ϵ ed η si vede che:

$$\eta^3 = \frac{1}{(\gamma + 1)\epsilon}$$

cioè a valori piccoli di ϵ corrispondono valori grandi di η (il che significa che quanto più il profilo è sottile, tanto più lontano si estende la perturbazione introdotta dal profilo stesso). Quindi per profili sottili il secondo addendo dell'equazione si può trascurare. Il problema matematico per il potenziale in regime transonico si riconduce dunque alla soluzione dell'equazione:

$$\phi_x \phi_{xx} = \phi_{YY} \quad (11.26)$$

da risolversi con le condizioni al contorno:

$$\phi_Y(x, 0) = \frac{df}{dx}; \quad \phi_x(\infty) = \frac{V_\infty - a_*}{a_*} = \frac{V_\infty - a_*}{a_*} \epsilon^{-2/3} (\gamma + 1)^{1/3}$$

Gli effetti del numero di Mach, del particolare tipo di gas e del fattore moltiplicativo ϵ corrispondente ad una certa forma del profilo $y = \epsilon f(x)$ risultano così concentrati nell'unico parametro \mathcal{K} , che prende il nome di parametro di similitudine transonica:

$$\mathcal{K} = \frac{V_\infty - a_*}{a_*} \epsilon^{-2/3} (\gamma + 1)^{1/3}$$

Si può anche scrivere \mathcal{K} come funzione esplicita del numero di Mach. Infatti, ricordando la (11.21), si ha:

$$M^2 = \frac{(a_* + u_1)^2}{(a_* + a_1)^2} = 1 + 2\frac{u_1}{a_*} - 2\frac{a_1}{a_*} + \dots = 1 + (\gamma + 1)\frac{u_1}{a_*}$$

e quindi:

$$M_\infty^2 - 1 = (\gamma + 1)\frac{V_\infty - a_*}{a_*}$$

che permette di scrivere \mathcal{K} come:

$$\mathcal{K} = \epsilon^{-2/3} (\gamma + 1)^{-2/3} (M_\infty^2 - 1)$$

Il problema resta di non facile soluzione, ma l'aver individuato un parametro di similitudine consente di utilizzare misure sperimentali o soluzioni numeriche, ricavati per una certa combinazione dei parametri, per calcolare i risultati in condizioni diverse, rappresentando i risultati di interesse in funzione dell'unico parametro \mathcal{K} , che è positivo nel caso supersonico e negativo in quello subsonico.

In particolare le forze aerodinamiche sono sempre date da:

$$L = \int_0^c p \, dx; \quad D = \int_0^c p \frac{df}{dx} \, dx$$

La scala delle x non è modificata dalle trasformazioni (11.24) e (11.25), mentre la pressione è proporzionale, attraverso la relazione linearizzata (11.8), alla velocità del primo ordine u_1 , che quindi è proporzionale ad A . Nella resistenza compare anche una dipendenza lineare da ϵ . In altri termini:

$$L = Af(\mathcal{K}); \quad D = \epsilon Ag(\mathcal{K})$$

dove $f(\mathcal{K})$ e $g(\mathcal{K})$ sono funzioni, per ora arbitrarie, del solo parametro di similitudine transonica. Passando ai coefficienti di portanza e resistenza, si ottiene:

$$c_l = \frac{A}{a_*^2} f(\mathcal{K}); \quad c_d = \frac{\epsilon A}{a_*^2} g(\mathcal{K})$$

Introducendo la relazione (11.25) per il cambio di scala A , si ottiene infine:

$$c_l = \epsilon^{2/3} \frac{(\gamma + 1)^{-1/3}}{a_*} f(\mathcal{K}); \quad c_d = \epsilon^{5/3} \frac{(\gamma + 1)^{-1/3}}{a_*} g(\mathcal{K})$$

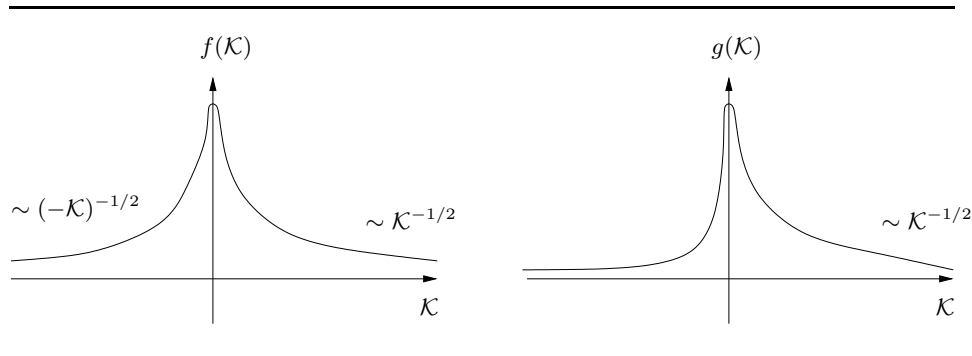


Figura 11.4 Andamento qualitativo delle funzioni $f(\mathcal{K})$ (a sinistra) e $g(\mathcal{K})$ (a destra) al variare del parametro \mathcal{K} di similitudine transonica.

Questi andamenti dei coefficienti aerodinamici devono raccordarsi con continuità con gli andamenti del regime subsonico e supersonico. Nel caso supersonico, si è trovato che $c_l \sim \epsilon/\beta$, e ciò si ritrova a patto che la funzione $f(\mathcal{K})$ assuma, per $\mathcal{K} \gg 1$, un andamento $\sim \mathcal{K}^{-1/2}$. Analogamente deve risultare $g(\mathcal{K}) \sim \mathcal{K}^{-1/2}$. Il caso subsonico corrisponde invece a $\mathcal{K} \ll -1$; per il coefficiente di portanza si ha ancora che deve essere $f(\mathcal{K}) \sim (-\mathcal{K})^{-1/2}$; il coefficiente di resistenza invece nel regime subsonico è nullo, e questo implica che la funzione $g(\mathcal{K})$ per \mathcal{K} negativi debba andare a zero più velocemente della potenza $-1/2$. Si riesce quindi, a posteriori, a determinare il limite di validità delle ipotesi di regime subsonico o supersonico, attraverso il parametro significativo che è \mathcal{K} , e non semplicemente il valore del numero di Mach.

Anche se l'interpretazione di questi risultati deve tenere conto del fatto che stiamo ragionando ad incidenza fissata (mentre un aereo in volo cambia l'incidenza per volare a portanza fissata), la brusca crescita del coefficiente di resistenza (il

cosiddetto fenomeno della drag rise) avvicinandosi dal lato subsonico al limite di $M = 1$ trova riscontro nell'andamento asimmetrico della funzione $g(\mathcal{K})$. Questo brusco aumento di resistenza è il fenomeno a cui è stato dato il nome di barriera del suono, perché i piloti, nei primi tentativi di superare la velocità del suono avevano l'impressione di urtare contro una vera e propria barriera.

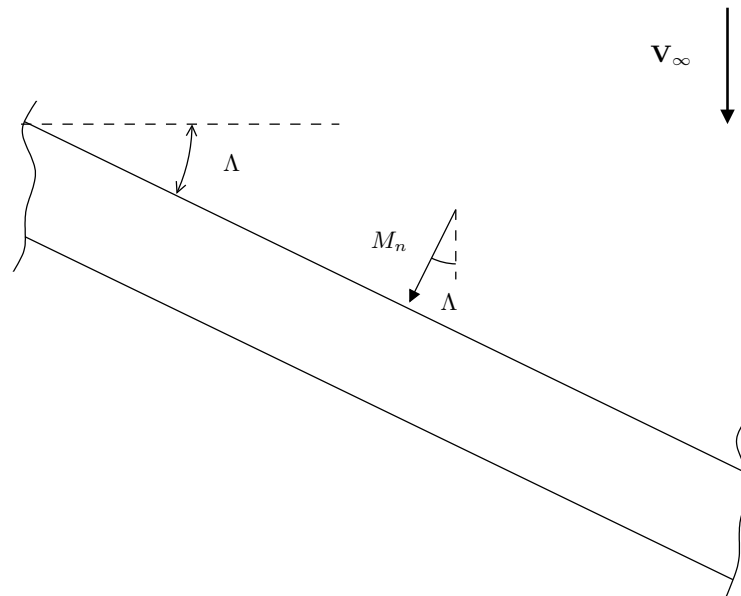


Figura 11.5 Ala con angolo di freccia.

Ali a freccia La brusca crescita della resistenza d'onda che caratterizza l'inizio del regime transonico costituisce un rilevante problema di progetto per i velivoli civili, che si trovano solitamente ad operare alla massima velocità possibile prima dell'insorgere di eccessiva resistenza. Il metodo classico per poter aumentare la velocità di crociera senza incorrere in eccessive penalizzazioni dovute alla resistenza d'onda consiste nell'utilizzare ali dotate di un angolo di freccia Λ . Infatti, almeno nel limite di semiala infinita, l'ala a freccia può essere studiata separando i due problemi con la componente di V_∞ normale e parallela all'ala stessa, come si mostra in Figura 11.5. Il medesimo valore del parametro di similitudine \mathcal{K} , che va calcolato sulla base del solo numero di Mach M_n costruito con la componente di velocità normale al bordo di attacco dell'ala, può quindi essere ottenuto con un M_∞ più alto. Da semplici considerazioni trigonometriche risulta infatti:

$$M_n = M_\infty \cos \Lambda$$

L'ala a freccia causa però un costo più elevato in termini di resistenza indotta; inoltre gli effetti tridimensionali sono rilevanti, specialmente in prossimità della mezzzeria, dove possono aversi importanti fenomeni di separazione. In questa regione il profilo alare viene progettato appositamente per evitare separazioni.

