9

Flussi comprimibili

XXX RISCRIVERE Quando gli effetti della comprimibilità del fluido non sono trascurabili, le equazioni del moto si traducono ancora, quando la vorticità è nulla, in un'equazione per il potenziale cinetico, la quale però non è lineare e nel caso supersonico (quando cioè il numero di Mach è maggiore dell'unità) ha carattere iperbolico.

Indice del capitolo

9.1 Comprimibilità di un fluido

La comprimibilità è una caratteristica fisica dei fluidi, e descrive quantitativamente la proprietà che un elemento di fluido modifica il suo volume quando cambia la pressione che agisce sulla superfice dell'elemento stesso. In termini quantitativi, la comprimibilità è:

$$\tau = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$$

dove con v si indica il volume specifico del fluido, cioè il reciproco della densità. Il coefficiente di comprimibilità τ rappresenta quindi la variazione di volume per unità di volume e per unità di variazione di pressione. Il segno negativo si comprende pensando che ad un aumento della pressione corrisponde una diminuzione del volume. Il reciproco di τ, ossia la quantità $v\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$ prende il nome di modulo di elasticità, *bulk modulus of elasticity*.

Esiste in realtà più di un modo per comprimere un fluido. Si parla allora di comprimibilità τ_T a temperatura costante, o isoterma:

$$\tau_T = -\frac{1}{v} \left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T$$

e di comprimibilità τ_s a entropia costante:

$$\tau_s = -\frac{1}{v} \left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_s$$

Esprimendo τ in funzione della densità si ottiene:

$$\tau = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$$

Questa volta il segno è positivo: un aumento della pressione provoca un aumento della densità del fluido. Esplicitando rispetto a $\mathrm{d}\rho$, si ottiene la variazione di densità in un fluido comprimibile a seguito di una variazione di pressione, che è:

$$\mathrm{d}\rho = \rho\tau\mathrm{d}p$$

La comprimibilità è praticamente nulla per i solidi. Nei fluidi è quasi sempre trascurabile per i liquidi, mentre è significativa per i gas. Quando però un gas è in moto a velocità relativamente basse, nonostante l'elevata comprimibilità le variazioni di pressione rispetto alla pressione statica sono molto piccole. Di qui la ragionevolezza dell'ipotesi di moto incomprimibile, che diventa $\rho = cost$ se non si verificano variazioni significative di densità ad opera della temperatura (come accade invece nei flussi a convezione naturale). Come discuteremo in maniera più quantitativa in §9.4.2, il parametro più adatto a sintetizzare l'importanza degli effetti della comprimibilità è un numero adimensionale noto come numero di Mach:

$$M = \frac{V}{a}$$

formato dal rapporto fra il modulo della velocità del fluido in un punto e la velocità del suono nello stesso punto.

9.2 Termodinamica e potenziali termodinamici

Quando gli effetti della comprimibilità sono importanti, compare una dipendenza dal particolare gas che stiamo considerando, e quindi diventa importante l'equazione di stato del gas.

Dal Capitolo 1 sappiamo che dal punto di vista macroscopico lo stato termodinamico del sistema, supposto in equilibrio sia termodinamico che chimico, è completamente descritto da due soli parametri di stato termodinamico: tutte le altre variabili termodinamiche possono essere espresse in funzione di questi.

Ad esempio possiamo immaginare di conoscere, per un particolare gas, la relazione $\rho = \rho(p, T)$ che permette di ricavare la densità conoscendo la pressione e dalla temperatura. Più in generale questa corrisponde ad una relazione del tipo:

$$f\left(p, v, T\right) = 0$$

La densità però non è un potenziale termodinamico, e quindi non consente la conoscenza completa del gas. Un potenziale termodinamico è ad esempio la funzione $e = e(s, \rho)$ che descrive la dipendenza dell'energia interna dalla densità e dall'entropia. Infatti attraverso questa funzione si riesce a esprimere le altre proprietà di stato, secondo la relazione differenziale:

$$\mathrm{d}e = T\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = T\mathrm{d}s + \frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

Un altro potenziale termodinamico si ottiene aggiungendo a $\mathrm{d}e$ il differenziale del prodotto pv; si ottiene così :

$$\mathrm{d}(e + pv) = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p \tag{9.1}$$

La quantità $e + pv$ prende il nome di entalpia:

$$h(s, p) = e + pv = e + \frac{p}{\rho} \tag{9.2}$$

Sottraendo invece a $\mathrm{d}e$ il differenziale del prodotto Ts si ottiene l'energia libera di Helmholtz $f(T, v) = e - Ts$. L'energia libera di Gibbs $g = g(T, p)$ si ottiene infine aggiungendo pv a f.

L'energia libera f può essere ricavata dall'equazione di stato, per integrazione della:

$$p = -\frac{\partial f(T, v)}{\partial v} \tag{9.3}$$

Si ottiene così l'energia f a meno di una costante di integrazione, che può essere funzione della temperatura. Oppure si può integrare la:

$$v = \frac{\partial g(T, p)}{\partial p}$$

ottenendo così l'energia g, ancora a meno di una costante funzione della temperatura.

9.2.1 Gas perfetto

Il gas perfetto è un particolare gas ideale (cioè non viscoso e non conduttore di calore) per il quale si assumono nulle tutte le azioni di tipo intermolecolare. Un gas perfetto soddisfa la relazione di stato:

$$p = \rho R T \tag{9.4}$$

che si scrive anche, in termini di volume specifico, come:

$$pv = RT$$

In questa equazione di stato, R è la costante del gas (ricavabile dal peso molecolare $\mathcal{M}$ come $R = \mathcal{M} R_0$, in cui R_0 è la costante universale dei gas, uguale a 8.314... J/kmole K). L'approssimazione di gas perfetto è del tutto accettabile per l'aria in condizioni tipiche della gran parte delle applicazioni aeronautiche.

La relazione di stato (9.4) però non descrive completamente la termodinamica di un gas perfetto. Per ottenere una descrizione completa occorre risalire ad un potenziale termodinamico. Mediante la (9.3) si ha:

$$-\frac{\partial f(T,v)}{\partial v} = \frac{RT}{v}$$

ed integrandola si arriva all'energia libera f:

$$f(T,v) = -RT \log v + c(T)$$

in cui f è determinata a meno di una funzione arbitraria che però dipende dalla sola temperatura.

A partire dall'energia libera si ricavano l'entropia:

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = R \log v - \frac{\partial c(T)}{\partial T}$$

e l'energia interna:

$$e = f + Ts = c(T) - T\frac{\partial c(T)}{\partial T} \tag{9.5}$$

In un gas perfetto definito dalla legge di stato (9.4) l'energia interna è quindi funzione della sola temperatura, ma questa funzione è del tutto indeterminata. Occorre quindi formulare una ulteriore ipotesi per descrivere completamente un gas perfetto. L'ipotesi di gas caloricamente perfetto, che è fisicamente accettabile per gas abbastanza rarefatti, consiste nell'assumere una dipendenza lineare dell'energia interna dalla temperatura:

$$e = c_v T$$

in cui il coefficiente di proporzionalità (costante) c_v si chiama calore specifico a volume costante. Con questa dipendenza dell'energia interna dalla temperatura si ottiene, risolvendo l'equazione differenziale ordinaria (9.5) per la funzione $c(T)$, l'espressione:

$$c(T) = -T(c_v \log T + A)$$

Sostituendo questo risultato nelle relazioni precedenti, si vede quindi che per un gas perfetto e caloricamente perfetto, entropia ed entalpia sono date da:

$$s = \frac{e-f}{T} = c_v + R \log v + c_v \log T + A \tag{9.6a}$$

$$h = (c_v + R)T = c_p T \tag{9.6b}$$

in cui la costante A è arbitraria, mentre la costante $c_v + R$ si indica anche con c_p, e prende il nome di calore specifico a pressione costante.

Un gas perfetto è quindi completamente descritto dalle sole tre costanti c_v, c_p ed R. Inoltre solo due fra queste tre costanti sono indipendenti, in quanto esiste il legame $c_p - c_v = R$.

Introduciamo il rapporto γ fra i calori specifici:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

che per l'aria vale $\gamma = 1.41$. I calori specifici in funzione di R e γ sono dati da:

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}; \qquad c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{9.7}$$

Trasformazioni isoentropiche di un gas perfetto Abbiamo visto che l'equazione dell'energia per un fluido non viscoso e non conduttore del calore si riduce ad affermare che l'entropia rimane costante. DI qui l'importanza delle trasformazioni isoentropiche: in particolare ci sarà utile nel seguito descrivere il comportamento di un gas perfetto e caloricamente perfetto nel caso di trasformazioni isoentropiche. Dalla definizione (9.6a) di entropia per il gas perfetto si ottiene che, quando l'entropia è costante, risulta:

$$R \log v + c_v \log T = cost$$

e quindi:

$$\rho^{-R} T^{c_v} = k$$

in cui k è una costante. In una trasformazione di questo tipo la temperatura è quindi proporzionale alla densità elevata all'esponente R/c_v. In termini del rapporto fra i calori specifici si ha:

$$T \sim \rho^{\gamma - 1}$$

Sostituendo un andamento di questo tipo nella equazione di stato (9.4), si ottiene per la pressione:

$$p \sim \rho T = \rho^{\gamma}$$

Queste relazioni si possono sintetizzare nella forma che segue, che permette di stabilire le variazioni di densità e quelle di temperatura conoscendo la variazione di pressione fra due stati del fluido a seguito di una trasformazione isoentropica:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{9.8}$$

Celerità del suono in un gas perfetto Disponendo del legame fra pressione e densità, siamo ora in grado di calcolare per il gas perfetto la celerità del suono, che come è noto dalla Termodinamica è definita come

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s \tag{9.9}$$

Per il gas perfetto è

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{p}{\rho}$$

e quindi

$$a^2 = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma RT = (\gamma-1)h \tag{9.10}$$

Il nome di celerità del suono deriva dalla proprietà, che discuteremo in seguito in §**??**, che piccole perturbazioni di pressione come quelle che costituiscono le onde sonore si propagano proprio alla velocità a in un fluido in quiete. Notiamo che anche a è una proprietà dello stato termodinamico del fluido.

9.3 Equazioni del moto

Trascurando gli effetti dissipativi e di conducibilità termica, le equazioni di continuità, di conservazione della quantità di moto e dell'energia sono le equazioni di Eulero, e costituiscono un sistema di cinque equazioni scalari in cinque incognite che abbiamo già scritto in §2.2. Le riportiamo nel seguito, scritte in forma differenziale e conservativa, ed in assenza di forze di volume:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{V}\mathbf{V} + p\,\mathbf{I}) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \dfrac{V^2}{2}\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e + \dfrac{V^2}{2}\right)\mathbf{V} + p\mathbf{V}\right] = 0 \end{cases} \tag{9.11}$$

Il sistema va completato con l'equazione di stato, la relazione (9.4) per il gas perfetto che permette di esprimere la pressione in funzione di densità e temperatura, e con il legame lineare $e = c_v T$ fra energia interna e la temperatura.

L'equazione dell'energia L'equazione dell'energia non è più disaccoppiata dalle altre equazioni, come invece accade nel caso incomprimibile, e fa quindi parte integrante del sistema da risolvere per ottenere contemporaneamente sia il campo cinetico che il campo termico.

Ricordiamo però che, come discusso in §2.3.2, l'equazione dell'energia può essere posta in una forma più semplice ed espressiva anche se del tutto equivalente. Combinandola infatti con l'equazione della quantità di moto moltiplicata scalarmente per $\mathbf{V}$, e sfruttando ancora una volta l'equazione di continuità, siamo giunti alla semplice forma (2.7d), che è valida finché tutte le grandezze sono continue:

$$\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = 0.$$

In un fluido ideale, quindi, l'entropia resta costante lungo linee di corrente (nel caso stazionario), e se le condizioni all'infinito sono tali da dare una entropia costante (per esempio condizioni di moto uniforme all'infinito), l'entropia è costante in tutte le parti del campo di moto raggiungibili dall'infinito a monte lungo una linea di corrente, e pari in questa regione al valore s_∞: si parla in questo caso di moto omoentropico.

9.3.1 Teorema di Crocco

Un ulteriore risultato interessante si ottiene combinando l'equazione di bilancio per la quantità di moto con la (9.1), che sostituendo i gradienti ai differenziali si scrive anche come:

$$T\boldsymbol{\nabla}s = \boldsymbol{\nabla}h - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p$$

Il termine $\boldsymbol{\nabla}p$ si ricava dall'equazione della quantità di moto scritta nella forma (2.6b), e si ha:

$$\boldsymbol{\nabla}p = -\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} - \rho\left(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{V}$$

Grazie alla conservazione dell'entalpia totale (9.13), il termine $\boldsymbol{\nabla}h$ diviene:

$$\boldsymbol{\nabla}h = \boldsymbol{\nabla}h_0 - \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Scriviamo così la relazione di partenza come:

$$T\boldsymbol{\nabla}s = \boldsymbol{\nabla}h_0 - \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{V}$$

Utilizzando ora la relazione (2.11), che mostra come:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \left(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{V} = \mathbf{V}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}\right)$$

Sostituendo e facendo l'ulteriore ipotesi di moto stazionario, si ha:

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} h_0 - T \boldsymbol{\nabla} s \tag{9.12}$$

Quando un flusso stazionario ha gradienti di entalpia totale e/o di entropia, il teorema di Crocco garantisce che questo flusso non può essere irrotazionale (oppure che $\mathbf{V}$ ha la stessa direzione di $\boldsymbol{\omega}$). Grazie a questo teorema riusciremo a dire (cfr. **??**) che dietro ad un urto curvo il flusso non è irrotazionale.

9.4 Teorema di Bernoulli

In analogia con le equazioni del caso incomprimibile, è possibile ottenere anche nel caso comprimibile un integrale primo del moto che consente di risalire alla pressione dopo aver risolto il campo cinetico. Questo integrale primo si chiama ancora teorema di Bernoulli (che lo ha ricavato nel 1738), ma ha naturalmente una forma diversa da quella ricavata in §2.4 ed in particolare dalla (2.13) valida nel caso stazionario.

Per ricavare la forma comprimibile del teorema di Bernoulli, occorre riscrivere l'equazione dell'energia in modo da eliminare la pressione, grazie alla definizione (9.2) di entalpia. Con la sostituzione

$$\rho e + p = \rho h$$

si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\left(h + \frac{V^2}{2}\right)\rho \mathbf{V}\right] = 0$$

La divergenza si scompone come:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\rho \mathbf{V}\left(h + \frac{V^2}{2}\right)\right] = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{V})\left(h + \frac{V^2}{2}\right) + \rho \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(h + \frac{V^2}{2}\right)$$

Il caso stazionario Se ora facciamo l'ipotesi aggiuntiva di moto stazionario, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{V})$ è identicamente nulla per l'equazione di conservazione della massa. L'intera equazione dell'energia si riduce allora in questo caso a:

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = 0$$

Il binomio $h + V^2/2$ si definisce entalpia totale h_T:

$$h_T = h + \frac{V^2}{2}$$

e l'equazione dell'energia afferma che, nel caso stazionario, l'entalpia totale è costante lungo linee di corrente:

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 \tag{9.13}$$

La costante h_0 può naturalmente essere diversa su linee di corrente diverse. Questa relazione è l'analogo del teorema di Bernoulli (2.13) del caso incomprimibile e stazionario.

Il caso stazionario con condizioni uniformi all'infinito Se poi il moto ha condizioni uniformi all'infinito, (ipotesi ragionevole nel classico problema aerodinamico), la costante h_0 assume lo stesso valore in tutti i punti all'infinito, e di conseguenza in tutte le regioni del campo di moto raggiungibili con una linea di corrente dall'infinito a monte risulta:

$$h + \frac{V^2}{2} = h_\infty \tag{9.14}$$

Questo tipo di moto si dice omoentalpico. Anche l'entalpia totale è un integrale primo del moto (nel caso stazionario). Fissato il livello energetico della corrente, cioè la costante h_∞, l'entalpia totale si compone di un contributo di entalpia statica e di una parte di energia cinetica: come discuteremo in §9.4.1 nel caso particolare del gas perfetto, il peso relativo di questi due contributi può variare, ma la loro somma resta costante e pari ad h_∞.

Il caso instazionario Si può mostrare che, anche nel caso generale di moto instazionario, se la velocità risulta esprimibile come il gradiente di una funzione scalare, il potenziale cinetico φ, in tutto il campo di moto, lungo ogni linea di corrente resta costante il trinomio:

$$h + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = h_0(t) \tag{9.15}$$

dove la costante h_0 può dipendere dal tempo.

Questa relazione è l'analogo del teorema di Bernoulli (2.14) del caso incomprimibile ed instazionario. Insieme alla costanza dell'entropia esso consente di calcolare la pressione conoscendo il campo di velocità.

9.4.1 Velocità limite e critica; grandezze di ristagno

La conservazione dell'entalpia totale permette di definire alcune grandezze caratteristiche dello stato energetico del fluido.

Possiamo specializzare la relazione (9.14) nel caso stazionario al gas perfetto; utilizzando la (9.10) che lega l'entalpia alla velocità del suono, si ottiene:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \tag{9.16}$$

Si vede da questa relazione che la velocità e la velocità del suono sono funzioni una dell'altra, e che nessuna delle due può crescere indefinitamente, in quanto la somma dei loro quadrati, con i coefficienti indicati dalla (9.16), deve sempre essere uguale alla costante h_∞.

Dal momento che V ed a compaiono nella definizione del numero di Mach M, è interessante esaminare i casi in cui a oppure V tendono a zero.

Velocità limite Quando la velocità del suono tende a zero, il numero di Mach tende all'infinito. Anche la temperatura, la densità e la pressione del gas perfetto tendono a zero. Un numero di Mach infinito corrisponde al massimo valore di V ottenibile per una data h_∞, che è naturalmente un valore finito. Questo valore massimo di velocità si chiama velocità limite V_{lim}, ed è dato dalla formula:

$$\frac{V_{lim}^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2}$$

In questa condizione limite, l'energia del fluido si trova tutta in forma cinetica.

Condizioni di ristagno Quando invece è la velocità del fluido a tendere a zero, siamo in presenza di un punto di ristagno. In un punto di ristagno l'energia del fluido si trova tutta in forma entalpica: l'energia h_∞ coincide con l'entalpia di ristagno. In questa situazione la velocità del suono tende ad un valore massimo a_0, definito da:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \tag{9.17}$$

Ricordando il legame (9.10) fra celerità del suono e temperatura, se ne deduce che in un punto di ristagno la temperatura del fluido è superiore alla temperatura all'infinito T_∞ ed assume il suo valore massimo T_0, detto temperatura di ristagno o temperatura totale. Analogamente si definisce la pressione totale. La costante h_0 dell'equazione (9.13) è l'entalpia totale. La costanza di h_T implica che anche la temperatura totale e la pressione totale rimangono costanti.

Velocità critica La relazione (9.16) mostra come la velocità del fluido e la celerità del suono possono variare, ma non in maniera indipendente, e che un minimo dell'una corrisponde ad un massimo dell'altra (e viceversa). Esiste allora un particolare valore della velocità, detto velocità critica ed indicato con a_*, per cui risulta esattamente $V = a$ e di conseguenza $M = 1$. La velocità a_* si può calcolare dalla relazione:

$$\frac{a_*^2}{\gamma - 1} + \frac{a_*^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \tag{9.18}$$

È immediato esprimere la velocità limite in termini della velocità critica:

$$\frac{V_{lim}}{a_*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

che fornisce per l'aria il valore di $V_{lim} = 2.45a_*$.

Le grandezze adimensionalizzate rispetto alla velocità critica, ed in particolare il numero di Mach critico

$$M_* = \frac{V}{a_*}$$

sono particolarmente comode: mentre M tende all'infinito avvicinandosi alle condizioni limite, M_* assume il limite finito di 2.45 ed è quindi, per esempio, molto più semplice da riportare in diagrammi o tabelle.

La conversione fra M e M_* è immediata:

$$M_*^2 = \frac{(\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

9.4.2 Il limite incomprimibile

Possiamo ora giustificare l'affermazione qualitativa, fatta in precedenza, che il numero di Mach costituisce il parametro adatto per descrivere l'importanza degli effetti della comprimibilità, ed acquisire anche una informazione quantitativa.

Consideriamo la conservazione dell'entalpia totale (9.13) in un gas perfetto fra un punto generico ed un punto di ristagno, e al posto dell'entalpia sostituiamo la sua espressione (9.6b) in funzione della temperatura:

$$c_pT + \frac{V^2}{2} = c_pT_0$$

Dividendo tutto per c_pT si ha:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2c_pT}$$

Per il gas perfetto dalla (9.10) si ottiene $c_pT = a^2/(\gamma - 1)$, e sostituendo:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)V^2}{2a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2$$

Ricordando ora dalla (9.8) che in una trasformazione isoentropica le variazioni di densità sono proporzionali alle variazioni di temperatura all'esponente $-(\gamma - 1)$, si ha che:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{-(\gamma-1)}$$

Utilizzando infine lo sviluppo binomiale si vede che:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{1}{2}M^2 + \dots$$

Per quanto riguarda le variazioni di pressione, anch'esse sono proporzionali al quadrato dle numero di Mach:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \dots$$

Le variazioni di densità e pressione rispetto ai valori totali sono dunque proporzionali al quadrato del numero di Mach, che quindi consente di stabilire se l'ipotesi di incomprimibilità sia accettabile o meno. Nella maggior parte delle applicazioni si stima che l'ipotesi di fluido incomprimibile sia ragionevole quando il numero di Mach ha valori inferiori a 0.3.

9.5 Moto irrotazionale

L'ipotesi di irrotazionalità permette di semplificare ulteriormente il problema, in analogia con quanto visto nel caso incomprimibile. La portata dell'ipotesi di irrotazionalità si comprende ricordando che, nel caso comprimibile isoentropico trattato nel paragrafo §3.1.2,si è stabilito che il vettore $\boldsymbol{\omega}/\rho$ evolve nel tempo come un segmento materiale trasportato dal fluido. Se quindi la corrente all'infinito è uniforme, l'ipotesi di irrotazionalità vale per tutti i punti raggiungibili dall'infinito lungo linee di corrente, quindi in tutti i punti del campo di moto tranne la scia.

Se il moto è irrotazionale, il sistema (9.11) delle equazioni del moto si riduce al più semplice sistema, valido in tutti i punti del dominio raggiungibili da linee di corrente che provengono dall'infinito:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = 0 \\ s = s_\infty \\ h + \dfrac{V^2}{2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = h_\infty + \dfrac{V_\infty^2}{2} \end{cases} \tag{9.19}$$

Il sistema delle equazioni va completato con un'equazione di stato per esempio $\rho = \rho(h, s)$ che permetta il calcolo della densità a partire da entalpia ed entropia.

La condizione di irrotazionalità consente di esprimere la velocità come il gradiente di una funzione scalare, il potenziale cinetico φ. Come nel caso incomprimibile, si ottiene un'equazione per il potenziale sfruttando l'equazione di continuità, riscritta come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi = 0$$

Dal momento che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \nabla^2$, si ha:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla^2\varphi = 0$$

La derivata $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t$ è nulla nel caso incomprimibile, e ritroviamo quindi nel caso incomprimibile che il potenziale soddisfa l'equazione di Laplace. Nel caso comprimibile, invece, la derivata non è nulla e va calcolata tenendo conto del fatto che ρ dipende dalle altre variabili termodinamiche.

Considerando l'equazione di stato $\rho = \rho(h, s)$, possiamo riscrivere l'equazione per φ come:

$$\frac{\partial\rho}{\partial h}\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} + \frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla^2\varphi = 0$$

Grazie alla condizione di entropia costante, data dall'equazione $s = s_\infty$ del sistema (9.19), è immediato stabilire che il secondo addendo è nullo. Inoltre:

$$\frac{\partial\rho}{\partial h} = \left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_s \frac{\partial p}{\partial h}$$

in cui il primo fattore è stato scritto esplicitamente come derivata fatta ad entropia costante. Il reciproco del primo fattore è il quadrato della velocità del suono a, come definita dalla relazione (9.9). Grazie alla definizione (9.2) di entalpia, si ha inoltre che $\partial p/\partial h|_s = \rho$. Dividendo tutto per ρ, l'equazione per il potenziale diviene allora:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} + \nabla^2\varphi = 0$$

L'equazione inoltre è a sistema con i due integrali primi del moto, così che l'intero sistema (9.11) per moto irrotazionale diviene:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} + \nabla^2\varphi = 0 \\[2ex] s = s_\infty \\[2ex] h + \dfrac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = h_\infty + \dfrac{V_\infty^2}{2} \end{cases} \tag{9.20}$$

Il sistema inoltre va completato con l'equazione di stato $a^2 = a^2(h, s)$.

Rispetto al caso incomprimibile, dove l'equazione per il potenziale è l'equazione di Laplace, notiamo la fondamentale differenza che questa equazione per il potenziale cinetico non è lineare. Questo impedisce di utilizzare tutti i metodi risolutivi descritti nei Capitoli precedenti, che si basano tutti, più o meno direttamene, sul fatto che l'equazione sia lineare.

Inoltre possiamo osservare che il sistema per il caso comprimibile si riduce all'equazione di Laplace discussa nel caso incomprimibile quando $a \to \infty$.

Le condizioni al contorno per il problema di un corpo solido immerso in una corrente di fluido con condizioni uniformi all'infinito non sono invece diverse da quelle descritte in §4.1 per il caso incomprimibile. Sul contorno del corpo solido la derivata normale del potenziale deve essere nulla (nel sistema di riferimento solidale con il corpo):

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{n} = 0$$

Se la corrente all'infinito è caratterizzata da velocità uniforme $\mathbf{V}_\infty$ (e dai valori s_∞ e h_∞), la condizione all'infinito è:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi(\infty) = \mathbf{V}_\infty$$

Dietro al corpo si forma una scia, che ha dimensioni trascurabili se il corpo è di tipo aerodinamico. In questo caso la scia si può schematizzare con una linea (una superficie in tre dimensioni) di spessore infinitesimo, attraverso la quale devono essere continue la componente di velocità in direzione normale alla scia e la pressione. Si arriva quindi ancora ad una condizione di trasporto lagrangiano del salto di potenziale lungo la scia stessa.

Il caso bidimensionale stazionario Il sistema (9.20) assume una forma più semplice nel caso stazionario e bidimensionale. L'equazione del potenziale diviene

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{\nabla} h + a^2 \nabla \varphi = 0$$

Scegliamo un sistema di riferimento x, y cartesiano e ortogonale Nel caso stazionario, $\boldsymbol{\nabla} h$ si scrive per componenti come:

$$\boldsymbol{\nabla} h = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) = -\frac{1}{2}\left(2\varphi_x\varphi_{xx} + 2\varphi_y\varphi_{xy}, 2\varphi_x\varphi_{xy} + 2\varphi_y\varphi_{yy}\right)$$

Possiamo allora calcolare per componenti il prodotto scalare $\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{\nabla} h$:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{\nabla} h = -\varphi_x^2\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - \varphi_y^2\varphi_{yy}$$

Scrivendo anche ∇^2 per componenti, l'equazione per φ diviene:

$$\left(a^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} + \left(a^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0. \tag{9.21}$$

9.6 Teoria delle caratteristiche

Nel caso semplificato bidimensionale e stazionario, cerchiamo di dedurre le proprietà dell'equazione comprimibile per il potenziale impostando il problema di Cauchy per una linea aperta. Ci chiediamo cioè se e quando, conoscendo la soluzione dell'equazione differenziale su una qualsiasi linea aperta, l'equazione del potenziale consente di risalire alla soluzione anche in un intorno di questa linea attraverso uno sviluppo in serie di Taylor della soluzione stessa sulla linea.

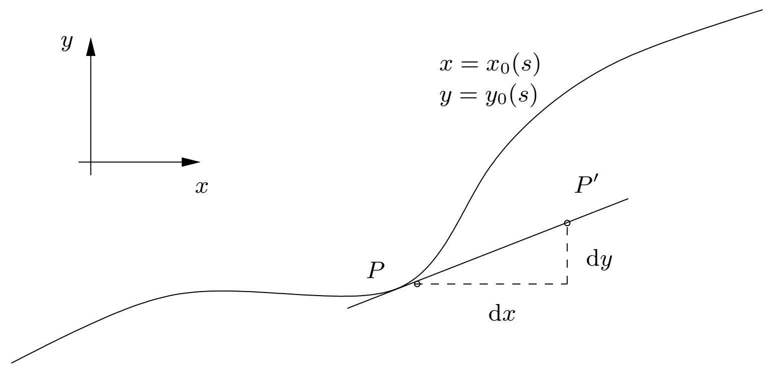

Figura 9.1 Problema di Cauchy per l'equazione (9.21) del potenziale: condizioni iniziali assegnate su una linea aperta di equazioni parametriche $x = x_0(s)$ e $y = y_0(s)$.

Il problema di Cauchy Consideriamo allora, come ci mostra la figura 9.1, una linea aperta, di equazione parametrica $x = x_0(s)$ ed $y = y_0(s)$ assegnata in funzione di un parametro s. Supponiamo di conoscere sulla linea la soluzione, per esempio in termini delle due componenti della velocità u e v:

$$\varphi_x(x_0(s), y_0(s)) = f(s); \qquad \varphi_y(x_0(s), y_0(s)) = g(s)$$

dove $f(s)$ e $g(s)$ sono due funzioni note del parametro s.

Ci chiediamo sotto quali condizioni sia ben posto il problema di Cauchy su una linea di questo tipo. Scelto un punto P sulla linea, le componenti della velocità in un punto P' prossimo alla linea possono essere calcolate con una espansione in serie di Taylor delle funzioni $f(s)$ e $g(s)$ al primo ordine:

$$\begin{cases} u(P') - u(P) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \\[2ex] v(P') - v(P) = \dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \end{cases}$$

e vogliamo stabilire se, fissato P, possiamo trovare la soluzione in P' per qualsiasi scelta (direzione) di P'.

Il calcolo della velocità in P' con uno sviluppo di Taylor richiede la conoscenza delle derivate prime della velocità, cioè delle tre derivate seconde del potenziale. Le funzioni $f(s)$ e $g(s)$ consentono di ricavare due relazioni fra le tre funzioni incognite; la terza relazione consiste nell'equazione stessa, che lega fra loro le tre incognite:

$$
\begin{cases}
\varphi_{xx}\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s} + \varphi_{xy}\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} \\[2ex]
\varphi_{xy}\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s} + \varphi_{yy}\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} \\[2ex]
\varphi_{xx}\left(a^2 - \varphi_x^2\right) + \varphi_{yy}\left(a^2 - \varphi_y^2\right) - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0
\end{cases} \tag{9.22}
$$

Dividendo la prima equazione per $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s$ e la seconda per $\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}s$, il sistema si può riscrivere come:

$$
\begin{cases}
\varphi_{xx} + \varphi_{xy}\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0} \\[2ex]
\varphi_{xy}\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}y_0} + \varphi_{yy} = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y_0} \\[2ex]
\varphi_{xx}\left(a^2 - \varphi_x^2\right) + \varphi_{yy}\left(a^2 - \varphi_y^2\right) - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0
\end{cases}
$$

Ricavando φ_{xx} dalla prima equazione e φ_{yy} dalla seconda, e sostituendo infine nella terza, si ottiene mediante semplici passaggi algebrici:

$$
\varphi_{xy} = \frac{\left(a^2 - \varphi_x^2\right)\mathrm{d}f/\mathrm{d}x_0 + \left(a^2 - \varphi_y^2\right)\mathrm{d}g/\mathrm{d}y_0}{\left(a^2 - \varphi_x^2\right)\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_0 + \left(a^2 - \varphi_y^2\right)\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}y_0 + 2\varphi_x\varphi_y} \tag{9.23}
$$

con cui poi è immediato ricavare dal sistema precedente le altre due derivate seconde.

È però possibile che il denominatore della soluzione (9.23) per φ_{xy} si annulli. Questo equivale a dire che il sistema (9.22) non ha soluzione, o anche che la matrice dei coefficienti del sistema è singolare ed ha determinante nullo. Questa particolare condizione di denominatore nullo si verifica quando:

$$
\left(a^2 - \varphi_x^2\right)\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0} + \left(a^2 - \varphi_y^2\right)\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}y_0} + 2\varphi_x\varphi_y = 0
$$

Direzioni caratteristiche Moltiplichiamo questa relazione per la quantità $\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_0$:

$$
\left(a^2 - u^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}\right)^2 + 2uv\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0} + \left(a^2 - v^2\right) = 0 \tag{9.24}
$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado nell'incognita $\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_0$: in corrispondenza delle sue radici il denominatore della (9.23) si annulla, ed il sistema di partenza non ammette soluzione per le derivate seconde del potenziale.

Le radici possono essere reali o immaginarie, a seconda del segno del discriminante dell'equazione. L'equazione (9.24) ha radici reali e distinte quando:

$$u^2 v^2 - (a^2 - u^2)(a^2 - v^2) > 0$$

ovvero quando $u^2 + v^2 > a^2$. Dal momento che $u^2 + v^2 = V^2$, si ottengono radici reali e distinte quando il numero di Mach nel punto P è superiore ad uno, cioè il moto in P è supersonico.

In questo caso esistono due valori particolari per la pendenza $\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_0$ della linea delle condizioni iniziali, in corrispondenza dei quali non è possibile con uno sviluppo in serie di Taylor ricostruire la soluzione nell'intorno della linea stessa. Queste due direzioni si dicono direzioni caratteristiche, e sono in generale diverse da punto a punto, perché dipendono dalla soluzione.

Quando il numero di Mach locale è superiore ad 1, il moto è supersonico ed esistono due direzioni caratteristiche, diverse da punto a punto, che sono reali e distinte. Quando $M = 1$ le due direzioni divengono coincidenti, mentre per moto subsonico $M < 1$ e non esistono direzioni caratteristiche reali.

Classificazione delle equazioni differenziali La distinzione fra direzioni caratteristiche reali e distinte, reali coincidenti e non reali consente di classificare l'equazione differenziale di partenza. Quando esistono due direzioni caratteristiche distinte, l'equazione si dice iperbolica, e il problema di Cauchy è ben posto su una linea aperta. Quando le due direzioni caratteristiche coincidono l'equazione è di tipo parabolico, mentre quando le direzioni caratteristiche non sono reali l'equazione è ellittica. L'equazione di Laplace per il potenziale cinetico nel caso incomprimibile è di tipo ellittico, ed infatti si può far vedere che il problema di Laplace su una curva aperta è mal posto: ciò significa che la soluzione varia molto a seguito di una piccola variazione dei dati iniziali sulla linea; in altre parole, si può avere una variazione data della soluzione per una variazione arbitrariamente piccola delle condizioni iniziali. Il problema di Laplace diviene invece ben posto se i dati sono assegnati su una curva chiusa.