
La corrente intorno ad una superficie alare tridimensionale si può descrivere ancora attraverso l'equazione di Laplace. La procedura di soluzione è analoga a quella del caso bidimensionale, ma il flusso intorno all'ala è effettivamente tridimensionale anche quando la geometria e le condizioni asintotiche sono simmetriche rispetto alla linea di mezzeria dell'ala. Come conseguenza della presenza dietro all'ala di una scia su cui la velocità è effettivamente discontinua, nasce una resistenza aerodinamica, indotta direttamente dalla produzione di portanza. Essa può essere calcolata analiticamente solo facendo ricorso all'approssimazione di ala molto allungata, che permette di suddividere il problema di Laplace tridimensionale in due sottoproblemi bidimensionali opportunamente collegati fra loro.

Indice del capitolo

8.1	Importanza degli effetti di estremità	184
8.2	Equazione di Laplace in tre dimensioni	186
8.3	Forza aerodinamica	187
8.3.1	Componenti cartesiane della forza	190
8.4	Approssimazione di elevato allungamento	192
8.4.1	Riduzione a due problemi bidimensionali	193
8.4.2	Piano di Trefftz	193
8.4.3	Forza aerodinamica nel piano di Trefftz	195
8.5	Soluzione nel piano di Trefftz	196
8.5.1	Formule di Hilbert	197
8.5.2	Trasformazioni conformi	198
8.5.3	Portanza e resistenza indotta	202
8.6	Resistenza minima	203
8.6.1	Alternativa: un procedimento variazionale	206
8.6.2	Ala ellittica e ala generica	207
8.6.3	Effetti dell'allungamento	208

8.7	Velocità indotta ed equazione di Prandtl	210
8.8	Comportamento della scia lontana	213

8.1 Importanza degli effetti di estremità

Nei Capitoli precedenti abbiamo mostrato come l'equazione di Laplace costituisca la base teorica per descrivere il flusso irrotazionale di un fluido non viscoso e incomprimibile intorno ad un profilo alare, a partire dalla quale è possibile costruire efficaci strumenti di progetto. Un profilo alare si può intendere come la sezione bidimensionale di una superficie alare di dimensioni infinite nel senso dell'apertura. Fino a quando restiamo all'interno del quadro bidimensionale quindi vengono trascurati tutti gli eventuali effetti di estremità, dovuti alla inevitabile finitezza dell'ala nel senso dell'apertura.

Gli effetti di estremità sono in realtà molto importanti. La differenza qualitativa più rilevante fra il caso bidimensionale e quello tridimensionale consiste nell'insorgere di una componente di forza aerodinamica diretta come il vettore \mathbf{V}_∞ , cioè una componente di resistenza, a cui si dà il nome di resistenza indotta. Questo accade anche se il fluido si considera non viscoso, incomprimibile ed in moto irrotazionale, che sono le ipotesi con cui abbiamo dimostrato, in due dimensioni, il teorema di Kutta-Joukowski ed il paradosso di D'Alembert.

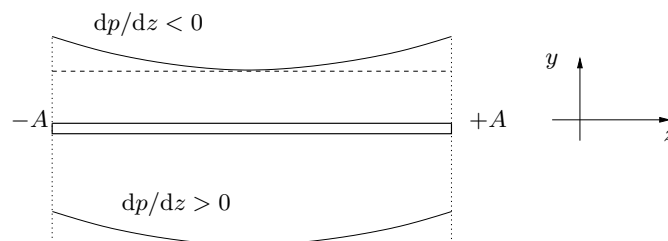


Figura 8.1 Distribuzione qualitativa della pressione lungo l'apertura z sul dorso (sopra) e sul ventre (sotto) di una superficie alare, di apertura infinita (linea tratteggiata) e di apertura finita da $-A$ ad A (linea continua).

Origine della resistenza indotta Almeno da un punto di vista qualitativo, non è difficile rendersi conto della differenza che esiste rispetto al caso bidimensionale. Come mostra la figura 8.1, un'ala infinita, in condizioni tali da produrre portanza, presenta una distribuzione di pressione costante nel senso dell'apertura (asse z) e non simmetrica fra dorso e ventre (la portanza infatti è dovuta proprio alla differenza fra la pressione sul dorso e quella sul ventre). Quando però l'apertura dell'ala è finita, la pressione alle estremità alari deve necessariamente assumere lo stesso valore su dorso e ventre: questo comporta l'insorgere di un

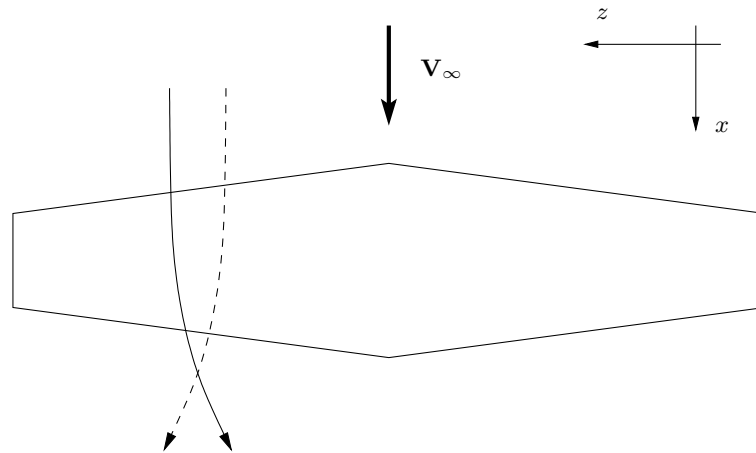


Figura 8.2 Linee di corrente sul dorso (linea continua) e sul ventre (linea tratteggiata) di una superficie alare di apertura finita che produce portanza.

gradiente di pressione in direzione z , ed una conseguente componente trasversale di velocità di segno opposto fra dorso e ventre. Ne segue (figura 8.2) che le linee di corrente sulla superficie alare sono curve anche quando considerate in un piano $x - z$.

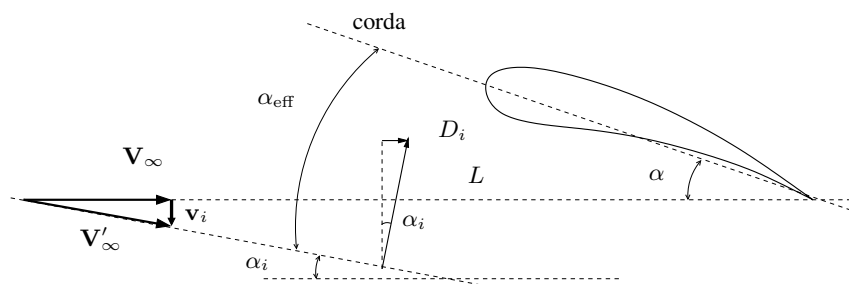


Figura 8.3 Effetto della velocità indotta sulla velocità asintotica vista in una sezione generica dell'ala: la forza aerodinamica acquista una componente parallela alla direzione di V_∞ .

Vicino alle estremità alari inoltre la corrente tende a risalire dal ventre (dove la pressione è maggiore) al dorso (con pressione minore), determinando così l'insorgere di un moto vorticoso e creando un vortice (il vortice di estremità) che si distacca dalle estremità e viene trasportato a valle dell'ala. Il profilo alare che costituisce una sezione generica dell'ala è soggetto, oltre al campo di moto deter-

minato dalla corrente uniforme \mathbf{V}_∞ , anche alla velocità verticale \mathbf{v}_i indotta dal vortice di estremità, come mostra la figura 8.3. Questa componente è diretta nel verso negativo dell'asse y quando la portanza è positiva, ed ha l'effetto di ridurre localmente l'incidenza con cui la corrente asintotica investe il profilo. Per questo profilo bidimensionale la forza aerodinamica è ortogonale alla direzione della corrente asintotica, come richiede il teorema di Kutta-Joukowski. Ma la corrente asintotica non coincide più con \mathbf{V}_∞ , bensì con il vettore \mathbf{V}'_∞ che deriva dalla composizione vettoriale di \mathbf{V}_∞ con \mathbf{v}_i . Il vettore risultante è deflesso di un (piccolo) angolo α_i (a cui diamo il nome di angolo di incidenza indotta), che spiega l'esistenza di una componente della forza nella direzione di \mathbf{V}_∞ , cioè di una resistenza indotta D_i . Il profilo è soggetto ad un angolo di incidenza effettivo α_{eff} più piccolo dell'angolo di incidenza α proprio della quantità α_i (negativa in figura 8.3):

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha + \alpha_i$$

8.2 Equazione di Laplace in tre dimensioni

Il calcolo del campo di velocità indotto dal moto uniforme di un corpo aerodinamico immerso in un fluido in quiete, non viscoso ed incomprimibile, è stato impostato in §4.1 per quanto riguarda il caso bidimensionale. La condizione di irrotazionalità permette di ridurre le equazioni del moto alla sola equazione di Laplace per il potenziale cinetico, dotata di condizioni al contorno all'infinito e sul profilo. Il potenziale è una funzione ad un sol valore quando il dominio viene reso monoconnesso tramite un taglio, la cui posizione è matematicamente irrilevante e resta in generale indeterminata. Con la limitazione di considerare solo corpi aerodinamici, l'informazione mancante per rendere unica la soluzione viene fornita, senza bisogno di considerare la viscosità, dal fatto che la scia si deve necessariamente staccare dal bordo di uscita aguzzo del profilo (ipotesi di Joukowski), e questo determina completamente il problema. La scia deve essere calcolata come parte della soluzione, e bisogna saper imporre delle condizioni al contorno sui suoi lati. Questo è possibile utilizzando le equazioni di conservazione in forma integrale, scritte a cavallo della scia stessa. La scia nel caso stazionario è anche una linea di corrente, ed in generale su di essa le grandezze fisiche non presentano discontinuità.

L'impostazione del problema tridimensionale richiede il medesimo procedimento. Le condizioni di incomprimibilità e di irrotazionalità conducono ancora ad un'equazione di Laplace nell'unica incognita scalare data dal potenziale cinetico $\varphi = \varphi(x, y, z)$:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Il dominio in tre dimensioni, almeno nel caso semplice in cui il corpo è un'ala, è monoconnesso, ed il potenziale di conseguenza è una funzione ovunque a un sol valore della posizione quando il moto è irrotazionale. Le condizioni al contorno di non penetrazione sul corpo e di velocità costante all'infinito si scrivono

sempre come:

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0; \quad \nabla\varphi(\infty) = \mathbf{V}_\infty.$$

La scia Se il moto è irrotazionale ed il corpo è di tipo aerodinamico, la scia si schematizza non più come una linea, ma come una superficie di spessore infinitesimo, costituita da un numero infinito di linee che si staccano da tutta l'apertura del corpo. Le posizioni dei punti di distacco sono note se ogni profilo che costituisce l'ala è dotato di bordo di uscita aguzzo, mentre la forma della scia è incognita e va quindi calcolata come parte della soluzione.

In direzione normale alla scia, il potenziale cinetico φ ammette una discontinuità $\Delta\varphi = \Delta\varphi(z)$ che può variare con la coordinata z lungo l'apertura. Su ogni linea che costituisce la scia, grazie alle equazioni di conservazione per la massa e la quantità di moto scritte in forma integrale si ricava che, analogamente al caso bidimensionale, deve essere:

$$\frac{D \Delta\varphi(z)}{Dt} = 0$$

che esprime la condizione di trasporto lagrangiano del salto di potenziale lungo la scia. Questa condizione deve essere imposta su ogni singola linea che costituisce la scia, ma in generale il salto di potenziale è diverso su ciascuna linea. Quindi anche in tre dimensioni la condizione di Kutta permette di rendere unica la soluzione. Grazie al teorema di Kutta-Joukowski, inoltre, sappiamo che ad ogni stazione z lungo l'apertura il salto di potenziale $\Delta\varphi(z)$ eguaglia la circolazione $\Gamma(z)$ intorno al profilo bidimensionale che costituisce la medesima sezione z dell'ala:

$$\Delta\varphi(z) = \Gamma(z) \quad (8.1)$$

In tre dimensioni, la scia costituisce effettivamente una superficie di discontinuità per la velocità, al contrario della scia bidimensionale, su cui solo il potenziale ammette un salto mentre le grandezze fisiche sono continue. Infatti le due condizioni di continuità della componente normale di \mathbf{V} e della pressione non sono sufficienti per avere la continuità delle tre componenti di \mathbf{V} .

8.3 Forza aerodinamica

In tre dimensioni il calcolo della forza aerodinamica non può sfruttare i metodi basati sulla variabile complessa, e quindi sulle formule di Blasius. Almeno nel caso stazionario, resta l'unica strada, già descritta in §4.6, di determinarla attraverso il calcolo del flusso di quantità di moto lungo un contorno \mathcal{S}_∞ infinitamente lontano dall'ala. Si tratta quindi di valutare su \mathcal{S}_∞ l'integrale:

$$\mathbf{F}_a = - \oint_{\mathcal{S}_\infty} \mathbf{J}_Q \cdot \mathbf{n} \, dS = - \oint_{\mathcal{S}_\infty} (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

dove il tensore \mathbf{J}_Q è stato scritto nella forma non viscosa (??). Su tutta S_∞ il moto è irrotazionale, ed il teorema di Bernoulli (??) permette di scrivere la pressione in funzione della velocità come:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} (V_\infty^2 - V^2)$$

Supponiamo ora che, sulla superficie S_∞ , la velocità possa esprimersi nella forma:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{v}$$

in cui \mathbf{v} è un termine piccolo rispetto a \mathbf{V}_∞ , tanto più quanto S_∞ è lontana dall'ala.

Sostituendo questa espressione della velocità nell'integrale che fornisce la forza aerodinamica, abbiamo già ottenuto l'espressione (4.11) per la forza aerodinamica, che qui riscriviamo eliminando direttamente i termini costanti $\mathbf{V}_\infty \mathbf{V}_\infty$ e p_∞/ρ , che danno contributo nullo:

$$\mathbf{F}_a = -\rho \iint_{S_\infty} \left[(\mathbf{V}_\infty \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{V}_\infty + \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} - \left(\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{v} + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{n} \right] dS$$

Il primo addendo, proporzionale al flusso di massa attraverso S_∞ , dà anch'esso un contributo nullo se il corpo è un corpo solido. (Si noti però che vi è un flusso netto di massa nei motori a reazione.) Si ottiene così:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a = & -\rho \iint_{S_\infty} [(\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} - (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}] dS + \\ & -\rho \iint_{S_\infty} \left((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} - \frac{v^2}{2} \mathbf{n} \right) dS \end{aligned} \quad (8.2)$$

in cui il primo integrale contiene i termini lineari in \mathbf{v} , ed il secondo contiene i termini quadratici.

Abbiamo già visto, sempre in §4.6, che nel caso bidimensionale solo i termini lineari danno un contributo non nullo alla forza aerodinamica, mentre i termini quadratici si possono trascurare. Infatti in due dimensioni il comportamento all'infinito delle soluzioni dell'equazione di Laplace, dedotto in §5.5.3 grazie alla formula di Green sotto l'ipotesi di corpo di estensione finita, è tale da dare un potenziale $\varphi \sim r^{-1}$ o al più $\varphi \sim \log r$ in presenza di un flusso netto di massa attraverso la superficie del corpo. Abbiamo quindi concluso in §4.6 che i termini quadratici danno sempre contributo nullo alla forza aerodinamica, che la forza può avere solo una componente portante dovuta ai termini lineari (teorema di Kutta-Joukowski), e che anche la portanza è nulla in assenza di circolazione (paradosso di D'Alembert).

Comportamento asintotico del potenziale Anche in tre dimensioni si può cercare di determinare il comportamento asintotico del potenziale. A questo scopo, occorre scrivere la formula di Green per un contorno composto dal contorno

\mathcal{S}_c del corpo, da una superficie \mathcal{S}_∞ infinitamente lontana dal corpo e da un ulteriore tratto \mathcal{S}_s costituito dalla scia. La necessità di integrare su \mathcal{S}_∞ si può eliminare considerando come funzione incognita non l'intera funzione potenziale φ , ma il potenziale di perturbazione φ_1 , già definito in §5.24 come:

$$\varphi_1 = \varphi - \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{r}$$

Il potenziale di perturbazione in un generico punto \mathbf{r}_0 interno al contorno di integrazione si esprime in forma chiusa grazie alla formula di Green:

$$\varphi_1(\mathbf{r}_0) = \oint_{\mathcal{S}_c + \mathcal{S}_s} \left(\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{r})}{\partial n} - \varphi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \right) dS$$

in cui il percorso di integrazione è costituito dalla superficie del corpo \mathcal{S}_c e dalla superficie della scia \mathcal{S}_s .

Questo integrale si può separare in due contributi, il primo derivante dall'integrale su \mathcal{S}_c , ed il secondo dall'integrale su \mathcal{S}_s . (Questa suddivisione dell'integrale nella somma di due parti, che chiameremo φ_c e φ_s , è di per sé un'operazione rigorosa. Spesso, però, si usa dire che φ ha un "contributo del corpo ed un contributo della scia": questo costituisce una dizione meno rigorosa, perché le due parti non sono generate indipendentemente l'una dall'altra.)

Il contributo del corpo Il comportamento all'infinito di φ_c può essere ancora dedotto dalla formula di Green, come nel caso bidimensionale. Infatti l'ipotesi di corpo finito assunta in §5.5.3 è certamente soddisfatta. In tre dimensioni quindi $\varphi_c \sim r^{-2}$ se non c'è flusso di massa netto attraverso \mathcal{S}_c , e $\sim r^{-1}$ altrimenti. La relativa velocità quindi tende a zero almeno come r^{-2} al tendere di r all'infinito. Il contributo dei termini quadratici, che sono $\sim r^{-4}$ e vanno integrati su un cammino di integrazione la cui lunghezza cresce con r^2 , è quindi nullo al tendere di r all'infinito.

Il contributo della scia Il discorso è diverso per il termine φ_s relativo all'integrazione lungo la parte \mathcal{S}_s di contorno costituita dalla scia. Infatti su \mathcal{S}_s non è lecito supporre che il punto \mathbf{r} abbia sempre modulo molto maggiore di quello del punto \mathbf{r}_0 : non vale quindi l'ipotesi di $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$ che ha permesso di ricavare gli sviluppi di Taylor discussi in §5.5.3, e come conseguenza le informazioni sul comportamento asintotico del potenziale.

Non siamo allora in grado di escludere la presenza di una componente anche resistiva nella forza aerodinamica, dovuta ai termini quadratici. Resta però vero che i termini lineari danno un contributo simile al caso bidimensionale, e quindi puramente portante; inoltre il contributo portante dei termini quadratici è trascurabile rispetto a quello dei termini lineari, almeno nel caso di forte allungamento dell'ala.

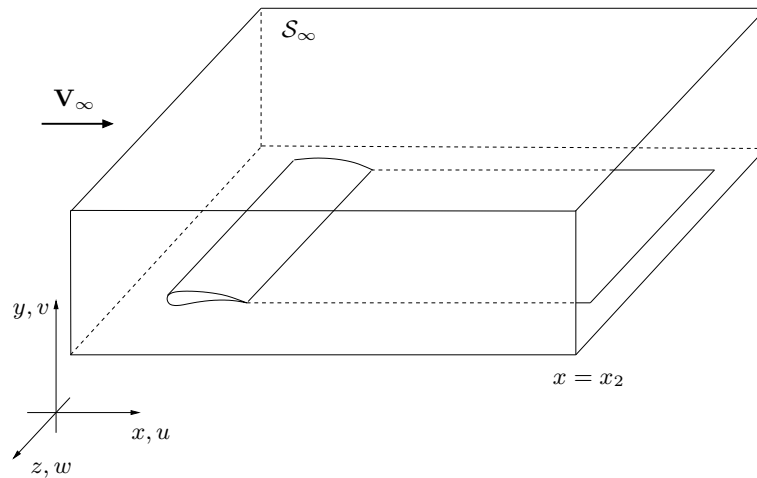


Figura 8.4 Sistema di riferimento cartesiano ortogonale per il calcolo delle componenti della forza aerodinamica in tre dimensioni: la superficie S_∞ è un parallelepipedo con le facce perpendicolari agli assi coordinati.

8.3.1 Componenti cartesiane della forza

Le osservazioni svolte nel paragrafo precedente sul comportamento asintotico del potenziale, e quindi sulla natura della forza aerodinamica, sono valide per qualsiasi superficie chiusa S_∞ . Possiamo allora scegliere una particolare S_∞ che risulti comoda per il calcolo di \mathbf{F}_a . Utilizziamo le coordinate cartesiane, scegliendo l'asse x orientato come la velocità asintotica, e l'asse z nella direzione dell'apertura dell'ala; consideriamo poi, come mostra la figura 8.4, una S_∞ costituita da un parallelepipedo con le facce orientate perpendicolarmente agli assi coordinati.

Sulle facce di questo parallelepipedo che non vengono intersecate dalla scia valgono tutte le conclusioni già ricavate per il caso bidimensionale, in quanto l'ipotesi di \mathbf{r}_0 molto lontano dal contorno di integrazione è soddisfatta. Di conseguenza, quando le facce del parallelepipedo si allontanano indefinitamente dall'ala, l'unico contributo alla resistenza aerodinamica può venire solo dall'integrazione nel piano posto ad $x = x_2$ a valle dell'ala.

La resistenza indotta L'espressione della resistenza, che in questo sistema di coordinate corrisponde alla componente F_x della forza, si ottiene proiettando la sola parte quadratica dell'equazione vettoriale (8.2) nella direzione dell'asse x , dal momento che la parte lineare, come abbiamo già osservato, non può contenere

termini resistivi:

$$F_x = D = -\rho \iint_{x=x_2} \left(u^2 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dy dz =$$

$$\rho \iint_{x=x_2} \left(\frac{v^2 + w^2 - u^2}{2} \right) dy dz \quad (8.3)$$

Portanza e forza laterale Le altre due componenti della forza aerodinamica, che si ottengono mediante la proiezione dell'intera (8.2) nella direzione degli assi y e z , sono:

$$F_y = L = -\rho \iint_{x=x_2} v (V_\infty + u) dy dz$$

$$F_z = -\rho \iint_{x=x_2} w (V_\infty + u) dy dz$$

Notiamo subito una importante differenza con il caso bidimensionale anche per quanto riguarda l'espressione della portanza. In due dimensioni il flusso di quantità di moto si irradia uniformemente in tutte le direzioni, ed il suo integrale, necessario per esprimere la portanza, va effettuato lungo un cammino chiuso che racchiude il profilo (tanto che si arriva ad esprimere la portanza in funzione della circolazione della velocità attorno al profilo stesso). In tre dimensioni, invece, è sufficiente considerare il flusso di quantità di moto attraverso lo stesso piano ad $x = x_2$ che occorre per il calcolo della resistenza: il flusso di quantità di moto ammette una direzione preferenziale. Infatti i contributi legati alle altre cinque facce del parallelepipedo sono nulli.

La portanza può infine essere scritta in funzione del salto di potenziale attraverso la scia. Trascuriamo nella funzione integranda il prodotto uv , che è infinitesimo di ordine superiore, e scriviamo la componente y della velocità in termini di potenziale:

$$L = -\rho V_\infty \iint_{x=x_2} v dy dz = -\rho V_\infty \iint_{x=x_2} \varphi_y dy dz$$

Possiamo ora effettuare l'integrazione solamente nella direzione y ; la primitiva della funzione integranda è naturalmente φ . Indichiamo con $+Y_1$ e $-Y_1$ i due estremi di integrazione, e con φ^+ e φ^- il potenziale sui due lati (superiore ed inferiore) della scia. Si ha:

$$L = -\rho V_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(Y_1) - \varphi^+ + \varphi^- - \varphi(-Y_1)] dz$$

Sappiamo che nel caso tridimensionale il potenziale è convergente all'infinito: quando $Y_1 \rightarrow \infty$ allora i due termini $\varphi(Y_1)$ e $\varphi(-Y_1)$ si elidono. Risulta allora per la portanza l'espressione:

$$L = \rho V_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi(z) dz \quad (8.4)$$

che lega la portanza all'integrale nella direzione z del salto di potenziale attraverso la scia.

8.4 Approssimazione di elevato allungamento

Per il problema generale del flusso tridimensionale intorno ad un'ala non esistono metodi risolutivi analitici, e si possono impostare solamente soluzioni numeriche. È però possibile sviluppare una teoria approssimata, basata sull'ipotesi che l'ala abbia la dimensione dell'apertura molto maggiore di quella della corda, sia cioè molto allungata.

Il rapporto di allungamento Per un'ala diritta e con forma in pianta rettangolare, il rapporto di allungamento E è semplicemente pari al rapporto fra l'apertura dell'ala e la sua corda:

$$E = \frac{2A}{c}$$

Si tratta di una grandezza adimensionale, che quantifica l'allungamento dell'ala, a cui occorre dare una definizione più generale perché possa essere usata anche con ali di forma in pianta non rettangolare. A questo scopo, scriviamo la superficie in pianta dell'ala S come integrale lungo l'apertura della funzione $c(z)$ che descrive la variazione della corda alare:

$$S = \int_{-A}^{+A} c(z) dz$$

dove si è supposto che l'ala si estenda sempre in apertura da $-A$ ad A . Possiamo ora definire una corda media dell'ala, indicata con \bar{c} , e data da:

$$\bar{c} = \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} c(z) dz = \frac{S}{2A}$$

Grazie alla corda media, il rapporto di allungamento si definisce per un'ala con forma in pianta generica come:

$$E = \frac{2A}{\bar{c}} = \frac{4A^2}{S} \quad (8.5)$$

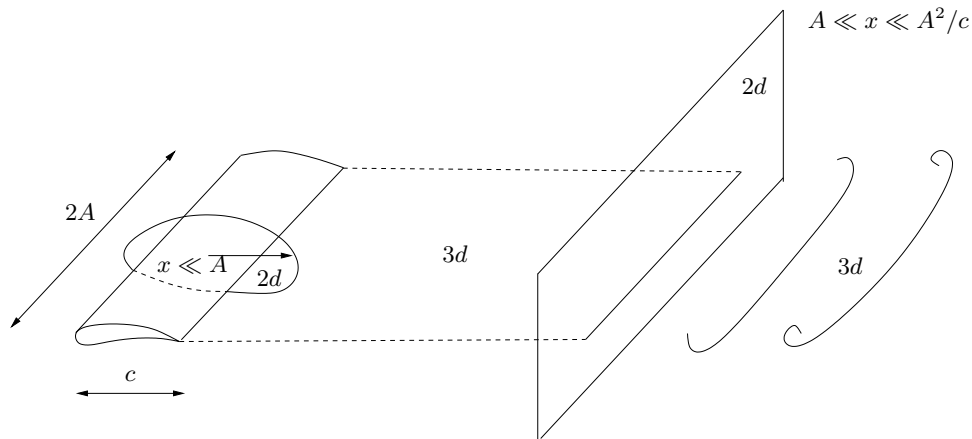


Figura 8.5 Approssimazione di ala con elevato allungamento.

8.4.1 Riduzione a due problemi bidimensionali

Consideriamo allora, come ci mostra la figura 8.5, un'ala diritta, simmetrica rispetto alla linea di mezzeria, di semiapertura A e di corda alare $c(z)$, che in generale è variabile con z . Fissata una sezione z dell'ala, il flusso si può considerare bidimensionale in un piano $x - y$ fino a che ci si allontana dal profilo di una distanza piccola rispetto alla semiapertura alare A . Allontanandosi di una distanza maggiore, a valle il flusso diventa significativamente tridimensionale, a causa delle variazioni lungo l'apertura.

Considerando però distanze dall'ala ancora maggiori, cioè molto più grandi dell'apertura alare, la situazione torna ad essere approssimativamente bidimensionale, ma questa volta in un piano $y - z$. Fino a quando la distanza dall'ala non cresce troppo, l'intersezione della scia con un piano $y - z$ ha una forma che non si discosta troppo dalla proiezione sul piano stesso del bordo di uscita dell'ala. Allontanandosi ulteriormente, l'intersezione inizia a deformarsi gradualmente, fino a che inizia un processo di arrotolamento della scia intorno ai suoi estremi.

A questo punto occorre rendere quantitative le affermazioni qualitative appena fatte, e stabilire dove e sotto quali condizioni si ha flusso bidimensionale in un piano $y - z$ nel quale la geometria dell'intersezione della scia con tale piano è data dalla proiezione del bordo di uscita dell'ala.

8.4.2 Piano di Trefftz

Per ottenere una stima dell'ordine di grandezza della distanza alla quale la forma della scia si discosta da quella della proiezione del bordo di uscita, osserviamo che la forma della scia è incognita, e che la posizione dei punti della scia si può calcolare, conoscendo la soluzione in termini di campo di velocità, integrando la

seguinte equazione differenziale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \mathbf{V}$$

in cui \mathbf{x} è il vettore posizione di un punto appartenente alla scia, e λ è un parametro qualsiasi. Se come parametro si sceglie proprio la coordinata x , le coordinate y e z di un punto della scia sono date dalle due equazioni scalari:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{V_\infty + u}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{w}{V_\infty + u}.$$

Per effetto delle componenti trasversali della velocità, la forma della scia si discosta gradualmente dalla forma piana che essa assume subito dopo il distacco. Le componenti trasversali della velocità devono ridursi a zero nel limite bidimensionale di ala di allungamento infinito, ovvero quando $A \rightarrow \infty$. Per motivi dimensionali quindi possiamo dire che sia la componente v sia la w sono date, come ordine di grandezza, da $V_\infty \bar{c}/(2A)$, cioè sono direttamente proporzionali alla V_∞ ma anche al rapporto \bar{c}/A , così da ridursi a zero nel limite di allungamento infinito.

Ad una certa distanza x dall'ala, l'ordine di grandezza della deformazione subita dalla scia è:

$$y \sim \frac{\bar{c}}{2A}x; \quad z \sim \frac{\bar{c}}{2A}x.$$

Siamo quindi in grado di stabilire, almeno come ordine di grandezza, la distanza x a valle della linea di distacco della scia dall'ala a cui si è raggiunta una deformazione significativa della scia. Se come entità significativa della deformazione assumiamo $y \sim A$, dalle relazioni precedenti si ricava

$$x \sim \frac{2A^2}{\bar{c}}.$$

La distanza x a valle dell'ala alla quale si può applicare l'approssimazione di flusso bidimensionale in un piano $y - z$ deve dunque essere tale che

$$A \ll x \ll \frac{A^2}{c}.$$

La separazione fra le due scale di lunghezza A ed A^2/c aumenta quanto più l'allungamento dell'ala è elevato. Per un'ala dotata di elevato allungamento, quindi, esiste un intervallo di distanze molto maggiori della semiapertura alare e molto minori della semiapertura stessa moltiplicata per l'allungamento, alle quali la scia si è allontanata dall'ala quanto basta per non risentire più degli effetti tridimensionali che caratterizzano il campo vicino, ma non così tanto da iniziare il processo di arrotolamento degli estremi che caratterizza il campo di velocità molto lontano dall'ala.

8.4.3 Forza aerodinamica nel piano di Trefftz

Nel piano di Trefftz le componenti cartesiane della forza aerodinamica si possono scrivere in modo ulteriormente semplificato, in termini di integrali estesi alla sola apertura alare. Questo risultato in realtà è stato già ottenuto per la portanza con la formula (8.4), che riscriviamo utilizzando l'informazione (8.1) del teorema di Kutta-Joukowski applicato su ogni sezione dell'ala:

$$L = \rho V_\infty \int_{-A}^{+A} \Gamma(z) dz \quad (8.6)$$

Per quanto riguarda invece la resistenza, la sua espressione esatta (8.3) si semplifica se il piano a $x = x_2$ è il piano di Trefftz. Infatti nel piano di Trefftz, dove il moto è bidimensionale e quindi non ha variazioni con x , si ha che $u = \varphi_x = 0$. Quindi la formula esatta (8.3) diventa:

$$D_i = \rho \iint_{x=x_2} \frac{v^2 + w^2}{2} dy dz = \frac{\rho}{2} \iint_{x=x_2} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi dy dz$$

A questo punto possiamo sfruttare l'identità vettoriale (B.10), per la quale risulta:

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot (\varphi \nabla\varphi) - \varphi \nabla^2\varphi$$

per scrivere la resistenza come integrale della divergenza del vettore $\varphi \nabla\varphi$ nel piano di Trefftz (ricordiamo che $\nabla^2\varphi = 0$ in quanto φ è soluzione dell'equazione di Laplace):

$$D_i = \frac{\rho}{2} \iint_{x=x_2} \nabla \cdot (\varphi \nabla\varphi) dS$$

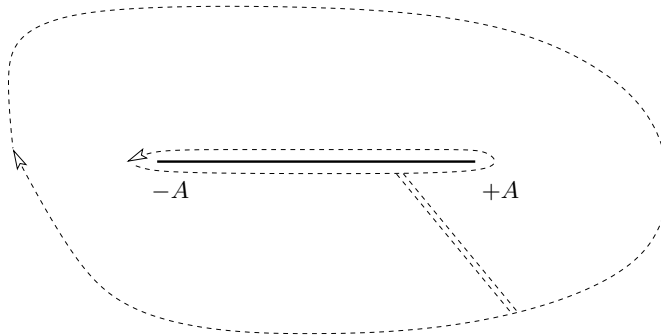


Figura 8.6 Cammino di integrazione per calcolare la resistenza come integrale di contorno nel piano di Trefftz.

A questo punto il teorema della divergenza permette di trasformare questo integrale in un integrale esteso ad un contorno chiuso, come ci mostra la figura 8.6:

$$D_i = \frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dc$$

L'integrazione sul contorno all'infinito dà contributo nullo per le condizioni all'infinito sulla velocità, e lo stesso vale per il segmento che unisce il contorno lontano a quello vicino: esso viene percorso due volte in senso contrario (e quindi la normale ha segno opposto), e la funzione integranda è continua. Non è nullo invece l'integrale esteso al contorno vicino, che consiste nel segmento da $-A$ ad A percorso due volte sui due lati opposti. La normale al segmento ha anche un orientamento opposto, ma la funzione integranda non è continua sui due lati della scia, e risulta:

$$D_i = \frac{\rho}{2} \int_{-A}^{+A} \left(\varphi^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial y} - \varphi^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) dz$$

Grazie alle condizioni al contorno da applicare alla scia, discusse in dettaglio in §4.5 per il caso bidimensionale, sappiamo però che φ_y , cioè la componente della velocità normale alla scia, deve essere continua attraverso la scia stessa. Risulta dunque per la resistenza indotta l'espressione:

$$D_i = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{+A} (\varphi^+ - \varphi^-) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \quad (8.7)$$

che grazie al teorema di Kutta-Joukowski (8.1) si può scrivere anche come:

$$D_i = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{+A} \Gamma(z) v(z) dz \quad (8.8)$$

La linea portante Siamo dunque riusciti a scrivere le componenti cartesiane della forza aerodinamica come integrali estesi alla sola apertura delle quantità $\Gamma(z)$ e $v(z)$. Osservata dal piano di Trefftz, l'ala si è ridotta ad una linea senza estensione in direzione x ed y , caratterizzata unicamente da una distribuzione $\Gamma(z)$ di circolazione lungo l'apertura e dalla conseguente distribuzione di velocità indotta: questa teoria prende infatti anche il nome di teoria della linea portante.

8.5 Soluzione nel piano di Trefftz

Grazie all'indipendenza dalla coordinata x , il campo di velocità nel piano di Trefftz si può calcolare come soluzione di un problema di Laplace bidimensionale in un piano $y - z$ ortogonale alla scia, dove la funzione incognita $\varphi = \varphi(y, z)$ non dipende da x :

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0.$$

Si tratta ora di determinare le condizioni al contorno per questo problema differenziale. Anzitutto osserviamo ancora una volta che, non essendo ancora intervenute variazioni significative della forma della scia in direzione y o z , si conosce la forma del contorno stesso, cioè della traccia della scia: essa corrisponde al segmento da $-A$ ad A dell'asse z .

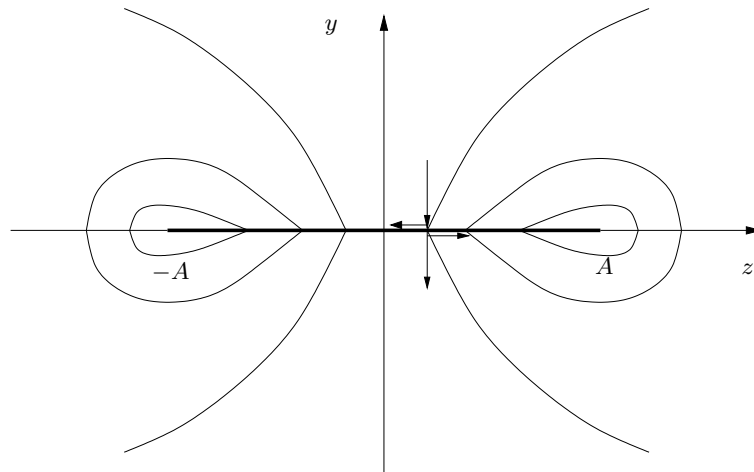


Figura 8.7 Andamento qualitativo delle linee di corrente nel piano di Trefftz: la componente verticale di velocità è continua attraverso la scia, mentre quella nel senso dell'apertura è discontinua.

Su questo segmento supponiamo per ora di conoscere in funzione della coordinata z il valore della circolazione $\Gamma = \Gamma(z)$, che viene determinata dal profilo alare nella stazione z corrispondente grazie alla conservazione del salto di potenziale lungo ogni linea che costituisce la superficie della scia. Quindi una prima informazione consiste nel conoscere il salto di potenziale $\Delta\varphi(z) = \Gamma(z)$ lungo l'apertura. La seconda informazione consiste nella continuità della derivata normale del potenziale attraverso la scia, per effetto della già ricordata conservazione della componente normale del flusso di massa. L'altra componente di velocità, cioè φ_z , non è invece continua attraverso la scia.

Il campo di velocità nel piano di Trefftz ha l'andamento qualitativo mostrato nella figura 8.7, in cui si vede che φ_y è continua mentre φ_z è discontinua. La soluzione nel piano di Trefftz si può calcolare con due procedimenti alternativi, che sono entrambi interessanti e che quindi descriviamo nel seguito.

8.5.1 Formule di Hilbert

Il problema di Laplace nel piano di Trefftz si porta facilmente in una forma nella quale le formule di Hilbert (7.11), ricavate ed utilizzate nel Capitolo ?? a pro-

posito dei profili sottili in moto incomprimibile, forniscono immediatamente la soluzione.

Notiamo infatti che φ_y deve essere una funzione pari di y . Di conseguenza φ è una funzione dispari di y , perché come abbiamo già discusso in §?? trattando i profili sottili, la derivazione o integrazione rispetto a y cambia questo tipo di simmetria. Questo implica allora che sull'asse z per $|z| > A$ deve essere $\varphi = 0$. All'interno del segmento che rappresenta la scia il potenziale può invece essere non nullo in quanto non continuo, ma per l'antisimmetria deve essere $\varphi(0^+, z) = -\varphi(0^-, z)$. Questo a sua volta richiede che l'intero salto di potenziale $\Delta\varphi(z)$, che si conosce ed è pari alla circolazione $\Gamma(z)$, si distribuisca simmetricamente da un lato e dall'altro della scia:

$$\varphi(0^+, z) = -\varphi(0^-, z) = \frac{\Gamma(z)}{2}.$$

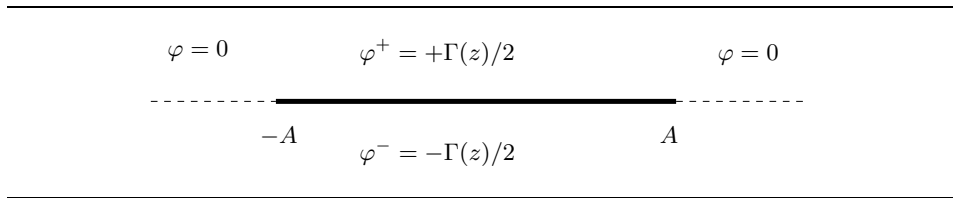


Figura 8.8 Schema per il calcolo della velocità nel piano di Trefftz con le formule di Hilbert: condizioni al contorno in termini del potenziale φ .

Ci siamo quindi ricondotti ad un problema, le cui condizioni al contorno sono illustrate in figura 8.8, identico al problema antisimmetrico dello spessore per i profili sottili: sulla parte superiore del segmento $(-A, A)$ è nota $\varphi = \varphi^{(a)}$ e sulla parte inferiore $\varphi = -\varphi^{(a)}$, mentre al di fuori del segmento è $\varphi^{(a)} = 0$. L'incognita φ è quindi nota su tutto l'asse reale z del piano complesso $z + iy$.

Per sfruttare le stesse espressioni ricavate per i profili sottili, dove le condizioni erano scritte in termini delle parti reale ed immaginaria della velocità complessa, si possono riscrivere le condizioni al contorno del problema nel piano di Trefftz (si veda la figura 8.9) in termini della componente lungo l'asse z (cioè la parte reale) della velocità complessa $w - iv$, ovvero $w(z) = \varphi_z$.

A questo punto, conoscendo w sull'intero asse reale, con la formula di Hilbert (7.11a) si ottiene immediatamente la parte immaginaria in un punto generico z_0 dell'asse reale z come:

$$v(z_0) = \frac{1}{\pi} \oint_{-A}^{+A} \frac{1}{2} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{dz}{z - z_0} \quad (8.9)$$

8.5.2 Trasformazioni conformi

Come nel caso dei profili sottili, anche per il moto nel piano di Trefftz esiste la possibilità, alternativa all'uso delle formule di Hilbert, di trasformare conformemente

$$\begin{array}{ccc}
 w = 0 & w = +1/2 \, d\Gamma(z)/dz & w = 0 \\
 \hline
 -A & & A \\
 \hline
 & w = -1/2 \, d\Gamma(z)/dz &
 \end{array}$$

Figura 8.9 Schema per il calcolo della velocità nel piano di Trefftz con le formule di Hilbert: condizioni al contorno in termini della parte reale w della velocità complessa.

il segmento in un cerchio. Questo procedimento è particolarmente interessante in questo caso, poiché fornisce una risposta immediata all'importante problema di conoscere come varia la resistenza al variare della funzione $\Gamma(z)$, e di stabilire quindi quale sia la distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$ che consente di ottenere la minima resistenza indotta a parità di portanza.

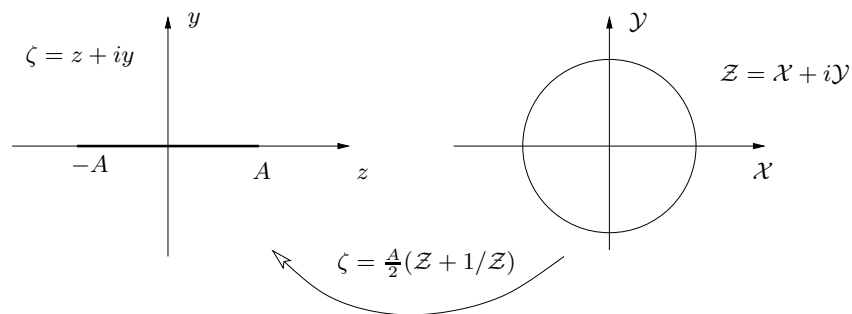


Figura 8.10 Passaggio dal piano di Trefftz al piano Z : la scia si trasforma nel cerchio unitario.

La trasformazione che consideriamo è:

$$\zeta = \frac{A}{2}(\mathcal{Z} + 1/\mathcal{Z}) \quad (8.10)$$

che trasforma, come ci è già noto da §6.7, una circonferenza in un segmento, ed in particolare l'esterno del cerchio di raggio unitario centrato nell'origine del piano $\mathcal{Z} = \mathcal{R}e^{i\theta}$, il cui contorno ha equazione $\mathcal{Z} = e^{i\theta}$, nell'esterno del segmento da $-A$ ad A dell'asse reale z del piano complesso $\zeta = z + iy$ ne (si veda la figura 8.10). In particolare la corrispondenza fra il segmento e la circonferenza è:

$$z = A \cos \theta$$

Soluzione con la formula di Schwarz Nel piano \mathcal{Z} del cerchio il problema è risolubile facilmente con la formula di Schwarz (6.8). Infatti sull'intera circonferenza si conosce la parte reale del potenziale complesso, cioè la funzione φ , che vale $\varphi = \Gamma(\theta)/2$ sulla semicirconferenza superiore, e $\varphi = -\Gamma(\theta)/2$ su quella inferiore.

Ripetendo quindi il procedimento illustrato in §6.4, il potenziale complesso $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$, funzione analitica all'esterno del cerchio unitario, ammette uno sviluppo in serie di Taylor del tipo:

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{Z}^{-n}$$

La parte reale di \mathcal{F} sulla circonferenza unitaria si può scrivere in termini dello sviluppo di Taylor di \mathcal{F} come:

$$\varphi(\theta) = \frac{\mathcal{F}(e^{i\theta}) + \mathcal{F}^*(e^{i\theta})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n e^{-in\theta} + a_n^* e^{in\theta}) \quad (8.11)$$

Sulla circonferenza unitaria, dove si conosce $\Re[\mathcal{F}]$, la condizione al contorno si può sviluppare in serie di Fourier:

$$\Re[\mathcal{F}] = \varphi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

Rispetto al caso generale considerato in §6.4, qui abbiamo l'informazione aggiuntiva che φ è una funzione dispari di y e quindi di θ : la sua serie di Fourier sulla circonferenza si può scrivere allora come una somma infinita di termini sinusoidali a coefficienti reali, e priva del termine per $n = 0$:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\theta \quad (8.12)$$

Questa serie, in cui, come abbiamo appena detto, i coefficienti b_n sono numeri reali, può essere invertita per ottenere i coefficienti b_n in funzione della condizione al contorno:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Gamma(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

La serie di Fourier (8.12) per $\varphi(\theta)$ può essere riscritta nel modo seguente:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (ib_n e^{-in\theta} - ib_n e^{in\theta})$$

e confrontandola con la serie di Taylor (8.11) si ottiene il legame fra i coefficienti a_n e b_n . Deve anzitutto essere $a_0 = 0$. Inoltre:

$$a_n = ib_n$$

e quindi i coefficienti a_n della serie di Taylor per il potenziale complesso sono numeri immaginari puri.

La velocità complessa Siamo allora in grado di conoscere il potenziale complesso in tutto il piano \mathcal{Z} del cerchio, che ha la seguente espressione in serie di Taylor:

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \sum_{n=1}^{+\infty} ib_n \mathcal{Z}^{-n}$$

La velocità complessa nel medesimo piano si ottiene derivando il potenziale complesso \mathcal{F} rispetto a \mathcal{Z} . In particolare sulla circonferenza unitaria essa vale:

$$\mathcal{W} = \frac{d\mathcal{F}}{d\mathcal{Z}} = \sum_{n=1}^{+\infty} -inb_n e^{-i(n+1)\theta}$$

Per ottenere la velocità complessa nel piano ζ della scia, occorre ancora dividere \mathcal{W} per la derivata della trasformazione (8.10), che vale:

$$\frac{d\zeta}{d\mathcal{Z}} = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{Z}^2} \right)$$

e che sulla circonferenza unitaria diviene:

$$\frac{d\zeta}{d\mathcal{Z}} = \frac{A}{2} \left(1 - e^{-2i\theta} \right)$$

Raccogliendo $e^{-i\theta}$ e ricordando che $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$, si ottiene infine la velocità complessa nel piano di Trefftz (z, y):

$$w - iv = \frac{\mathcal{W}}{d\zeta/d\mathcal{Z}} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} -inb_n e^{-i(n+1)\theta}}{A/2 e^{-i\theta} 2i \sin \theta} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} -nb_n e^{-in\theta}}{A \sin \theta}$$

La parte reale di questa velocità complessa rappresenta la componente della velocità lungo l'asse z nel piano della scia, mentre la parte immaginaria è l'opposto della velocità normale alla scia:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-nb_n}{A \sin \theta} \cos n\theta \quad (8.13a)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-nb_n}{A \sin \theta} \sin n\theta \quad (8.13b)$$

8.5.3 Portanza e resistenza indotta

Per il calcolo delle componenti della forza aerodinamica basta sostituire gli sviluppi (8.12) per φ e (8.13b) per v nelle relazioni (8.6) e (8.8) che esprimono la portanza e la resistenza indotta come integrali, rispettivamente, delle funzioni $\Gamma(z)$ e $\Gamma(z)v(z)$ lungo l'apertura alare z . Naturalmente lo sviluppo di $\Gamma(z) = 2\varphi(z)$ si ottiene immediatamente dallo sviluppo (8.12) per φ .

Per calcolare le componenti della forza aerodinamica come integrali nel piano \mathcal{Z} , resta solamente da trasformare il differenziale dz . Ricordando l'espressione della trasformazione conforme (8.10) sulla circonferenza unitaria, sul segmento $(-A, A)$ si ha che $dz = -A \sin \theta d\theta$.

La portanza Sostituendo nell'espressione (8.6) per la portanza si ottiene:

$$L = \rho V_\infty \int_{-A}^{+A} \Gamma(z) dz = \rho V_\infty \int_{\pi}^0 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\theta (-A \sin \theta) d\theta$$

Questo integrale si calcola facilmente, in quanto, data l'ortogonalità delle funzioni seno, solo il termine corrispondente ad $n = 1$ determina un contributo diverso da zero. Inoltre risulta:

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

La portanza dunque è:

$$L = \rho V_\infty \pi A b_1 \quad (8.14)$$

Il risultato notevole di questa espressione consiste nel fatto che solamente il primo coefficiente b_1 dello sviluppo in serie di Fourier della distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$ compare nell'espressione della portanza. Distribuzioni diverse ma con lo stesso coefficiente b_1 producono quindi la stessa portanza.

La resistenza indotta Per quanto riguarda invece la resistenza, sostituendo gli opportuni sviluppi nella (8.8) si ha:

$$\begin{aligned} D_i &= -\rho \int_{\pi}^0 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\theta \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-mb_m}{A \sin \theta} \sin m\theta (-A \sin \theta) d\theta = \\ &= \rho \int_0^\pi \sum_{m,n=1}^{+\infty} mb_n b_m \sin n\theta \sin m\theta d\theta \end{aligned}$$

in cui sotto il segno di integrale compare il prodotto di due serie di Fourier. L'integrale e le sommatorie possono anzitutto essere scambiati:

$$D_i = \rho \sum_{m,n=1}^{+\infty} mb_n b_m \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta$$

Per l'ortogonalità della funzione seno, gli unici integrali non nulli sono quelli in cui $n = m$. Vale in particolare la relazione di ortogonalità:

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$$

in cui δ_{mn} è il simbolo di Kronecker. Si ottiene quindi un'espressione molto compatta per la resistenza in funzione dei coefficienti della serie di Fourier di $\Gamma(z)$:

$$D_i = \rho \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n^2 \quad (8.15)$$

Mentre l'espressione (8.14) della portanza contiene esclusivamente il primo coefficiente b_1 dello sviluppo in serie di Fourier di $\Gamma(z)$, la resistenza è data dai contributi, sempre positivi, di tutti i coefficienti b_n del medesimo sviluppo.

8.6 Resistenza minima

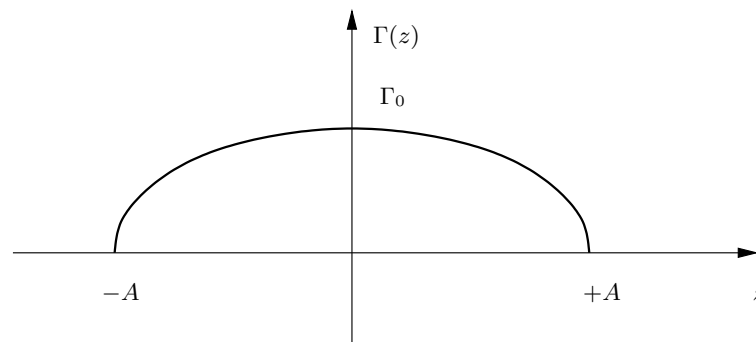


Figura 8.11 Distribuzione ellittica di circolazione.

Confrontando le espressioni (8.14) per la portanza e (8.15) per la resistenza, si ottiene immediatamente la risposta al problema della minima resistenza per assegnata portanza e allungamento. La distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$ più efficiente in termini di resistenza indotta è quella per cui solo il coefficiente b_1 del suo sviluppo in serie di Fourier è diverso da zero. È interessante notare che questo risultato è determinato unicamente dalle proprietà della scia.

Una distribuzione di Γ del tipo:

$$\Gamma_{ell}(z) = 2b_1 \sin \theta = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{A}\right)^2} \quad (8.16)$$

si dice anche distribuzione ellittica di circolazione, ed è schematizzata in figura 8.11. Essa è completamente caratterizzata dall'intensità in mezzeria $\Gamma_0 = 2b_1$. Come si può vedere utilizzando la relazione (8.13b) e considerando il solo termine per $n = 1$, una distribuzione ellittica di circolazione produce una velocità indotta costante lungo l'apertura:

$$v_{ell}(z) = -\frac{\Gamma_0}{2A} \quad (8.17)$$

Coefficienti di forza nel caso ellittico In tre dimensioni, i coefficienti adimensionali di portanza e di resistenza si ottengono adimensionalizzando le forze, che non sono più calcolate per unità di apertura, come accadeva in due dimensioni, con la divisione per la pressione dinamica e per una lunghezza al quadrato (la superficie S dell'ala) e non per una lunghezza (la corda c del profilo).

$$C_L = \frac{2L}{\rho V_\infty^2 S}; \quad C_D = \frac{2D}{\rho V_\infty^2 S}$$

Notiamo l'uso di lettere maiuscole per indicare i coefficienti aerodinamici relativi all'ala, allo scopo di differenziarli da quelli per il profilo bidimensionale, che vengono indicati con lettere minuscole.

Nel caso particolare di distribuzione ellittica di circolazione, le componenti della forza aerodinamica (ed i relativi coefficienti adimensionali) si possono calcolare con le (8.14) e (8.15) particolarizzate al caso in cui la funzione $\Gamma(z)$ è data dalla (8.16). Si ottiene:

$$L_{ell} = \frac{\pi}{2} \rho V_\infty A \Gamma_0; \quad C_{L,ell} = \pi \frac{\Gamma_0 A}{V_\infty S} \quad (8.18)$$

$$D_{i,ell} = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2; \quad C_{D_{i,ell}} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma_0^2}{V_\infty^2 S} \quad (8.19)$$

Ricavando infine Γ_0 dalla seconda delle (8.18) e sostituendolo poi nella (8.17), si ricava per la velocità indotta da una distribuzione ellittica di circolazione l'espressione:

$$\frac{v_{ell}}{V_\infty} = \frac{-C_{L,ell}}{2\pi A^2/S} = \frac{-2C_{L,ell}}{\pi E}$$

da cui si vede con evidenza che la velocità verticale indotta da una distribuzione ellittica di circolazione tende a zero al tendere all'infinito del rapporto di allungamento.

Ala ellittica I risultati discussi fin qui riguardano un'ala con distribuzione ellittica di circolazione. Per il teorema di Kutta-Joukowski applicato ad ogni sezione dell'ala, questo equivale a dire che la densità di portanza, cioè la portanza che compete ad ogni sezione dell'ala, è una funzione ellittica dell'apertura. Si parla anche, in forma abbreviata, di ala ellittica.

Ma come si realizza in pratica un'ala ellittica? Come vedremo in dettaglio in §8.7, esiste più di un modo per ottenere una $\Gamma(z)$ ellittica. A determinare l'andamento della funzione $\Gamma(z)$ contribuiscono diversi fattori: anzitutto la corda $c(z)$; inoltre l'angolo di incidenza indotta $\alpha_i(z)$, che è in generale variabile con l'apertura. Spesso poi i profili che costituiscono l'ala sono montati realizzando uno svergolamento (che è utile per fare in modo che certe sezioni dell'ala vadano in stallo prima di altre) che determina una variazione con l'apertura dell'angolo α_0 di portanza nulla. Infine il tipo di profilo può cambiare lungo l'apertura, provocando una variazione di α_0 con z che prende il nome di svergolamento aerodinamico (contrapposto al precedente svergolamento geometrico).

Nel caso particolare di $\Gamma(z)$ ellittica sappiamo per'òche $\alpha_i(z)$ è una costante. Se assumiamo inoltre che i profili non abbiano svergolamento geometrico e siano tutti uguali, allora una distribuzione di corda ellittica realizza una $\Gamma(z)$ ellittica. Nell'ulteriore caso particolare di ala diritta una funzione $c(z)$ ellittica determina una forma in pianta dell'ala ellittica.

La curva polare per ala ellittica È possibile riscrivere l'espressione del coefficiente di resistenza indotta dell'ala ellittica in funzione del relativo coefficiente di portanza, ricavando dalla (8.18)

$$\frac{\Gamma_0}{V_\infty} = \frac{C_{L,ell} S}{\pi A}$$

ed eliminando poi questo parametro dalla (8.19). Si ottiene così un legame quadratico fra il coefficiente di resistenza indotta ed il coefficiente di portanza per un'ala con distribuzione ellittica di circolazione:

$$C_{D_i,ell} = \frac{1}{\pi} \frac{S}{4A^2} C_{L,ell}^2$$

Il rapporto $S/(4A^2)$ come abbiamo visto in §8.4 è il reciproco del rapporto di allungamento E dell'ala. Di conseguenza:

$$C_{D_i,ell} = \frac{1}{\pi E} C_{L,ell}^2 \quad (8.20)$$

Questa è una relazione di notevole importanza, che mostra come il coefficiente di resistenza indotta cresce con il quadrato del coefficiente di portanza. La resistenza indotta è quindi una fonte di resistenza aerodinamica che diventa percentualmente rilevante soprattutto nelle fasi di volo ad alti C_L (cioè a basse velocità), quali il decollo e l'atterraggio. Si vede inoltre che la resistenza indotta diminuisce con l'allungamento alare, e tende a zero quando l'allungamento tende all'infinito. Solo motivi di carattere strutturale limitano la costruzione e l'uso di ali molto allungate, che dal punto di vista aerodinamico sono più efficienti. I velivoli che più hanno bisogno di elevata efficienza aerodinamica (per esempio gli alianti) sono anche i velivoli dotati delle ali più allungate.

8.6.1 Alternativa: un procedimento variazionale

Il risultato per cui si ottiene il minimo di resistenza indotta quando la distribuzione di circolazione è ellittica, e la velocità verticale è costante lungo l'apertura, si può ricavare anche mediante un procedimento alternativo basato sul calcolo variazionale. Il procedimento consiste nel considerare l'espressione (8.8) per la resistenza, imporre una variazione $\delta\Gamma(z)$ alla funzione $\Gamma(z)$, e verificare per quali condizioni si ottiene un incremento δD_i nullo della resistenza.

Simmetria fra z e z' Iniziamo ad inserire nella (8.8) l'espressione (8.9) per la velocità indotta v . Si ottiene un'espressione in cui compare solo Γ :

$$D_i = \frac{-\rho}{4\pi} \int_{-A}^{+A} \Gamma(z) \left(\oint_{-A}^{+A} \frac{d\Gamma(z')/dz'}{z' - z} dz' \right) dz.$$

Questa espressione può essere integrata per parti, sfruttando il fatto che

$$\int_{-A}^{+A} \Gamma(z) \frac{dz}{z' - z} = \Gamma(z) \log |z' - z| \Big|_{-A}^{+A} - \int_{-A}^{+A} \log |z' - z| \frac{d\Gamma(z)}{dz} dz.$$

Dal momento che $\Gamma(z) = 0$ per $z = \pm A$, cioè alle estremità alari, il fattore finito di integrazione è nullo. Si ottiene allora per la resistenza un'espressione analoga alla precedente che però mostra esplicitamente come esista simmetria fra z e z' :

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \log |z' - z| dz' dz$$

A questo punto, la variazione δD_i di resistenza che si ottiene a seguito di una variazione $\delta\Gamma$ nella circolazione, grazie a questa simmetria, si scrive a partire dalla (8.8) come:

$$\delta D_i = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{+A} \delta\Gamma(z) v(z) dz.$$

Osservando questa espressione di δD_i , si ha la risposta (banale) al problema di minimo non vincolato: la resistenza minima si ottiene quando $\delta\Gamma(z) = 0$, cioè quando la funzione $\Gamma(z)$ è costante, e quindi identicamente nulla essendo nulla alle estremità. In altre parole, si ha resistenza nulla quando è nulla anche la portanza.

Minimo vincolato Il problema interessante è però quello di minimo vincolato: trovare la funzione $\Gamma(z)$ capace di produrre una portanza assegnata con il minimo di resistenza indotta. Introducendo un moltiplicatore di Lagrange λ , il problema

di minimo vincolato è quindi risolto da:

$$\begin{aligned} \delta(D_i + \lambda L) &= -\rho \int_{-A}^{+A} \delta\Gamma(z) v(z) dz + \lambda\rho V_\infty \int_{-A}^{+A} \delta\Gamma(z) dz = \\ &= \rho \int_{-A}^{+A} (\lambda V_\infty - v(z)) \delta\Gamma(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Affinché la variazione di resistenza sia nulla per qualsiasi variazione $\delta\Gamma(z)$, deve quindi essere:

$$-v(z) + \lambda V_\infty = 0$$

da cui si ricava che la resistenza minima si ottiene quando

$$v(z) = \lambda V_\infty = \text{cost}$$

Questo conferma che la distribuzione ellittica di portanza (cui corrisponde una velocità verticale costante) è quella che permette di minimizzare la resistenza per una assegnata portanza.

8.6.2 Ala ellittica e ala generica

Oltre a prestarsi ad una semplice soluzione analitica, il caso di ala con distribuzione ellittica di circolazione è particolarmente significativo, in quanto il caso più generale si descrive mediante la differenza della soluzione rispetto al caso ellittico. Osservando infatti l'espressione (8.15) della resistenza in funzione dei coefficienti dello sviluppo di Fourier per la generica distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$, si può porre:

$$D_i = \rho \frac{\pi}{2} \left(b_1^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} n b_n^2 \right) = \rho \frac{\pi}{2} b_1^2 (1 + \delta)$$

in cui la quantità δ è stata definita come

$$\delta = \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{b_n}{b_1} \right)^2$$

Ricordando la (8.20), il coefficiente $C_{D,i}$ di resistenza indotta si può allora scrivere come:

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi E} (1 + \delta) = C_{D,i,ell} (1 + \delta)$$

Come ridurre la resistenza indotta Chiaramente risulta sempre $\delta \geq 0$, e quindi qualsiasi distribuzione di circolazione produce più resistenza indotta di una distribuzione ellittica con la stessa portanza. Il valore ottimo $\delta = 0$ richiede la costruzione di ali con $\Gamma(z)$ ellittica, che possono anche avere una distribuzione ellittica della corda o addirittura avere una superficie in pianta di forma ellittica. Ali

di questo tipo sono però di realizzazione complessa e costosa, e quindi vengono oggi raramente impiegate.

Si riescono comunque a costruire ali con valori molto ridotti del coefficiente δ scegliendo geometrie più facilmente costruibili, per esempio quella di ala rastremata, grazie alla scelta di un opportuno valore (intorno a 0.3 per valori tipici del rapporto di allungamento) del rapporto fra le corde alari all'estremità e all'incastro. L'allungamento esercita invece un sensibile effetto sulla resistenza indotta.

8.6.3 Effetti dell'allungamento

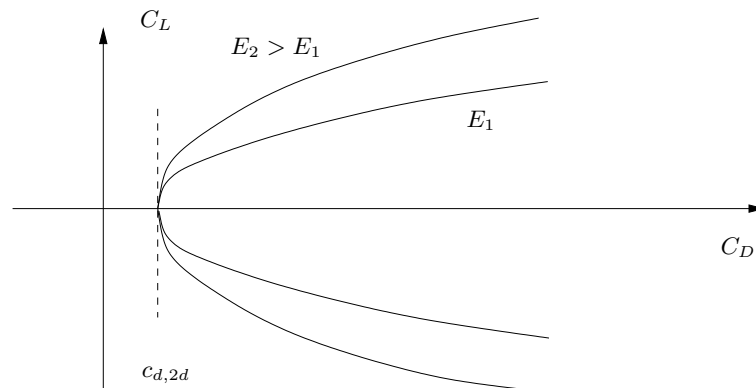


Figura 8.12 Curva polare per due ali con allungamento diverso.

Le formule ora ricavate sono importanti anche nel caso di esperimenti e misure effettuati in galleria del vento per caratterizzare un profilo aerodinamico. Mediante misure sperimentali, vengono infatti determinate per punti le curve $C_L - C_D$ (la curva polare dell'ala) e $C_L - \alpha$ per un'ala posta in galleria, caratterizzata da un certo allungamento E e con una assegnata distribuzione di portanza di cui si conosce il fattore correttivo δ . La curva polare consente di risalire alla resistenza aerodinamica del profilo bidimensionale, utilizzando la relazione:

$$C_D = c_{d,2d} + \frac{C_L^2}{\pi E} (1 + \delta)$$

in cui il secondo addendo rappresenta la resistenza indotta dall'allungamento finito, mentre $c_{d,2d}$ riassume l'effetto di tutte le altre forme di resistenza che intervengono anche nel moto bidimensionale.

Una ulteriore possibilità consiste nel tradurre le misure relative ad un'ala con allungamento E_1 per un'ala dello stesso tipo (e quindi con lo stesso δ) ma con allungamento diverso E_2 . Basta infatti sottrarre alla relazione precedente

scritta per la prima ala la stessa formula scritta per la seconda ala: il contributo bidimensionale si elide, e risulta:

$$C_{D,1} = C_{D,2} + \frac{C_L^2}{\pi} (1 + \delta) \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

Curva $C_L - \alpha$ Gli effetti tridimensionali influenzano anche la curva $C_L - \alpha$. Anche in questo caso da misure su un'ala con un certo allungamento si può risalire o alla pendenza della curva nel caso bidimensionale, o alla pendenza per la stessa ala ma con allungamento diverso. Gli effetti tridimensionali provocano una diminuzione la pendenza della curva. Se infatti diciamo m_0 la pendenza della curva $C_L - \alpha$ per il profilo bidimensionale, l'ala tridimensionale ha C_L che cresce linearmente, con una pendenza che è sempre m_0 ma rispetto all'angolo di incidenza effettivo $\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$ che è l'angolo di incidenza geometrico diminuito dell'angolo di incidenza indotta. Si ha cioè:

$$\frac{\partial C_L}{\partial(\alpha - \alpha_i)} = m_0$$

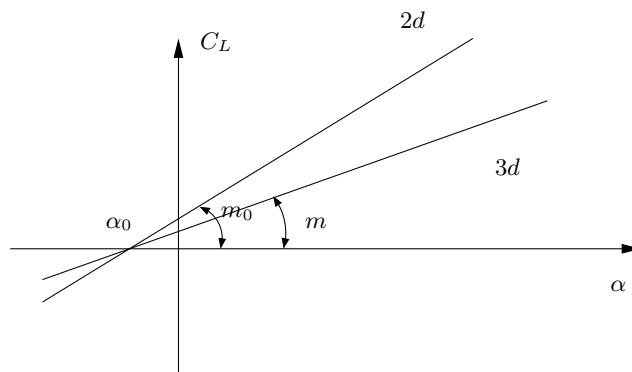


Figura 8.13 Curve $C_L - \alpha$ per un profilo bidimensionale e per un'ala tridimensionale.

Integrando rispetto ad $\alpha - \alpha_i$, si ottiene

$$C_L = m_0 \alpha - m_0 \frac{C_L}{\pi E} (1 + \delta)$$

e derivando rispetto ad α si ha l'effettiva pendenza della curva di portanza

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = m_0 - \frac{m_0}{\pi E} (1 + \delta) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$$

La pendenza m della curva $C_L - \alpha$ dell'ala risulta dunque:

$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi E}(1 + \delta)}$$

Il risultato è schematicamente illustrato in figura 8.13. La pendenza m tende al limite bidimensionale quando l'allungamento tende all'infinito. Inoltre la pendenza della curva decresce al diminuire dell'allungamento alare. L'angolo α_0 di portanza nulla (a cui corrisponde coefficiente di portanza nullo e quindi angolo di incidenza indotta nullo) non viene invece modificato dagli effetti tridimensionali.

8.7 Velocità indotta ed equazione di Prandtl

Abbiamo esaminato fino ad ora il comportamento della scia nel piano di Trefftz, supponendo di conoscere la distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$ prodotta dall'ala, e siamo riusciti in questo modo a calcolare il campo di moto nel piano di Trefftz. D'altro canto la distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$ determinata dall'ala non è ancora nota, e quindi il problema complessivo non è ancora chiuso.

Problemi vicino e lontano Abbiamo già anticipato in §8.4 che vicino all'ala, cioè per distanze dal bordo di uscita molto minori dell'apertura alare, il campo di moto è approssimativamente bidimensionale in ogni piano (x, y) che si ottiene in corrispondenza di una determinata sezione z dell'ala stessa. Questo problema bidimensionale è proprio del tipo di quelli che abbiamo considerato in dettaglio nei Capitoli precedenti, e conosciamo ormai svariati metodi per risolverlo conoscendo le opportune condizioni al contorno. Mentre la condizione al contorno sul profilo non pone problemi una volta che specifichiamo la geometria di ogni profilo bidimensionale, ci manca però l'informazione relativa alla condizione all'infinito, dove la velocità asintotica non è semplicemente data da \mathbf{V}_∞ ma dalla sua composizione vettoriale con la velocità \mathbf{v}_i indotta dalla scia sull'ala in quella particolare sezione z . La velocità indotta d'altro canto non si conosce se non dopo aver risolto il problema nel piano di Trefftz, per il qual scopo occorre conoscere $\Gamma(z)$.

In altri termini, il comportamento a zero del problema lontano (la scia nel piano di Trefftz) determina completamente la condizione all'infinito del problema vicino (il profilo nel piano $x-y$), ma la soluzione del problema vicino è necessaria per poter risolvere quello lontano.

Una semplice simmetria Il problema completo del calcolo della scia dietro all'ala è tridimensionale, ma se ne possono ottenere alcune proprietà sfruttando il campo di moto, questa volta perfettamente bidimensionale, che si ottiene sommando alla scia, che si estende sino all'infinito a valle dell'ala, una scia identica che si estende dall'ala sino all'infinito a monte. L'ala, ridotta ad una linea portante senza dimensioni in y e in z , è quindi una linea parallela all'asse z posta ad

$x = 0$. Grazie alla linearità dell'equazione di Laplace, il campo di velocità che si costruisce in questo modo è semplicemente la somma di quello reale e della sua immagine speculare, come ci mostra la figura 8.14.

La componente lungo y della velocità del campo di moto complessivo non varia con la coordinata x , grazie alla simmetria e al fatto che per ognuno dei due campi, reale e speculare, la velocità verticale è nulla all'infinito a monte e pari ad un valore costante, dato in entrambi i casi dalla relazione (8.9), all'infinito a valle.

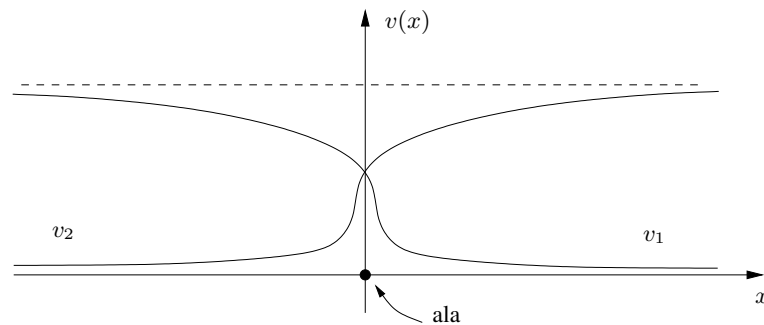


Figura 8.14 Determinazione della velocità indotta dalla scia sull'ala in base a considerazioni di simmetria.

Per la simmetria dei due campi, il valore della velocità indotta, in corrispondenza della linea portante e quindi ad $x = 0$, dalla presenza della scia lontana deve perciò essere pari alla metà del valore costante all'infinito. Ovviamente non si conosce in dettaglio l'andamento della funzione $v_i(x)$, che non è simmetrica rispetto a x . Ma sull'ala, cioè ad $x = 0$, la velocità indotta dalla scia $v_i(0)$ è esattamente la metà dell'espressione (8.9), ovvero:

$$v_i(z_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{-A}^{+A} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{dz}{z - z_0} \quad (8.21)$$

Effetto della scia sull'ala Il singolo profilo è investito da un flusso bidimensionale che all'infinito ha velocità asintotica con una componente di modulo V_∞ diretta come l'asse x , ed una ulteriore componente verticale, data dalla (8.21), che traduce l'effetto della scia sull'ala a quella particolare stazione z in apertura.

L'effetto della scia si può sintetizzare in una modifica dell'angolo di incidenza della velocità asintotica. Quantitativamente questa modifica comporta un angolo aggiuntivo $\alpha_i(z)$, l'angolo di incidenza indotta, tale che

$$\tan \alpha_i(z) = v_i(z)/V_\infty \sim \alpha_i(z).$$

in cui per angoli piccoli α_i si confonde con la sua tangente.

Conoscendo la velocità indotta, siamo ora in grado di risolvere il problema vicino relativo ad un profilo. Consideriamo allora una sezione dz infinitesima

dell'ala fra le stazioni z e $z + dz$. La portanza dL che agisce su questa sezione è dovuta ad una corrente asintotica che investe il profilo con un'incidenza pari a

$$\alpha - \alpha_0(z) + \alpha_i(z)$$

in cui α è l'inclinazione del vettore \mathbf{V}_∞ rispetto all'asse x , $\alpha_0(z)$ è l'angolo di portanza nulla del profilo bidimensionale (che può variare con z se varia la geometria del profilo), ed $\alpha_i(z)$ è l'angolo di incidenza indotta. Il coefficiente di portanza c_l del profilo bidimensionale va quindi valutato a questa incidenza, per ottenere la relativa portanza. Se inoltre restiamo nel campo di dipendenza lineare del coefficiente di portanza bidimensionale dall'angolo di incidenza, e diciamo $\partial c_l / \partial \alpha$ la pendenza costante della curva, si ha

$$dL = \rho \frac{V_\infty^2}{2} c(z) \frac{\partial c_l}{\partial \alpha} \left(\alpha - \alpha_0(z) + \frac{v_i(z)}{V_\infty} \right) dz$$

Per il teorema di Kutta-Joukowski applicato a questa sezione dell'ala, si ha anche che

$$dL = \rho V_\infty \Gamma(z) dz$$

Risulta quindi ben evidente che la distribuzione di circolazione $\Gamma(z)$, che abbiamo supposto di conoscere per risolvere il problema sul piano di Trefftz, dipende in effetti dalla velocità $v_i(z)$ indotta dalla scia sull'ala, cioè dalla soluzione nel piano di Trefftz.

Il problema di determinare contemporaneamente le due funzioni incognite $\Gamma(z)$ e $v_i(z)$ si risolve inserendo l'espressione (8.21) della velocità indotta nella formula ora ricavata per dL . Sostituendo

$$\Gamma(z) = \frac{dL}{\rho V_\infty dz}$$

si ottiene

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_\infty c(z) \frac{\partial c_l}{\partial \alpha} \left(\alpha - \alpha_0(z) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \oint_{-A}^{+A} \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \frac{dz'}{z' - z} \right)$$

Dividendo per V_∞ si ottiene la seguente equazione integro-differenziale di Prandtl:

$$\frac{\Gamma(z)}{V_\infty} - \frac{c(z) \partial c_l / \partial \alpha}{8\pi} \oint_{-A}^{+A} \frac{d(\Gamma/V_\infty)}{dz'} \frac{dz'}{z' - z} = \frac{1}{2} c(z) \frac{\partial c_l}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0(z)) \quad (8.22)$$

in cui la funzione incognita $\Gamma(z)/V_\infty$ compare, derivata, sotto il segno di integrale.

L'equazione di Prandtl può essere risolta sia numericamente, utilizzando tecniche iterative a partire da una stima iniziale della distribuzione di velocità indotta

in apertura, oppure in maniera analitica mediante la trasformata di Fourier, sviluppando in serie la funzione $\Gamma(z)$ ed ottenendo un sistema lineare avente come incognite i coefficienti b_n del suo sviluppo.

Dopo la soluzione dell'equazione di Prandtl, che fornisce le distribuzioni $\Gamma(z)$ e $v_i(z)$, sono poi immediatamente calcolabili, mediante gli integrali (8.6) e (8.8), la portanza e la resistenza che agiscono sull'intera ala.

8.8 Comportamento della scia lontana

I calcoli e le considerazioni svolti sinora riguardo alla scia sono validi per una distanza dall'ala che, come abbiamo visto in §8.4, deve essere compresa come ordine di grandezza fra A e A^2/c .

Se ci allontaniamo dall'ala in direzione x a distanze molto maggiori di A^2/c , la scia per effetto della velocità indotta dai vortici di estremità tende ad abbassarsi al centro e ad avvolgersi alle estremità. Quanto più ci si allontana dall'ala, tanto più i vortici di estremità diventano prevalenti.

Essi sono molto persistenti, ed è interessante stimare in qualche modo la loro separazione e loro dimensioni tipiche, sfruttando il fatto che l'evoluzione dei vortici di estremità con la coordinata x è piuttosto lenta se l'ala è allungata, in quanto dy/dx e dz/dx sono dell'ordine di grandezza del reciproco del rapporto di allungamento E .

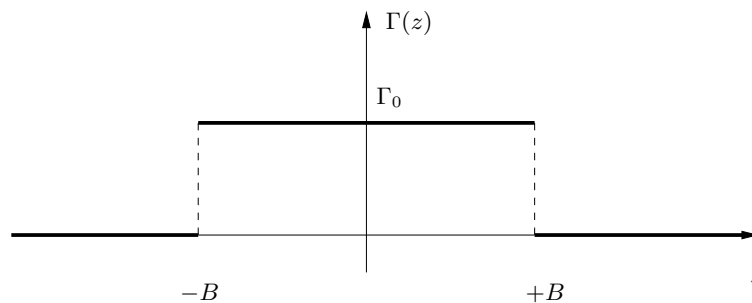


Figura 8.15 Schema di scia lontana con il salto di potenziale concentrato nei vortici di estremità.

Distanza fra i vortici di scia Una stima della separazione $2B$ fra i vortici di estremità si ottiene molto rapidamente supponendo che la scia lontana si riduca ai soli vortici di estremità, i quali inoltre si suppongono puntiformi. Come ci mostra la figura 8.15, il diagramma del salto di potenziale attraverso la scia ha un andamento a gradino, con valore nullo all'esterno del segmento che va da $-B$ a B , e pari a Γ_0 all'interno dello stesso segmento. Infatti per motivi di simmetria la

posizione $z = 0$ attraverso la linea di corrente mediana corrisponde alla medesima posizione sull'ala, e quindi il valore Γ_0 del salto di potenziale in mezzaria si mantiene lungo tutta la scia.

In questo modello semplificato, tutta la variazione di Γ tende quindi a concentrarsi nei vortici di estremità. Per il calcolo della distanza B , si può utilizzare la formula (8.6) della portanza, che non dipende dalla particolare posizione a cui si sceglie il piano $x = x_2$, ed in particolare si può eguagliare la portanza calcolata nel piano di Trefftz alla portanza calcolata molto a valle dell'ala. Ne risulta:

$$\rho V_\infty \int_{-A}^{+A} \Gamma(z) dz = \rho V_\infty 2B\Gamma_0$$

Nel caso particolare di distribuzione ellittica di circolazione conosciamo l'espressione analitica (8.16) per $\Gamma(z)$, con cui l'integrale nel piano di Trefftz può essere calcolato e fornisce l'espressione (8.18) per la portanza. Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$2B\Gamma_0 = \Gamma_0 \int_{-A}^{+A} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{A}\right)^2} dz = \frac{\pi}{2} A\Gamma_0$$

Se ne ricava immediatamente che la separazione $2B$ dei due vortici che schematizzano la scia lontana può essere stimata con:

$$B = \frac{\pi}{4} A$$

I vortici di estremità tendono quindi ad avvicinarsi fra loro dopo essersi staccati dall'ala.

Dimensioni dei vortici di scia Si può cercare con un procedimento analogo di ricavare anche una dimensione caratteristica dei vortici nel campo lontano, eguagliando la resistenza rispetto al caso della distribuzione ellittica. La resistenza è proporzionale, secondo la relazione (8.8), all'integrale lungo l'apertura del prodotto Γv ; in questo caso, conoscendo la distribuzione a gradino di $\Gamma(z)$, è possibile calcolarne la velocità indotta secondo la (8.9). La derivata di una distribuzione a gradino è una funzione delta di Dirac il cui argomento si annulla in corrispondenza del salto. Quindi:

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \Gamma_0 \delta(z + B) - \Gamma_0 \delta(z - B)$$

Ricordando ora che, per le proprietà della funzione δ , risulta semplicemente:

$$\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

la velocità indotta nel campo lontano da una distribuzione costante di portanza si calcola con la (8.9), e risulta:

$$v_i(z) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_0 \left(\frac{1}{-B-z} - \frac{1}{B-z} \right)$$

(Allo stesso risultato si sarebbe potuti arrivare anche considerando direttamente il campo di velocità indotto da due vortici puntiformi, che per ciascuno è inversamente proporzionale al raggio.)

La resistenza dovuta a questa distribuzione di velocità verticale si ottiene mediante la (8.7), e risulta:

$$D_i = -\frac{1}{4\pi} \rho \Gamma_0^2 \int_{-B}^{+B} \left(\frac{1}{z+B} - \frac{1}{z-B} \right) dz$$

Ma la velocità indotta che abbiamo appena calcolato non è integrabile, perché contiene termini singolari del tipo $1/z$: la distribuzione di portanza a gradino quindi ha resistenza infinita. Dal punto di vista fisico, questo indica solamente che i vortici di estremità non si possono avvolgere su se stessi sino al punto da diventare puntiformi. Per il calcolo delle loro dimensioni tipiche, dunque, occorre conoscere non solo la posizione di tali vortici, ma anche il dettaglio della loro struttura.

Si può comunque ottenere una stima del risultato cercando per quale valore della distanza b la resistenza ottenuta integrando da $(-B+b)$ a $(B-b)$ eguaglia il valore $\pi/8 \rho \Gamma_0^2$ caratteristico della distribuzione ellittica secondo la (8.19). Dall'equaglianza:

$$\frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 = \frac{1}{4\pi} \rho \Gamma_0^2 \int_{-B+b}^{B-b} \left(\frac{1}{z+B} - \frac{1}{z-B} \right) dz \quad (8.23)$$

si ricava:

$$\frac{b}{B} = \frac{2}{1 + e^{\pi^2/4}} \approx 0.156$$

Importanza e limiti di questi risultati Osservando queste stime delle dimensioni e della distanza fra i vortici di estremità a grande distanza dall'ala, ci si rende conto di come le loro dimensioni sono piuttosto ridotte. Questo implica che la coalescenza dei vortici per effetto della diffusione turbolenta all'interno degli stessi avviene parecchio a valle del distacco della scia dall'ala: questo e la loro intensità, direttamente legata alla portanza e quindi al peso del velivolo, fa sì che i tempi di decadimento di queste notevoli strutture vorticosi siano piuttosto elevati, dell'ordine dei minuti.

L'importanza pratica dei vortici a cui si riduce la scia dietro ai grossi velivoli commerciali è notevole, tanto che oggi non pochi aeroporti vedono la loro capacità di traffico limitata proprio dagli intervalli fra decolli o atterraggi successivi

imposti dalle normative per evitare che un velivolo incontri un vortice di scia del velivolo precedente. Questi intervalli sono fissati con ampi limiti di sicurezza (e nonostante questo gli incidenti di questo tipo non sono impossibili), anche perché le stime che abbiamo appena descritto sono abbastanza qualitative, ma non è semplice fare molto di meglio.

Infatti una scia costituita da due vortici paralleli risulta comunque instabile (si tratta della cosiddetta instabilità di Crow), e quindi ancor prima che avvenga la coalescenza dei due vortici per effetto dell'ispessimento dovuto alla turbolenza, i vortici stessi possono separarsi in anelli. Ma la distanza dall'ala a cui ciò avviene non è facilmente prevedibile.