
I metodi per lo studio dei profili alari presentati sino ad ora non sono adatti all'analisi parametrica delle caratteristiche aerodinamiche in funzione della geometria, in quanto non sono lineari rispetto alla forma del profilo.

Una teoria linearizzata rispetto alla geometria consente invece di studiare il profilo come sovrapposizione di una lastra piana posta ad incidenza, una linea media senza spessore posta ad incidenza nulla, e una distribuzione di spessore attorno ad una linea media rettilinea ad incidenza nulla.

Indice del capitolo

7.1	Impostazione	152
7.1.1	Linearizzazione	153
7.1.2	Problemi ai diversi ordini in ϵ	154
7.2	Soluzione con la variabile complessa	156
7.3	Azioni aerodinamiche	159
7.4	Formule di Hilbert	162
7.5	Formule di Hilbert sull'asse reale	164
7.6	Soluzione per lo spessore	166
7.7	Soluzione per la linea media	167
7.7.1	Metodo di Hilbert per condizioni miste	167
7.7.2	Metodo di Hilbert applicato al profilo	168
7.8	Problema inverso	170
7.9	Lastra piana	172
7.9.1	Incidenza e linea media	173
7.10	Portanza di un profilo sottile	174
7.10.1	Contributo dell'incidenza	175
7.10.2	Contributo della linea media	176
7.10.3	Angolo di portanza nulla	177
7.11	Momento di un profilo sottile	178
7.11.1	Contributo dell'incidenza	178

7.11.2 Contributo della linea media	179
7.12 Angolo di Theodorsen	180

7.1 Impostazione

Ci proponiamo di calcolare la funzione potenziale cinetico $\varphi = \varphi(x, y)$ soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

per una corrente uniforme di fluido (non viscoso ed incomprimibile) di velocità asintotica \mathbf{V}_∞ che investe un profilo alare. Supponiamo subito che il modulo della velocità asintotica sia unitario, senza per questo perdere generalità, grazie alla linearità dell'equazione di Laplace.

Come abbiamo già discusso in §4.5, l'equazione di Laplace va risolta con una condizione al contorno di velocità costante all'infinito ed una condizione di non penetrazione sul profilo. All'infinito, se si sceglie l'asse x allineato con la direzione della corrente asintotica, la condizione al contorno per la funzione potenziale è:

$$\varphi_x(\infty) = 1 \quad (7.1)$$

Sul profilo (la cui corda assumiamo unitaria senza perdere generalità, sempre grazie alla linearità), si assegna una condizione di tipo Neumann sul potenziale, cioè si richiede che la derivata normale del potenziale sia nulla (o comunque pari a un valore noto, a seconda della scelta del sistema di riferimento):

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = 0$$

Il versore normale \mathbf{n} al contorno del profilo si può scrivere in componenti cartesiane, analogamente a quanto già visto in §6.8.1, come $(-dy, dx)/dc$. La condizione al contorno sul profilo diviene quindi:

$$\frac{1}{dc} (-dy, dx) \cdot (\varphi_x, \varphi_y) = -\varphi_x \frac{dy}{dc} + \varphi_y \frac{dx}{dc} = 0$$

da cui, dividendo per dx/dc e rappresentando la forma del profilo con un'equazione $y = f(x)$, si ottiene:

$$\varphi_y(x, f(x)) = \frac{df}{dx} \varphi_x(x, f(x)). \quad (7.2)$$

Questa è l'impostazione del problema differenziale che abbiamo adottato finora, in cui la condizione di non penetrazione sul profilo viene imposta tenendo conto della geometria effettiva del profilo stesso. L'equazione di Laplace è lineare rispetto alla velocità e alle coordinate spaziali, ma la condizione al contorno sul profilo non è lineare rispetto a variazioni della geometria del contorno stesso.

7.1.1 Linearizzazione

Una teoria linearizzata rispetto alla geometria del profilo si costruisce considerando una famiglia di profili parametrizzati con un parametro ϵ : supponiamo cioè che il profilo sia descritto da una equazione del tipo

$$y = \epsilon f(x).$$

Naturalmente il parametro ϵ deve essere piccolo, in quanto la forma del profilo non può essere troppo diversa da quella di una lastra piana: sappiamo infatti che un corpo aerodinamico deve necessariamente essere dotato un bordo di uscita aguzzo, ed avere la dimensione longitudinale (la corda) prevalente rispetto a quella trasversale (lo spessore). Quando $\epsilon = 0$ riotteniamo il caso della lastra piana investita dalla corrente asintotica senza incidenza.

È utile adottare due espressioni analitiche diverse per le ordinate della parte superiore (dorso) e di quella inferiore (ventre) del profilo stesso, descrivendolo quindi attraverso due funzioni $f_d(x)$ e $f_v(x)$:

$$y_d(x) = \epsilon f_d(x); \quad y_v(x) = \epsilon f_v(x). \quad (7.3)$$

Il potenziale φ diviene così funzione delle due variabili x, y e del parametro ϵ , e può essere sviluppato in serie di Taylor rispetto al parametro piccolo ϵ :

$$\varphi = \varphi(x, y; \epsilon) = \varphi_0(x, y) + \epsilon \varphi_1(x, y) + \frac{\epsilon^2}{2} \varphi_2 + \dots \quad (7.4)$$

L'equazione Sostituendo al potenziale il suo sviluppo in serie (7.4), è immediato ricavare dall'equazione di Laplace per φ le equazioni per i diversi termini della serie di Taylor. Grazie alla linearità dell'operatore ∇^2 , ogni termine della serie deve essere infatti soluzione della medesima equazione di Laplace.

Le condizioni al contorno Sostituendo lo sviluppo (7.4) del potenziale nella condizione all'infinito (7.1), che non contiene il parametro ϵ , si ottiene che per il termine di ordine zero deve essere $\varphi_{0,x}(\infty) = 1$, mentre $\varphi_{1,x}(\infty) = 0$ per il termine di ordine uno, ed anche per tutti quelli di ordine superiore.

La linearizzazione della condizione al contorno (7.2) sul profilo è invece meno immediata. Se il profilo è descritto dalle relazioni (7.3), la condizione al contorno esatta (7.2), scritta separatamente per dorso e ventre, diviene:

$$\varphi_y(x, \epsilon f_d(x)) = \epsilon \frac{df_d}{dx} \varphi_x(x, \epsilon f_d(x)); \quad \varphi_y(x, \epsilon f_v(x)) = \epsilon \frac{df_v}{dx} \varphi_x(x, \epsilon f_v(x)).$$

Consideriamo per brevità solo il dorso del profilo. Sviluppando la condizione al contorno in serie di Taylor rispetto alla quantità piccola ϵf_d , si ha:

$$\varphi_y(x, 0^+) + \epsilon f_d \varphi_{yy}(x, 0^+) + \dots = \epsilon \frac{df_d}{dx} \varphi_x(x, 0^+) + \dots$$

in cui sono stati omessi i termini proporzionali a ϵ^2 e a potenze superiori di ϵ . Sostituendo ora al potenziale il suo sviluppo in serie (7.4), e trascurando ancora i termini proporzionali a ϵ^2 e superiori, si ottiene infine lo sviluppo in serie della condizione al contorno esatta sul profilo:

$$\varphi_{0,y}(x, 0^+) + \epsilon\varphi_{1,y}(x, 0^+) + \epsilon f_d \varphi_{0,yy}(x, 0^+) + \dots = \epsilon \frac{df_d}{dx} \varphi_{0,x}(x, 0^+) + \dots \quad (7.5)$$

7.1.2 Problemi ai diversi ordini in ϵ

Avendo ormai sviluppato in serie di Taylor rispetto ad ϵ sia l'equazione differenziale che le sue condizioni al contorno, possiamo ora confrontare i termini dello stesso ordine in ϵ e ricavare un problema differenziale, lineare, per ogni termine dello sviluppo (7.4) della funzione potenziale.

Il problema di ordine zero Confrontando i termini di ordine ϵ^0 nella (7.5), si constata che la corretta condizione al contorno sul profilo per il problema di ordine zero è $\varphi_{0,y}(x, 0^+) = \varphi_{0,y}(x, 0^-) = 0$.

Il problema matematico completo per $\varphi_0(x, y)$ consiste dunque nell'equazione:

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0$$

insieme alle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \varphi_{0,y}(x, 0^+) = 0 \\ \varphi_{0,y}(x, 0^-) = 0 \\ \varphi_{0,x}(\infty) = 1 \end{cases}$$

Questo problema differenziale ammette una semplice soluzione esatta, data da:

$$\varphi_0(x, y) = x. \quad (7.6)$$

Lastra piana senza incidenza La soluzione del problema di ordine zero in ϵ rappresenta l'intera soluzione nel caso in cui $\epsilon = 0$, quando cioè il profilo si riduce ad una lastra piana di spessore infinitesimo investita da una corrente uniforme ad incidenza nulla. Già sappiamo che in assenza di viscosità la lastra non provoca alcun effetto nella corrente, che resta uniforme in tutto il campo di moto. La semplice soluzione (7.6) appena ottenuta conferma infatti che la corrente è uguale in tutto il campo di moto alla velocità asintotica (in questo caso unitaria).

Il problema di ordine ϵ Confrontando i termini del primo ordine in ϵ nella (7.5), si ottiene la condizione al contorno per la parte superiore del profilo:

$$\varphi_{1,y}(x, 0^+) + f_d \varphi_{0,yy}(x, 0^+) = \frac{df_d}{dx} \varphi_{0,x}(x, 0^+).$$

Una relazione analoga vale anche per il ventre del profilo. Il problema matematico per $\varphi_1(x, y)$ è quindi costituito dall'equazione:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

insieme alle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \varphi_{1,y}(x, 0^+) = \frac{df_d}{dx} \varphi_{0,x}(x, 0^+) - f_d \varphi_{0,yy}(x, 0^+) \\ \varphi_{1,y}(x, 0^-) = \frac{df_v}{dx} \varphi_{0,x}(x, 0^-) - f_v \varphi_{0,yy}(x, 0^-) \\ \varphi_{1,x}(\infty) = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto della soluzione esatta (7.6) già ottenuta per il termine $\varphi_0(x, y)$ (da cui segue che $\varphi_{0,x}(x, 0) = 1$ e $\varphi_{0,yy}(x, 0) = 0$), le condizioni al contorno si riducono a:

$$\begin{cases} \varphi_{1,y}(x, 0^+) = \frac{df_d}{dx} \\ \varphi_{1,y}(x, 0^-) = \frac{df_v}{dx} \\ \varphi_{1,x}(\infty) = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Profilo sottile Possiamo interpretare queste condizioni ricordando che la velocità è il gradiente del potenziale cinetico. Indichiamo allora con u_1 e v_1 le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{V}_1 = \nabla \varphi_1$, che con l'attuale scelta degli assi cartesiani sono anche le componenti della velocità in direzione parallela e ortogonale a \mathbf{V}_∞ . Dalle condizioni al contorno (7.7) si vede che u_1 deve essere nulla all'infinito, mentre v_1 è assegnata sui due lati del segmento (di lunghezza unitaria) cui è stato ricondotto il profilo, ed assume valori in generale diversi fra dorso e ventre, e pari alla derivata rispetto ad x della funzione che descrive la forma del profilo. (Nel seguito si indicheranno talvolta, per brevità, con i simboli u e v le grandezze ϵu_1 e ϵv_1).

Nel problema di ordine uno, di cui ci occuperemo nel seguito del Capitolo, la forma del profilo compare in modo lineare attraverso le funzioni df_d/dx e df_v/dx : questo permette l'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti. La condizione al contorno omogenea sulla geometria reale è stata trasformata in una condizione non omogenea, ma da imporre su un contorno di geometria più semplice, cioè direttamente sulla retta $y = 0$.

Il problema di ordine ϵ^2 Una volta risolto il problema lineare in ϵ , si può naturalmente procedere nello sviluppo, eguagliando i termini in ϵ^2 e successivi. Il problema del secondo ordine, per esempio, è retto dall'equazione:

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0$$

insieme alle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \varphi_{2,y}(x, 0^+) = \frac{df_d}{dx} \varphi_{1,x}(x, 0^+) - f_d \varphi_{1,yy}(x, 0^+) \\ \varphi_{2,y}(x, 0^-) = \frac{df_v}{dx} \varphi_{1,x}(x, 0^-) - f_v \varphi_{1,yy}(x, 0^-) \\ \varphi_{2,x}(\infty) = 0 \end{cases}$$

Nel seguito del Capitolo non ci occuperemo della soluzione del problema in ϵ^2 , né di quelli di ordine ancora superiore. D'altro canto il procedimento non presenta differenze particolari rispetto alla soluzione del problema lineare.

7.2 Soluzione con la variabile complessa

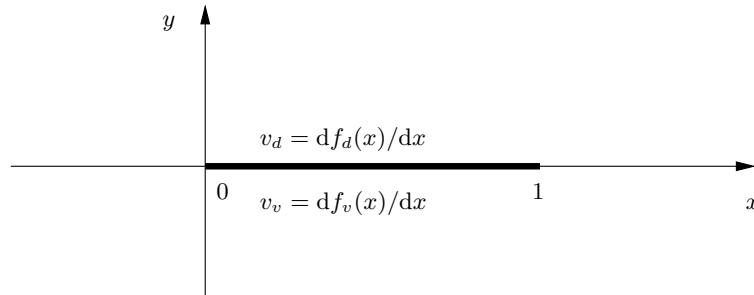


Figura 7.1 Sistema di riferimento e condizioni al contorno per il problema dei profili sottili.

Il calcolo del flusso intorno ad un profilo alare sottile è quindi stato ricondotto alla soluzione di un problema di Laplace con geometria e condizioni al contorno mostrate nella figura 7.1. La soluzione si può ricavare grazie alle variabili complesse. Si tratta di considerare il piano complesso $z = x + iy$: sui lati superiore ed inferiore del segmento unitario dell'asse reale si conosce, grazie alle condizioni al contorno (7.7), la parte immaginaria della velocità complessa $w(z) = u - iv$. In termini di variabile complessa, il problema consiste ora nel determinare in tutto il piano complesso la funzione analitica $w(z)$, cioè l'intera velocità complessa, ed in particolare la parte reale di $w(z)$ sul segmento unitario, necessaria per il calcolo delle azioni aerodinamiche.

Il metodo di Glauert (trasformazione conforme) Un possibile metodo risolutivo consiste nell'utilizzare una trasformazione conforme del tipo della (6.15) per trasformare il segmento unitario del piano z , cui è stato ricondotto il profilo, in una circonferenza tracciata nel piano di una variabile complessa ausiliaria \mathcal{Z} . Sull'intera circonferenza si conosce, grazie alle condizioni al contorno, la parte immaginaria della velocità complessa \mathcal{W} , e la formula di Schwarz permette da questa di ricavare l'intera velocità complessa. Questa impostazione conduce ad un metodo di soluzione, sviluppato da Glauert, in cui la velocità sulla circonferenza viene rappresentata mediante una serie di Fourier.

Divisione in problema simmetrico ed antisimmetrico Descriveremo in dettaglio un procedimento alternativo a quello di Glauert, che evita di ricorrere alla trasformazione del segmento nelloa circonferenza, ricavando la soluzione rimanendo nel piano z del profilo. Le condizioni al contorno dovranno però essere specificate sull'intero asse reale, così da poter utilizzare la formula integrale di Cauchy (o meglio il suo equivalente per la geometria del semipiano) per determinare la soluzione.

Le condizioni al contorno (7.7) per il problema di ordine uno, però, sono assegnate solamente sul segmento $(0, 1)$. Per estendere la condizione al contorno all'intero asse reale, si separa il problema in una parte simmetrica rispetto all'asse x ed in una parte antisimmetrica, determinando a posteriori, grazie alla linearità, l'intera soluzione come somma della soluzione simmetrica e di quella antisimmetrica.

Conoscendo le condizioni al contorno $v_d(x)$ sul dorso del profilo e $v_v(x)$ sul ventre, è sempre possibile riscriverle in termini di una parte simmetrica $v^{(s)}$ ed una antisimmetrica $v^{(a)}$. Basta porre $v_d = v^{(s)} + v^{(a)}$ e $v_v = v^{(s)} - v^{(a)}$, e ricavare poi:

$$v^{(s)} = \frac{v_d + v_v}{2}; \quad v^{(a)} = \frac{v_d - v_v}{2}.$$

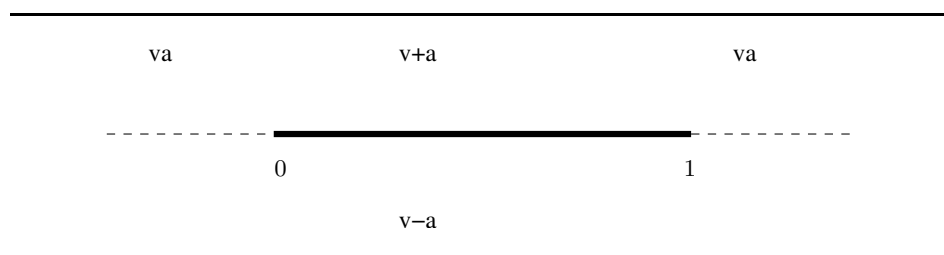


Figura 7.2 Condizioni al contorno per il problema antisimmetrico.

Problema antisimmetrico La $v^{(a)}$ soluzione del problema antisimmetrico deve essere antisimmetrica rispetto all'asse x : nell'equazione di Laplace infatti compare solo una derivata seconda rispetto ad y , che non altera le simmetrie.

Di conseguenza sull'asse reale ma all'esterno del segmento $(0, 1)$ la $v^{(a)}$, che è continua ovunque tranne che sul segmento stesso, deve essere nulla. Quindi per la parte antisimmetrica del problema le condizioni al contorno sono ora assegnate su tutto l'asse reale, come mostra la figura 7.2.

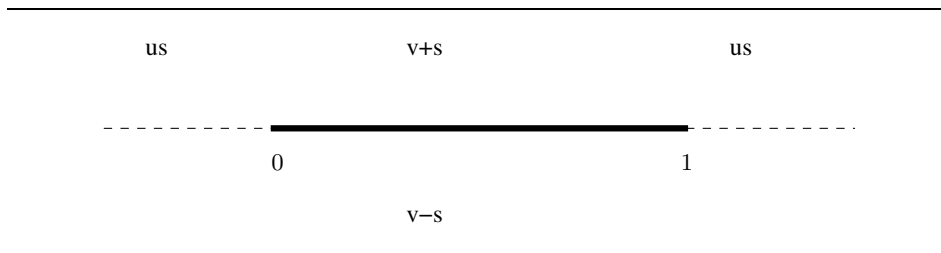


Figura 7.3 Problema simmetrico o della linea media: le condizioni al contorno sono assegnate sull'intero asse reale.

Problema simmetrico La $v^{(s)}$ soluzione del problema simmetrico è invece simmetrica rispetto all'asse x : questo non consente di dire nulla sul comportamento di $v^{(s)}$ al di fuori del segmento unitario. Ma le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ hanno simmetria opposta rispetto all'asse x , e quindi è $u^{(s)}$ a dover essere nulla su tutto l'asse reale all'esterno del segmento unitario, dove necessariamente è continua. Il tipo di condizioni al contorno per il problema simmetrico è mostrato in figura 7.3. La simmetria opposta di u e v si giustifica considerando l'equazione di continuità: se ad esempio v è una funzione simmetrica rispetto all'asse x , $\partial v / \partial y$ è antisimmetrica (la derivata rispetto ad y cambia la simmetria); quindi per l'equazione di continuità anche $\partial u / \partial x$ è antisimmetrica. L'integrazione rispetto ad x infine non cambia la simmetria rispetto ad y , quindi si conclude che u è una funzione antisimmetrica rispetto all'asse x .

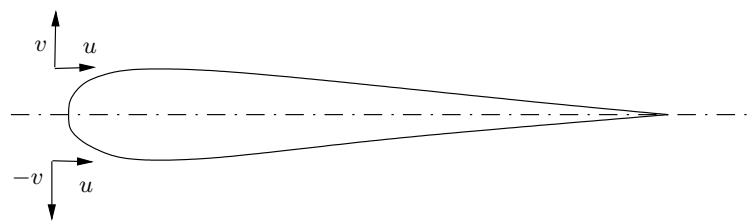


Figura 7.4 Significato geometrico del problema antisimmetrico o dello spessore.

Interpretazione geometrica La separazione del problema matematico dei profili sottili in una parte simmetrica ed in una parte antisimmetrica si presta ad

un'interpretazione geometrica. Infatti il profilo si può considerare composto dalla sovrapposizione di una distribuzione di spessore intorno ad una linea media rettilinea ad incidenza nulla e di una linea media, eventualmente in incidenza, con spessore nullo. La figura 7.4 mostra come per un profilo dotato di solo spessore il campo di v sia antisimmetrico e quello di u sia simmetrico, mentre il contrario accade per un profilo con linea media non rettilinea ma senza spessore, schematizzato in figura 7.5. L'antisimmetria del campo di u in quest'ultimo caso si comprende ricordando che si tratta della velocità u_1 al primo ordine, cioè di una correzione al primo ordine rispetto alla velocità costante $V_0 = V_\infty$.

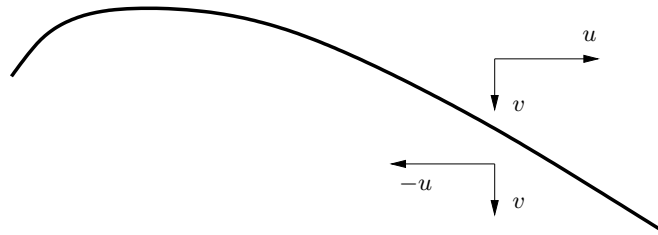


Figura 7.5 Significato geometrico del problema simmetrico o della linea media.

Dopo aver allora definito le due funzioni di spessore e linea media come:

$$y_{sp}(x) = f_d(x) - f_v(x); \quad y_{lm}(x) = \frac{f_d(x) + f_v(x)}{2}$$

si introducono le due velocità:

$$v_{sp}(x) = \frac{d}{dx} \frac{f_d(x) - f_v(x)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dy_{sp}(x)}{dx}; \quad v_{lm}(x) = \frac{d}{dx} \frac{f_d(x) + f_v(x)}{2} = \frac{dy_{lm}}{dx}$$

che consentono ai due problemi simmetrico ed antisimmetrico di avere condizioni al contorno assegnate su tutto l'asse reale, e calcolabili a partire dalla geometria del profilo.

7.3 Azioni aerodinamiche

Uno degli obiettivi fondamentali della teoria dei profili sottili è il calcolo delle azioni aerodinamiche. Eseguiamo nel seguito questo calcolo, secondo il procedimento già illustrato ed utilizzato in §4.6, integrando il flusso di quantità di moto lungo un contorno tracciato molto lontano dal profilo. Sin d'ora però, prima ancora cioè di saper determinare lo sviluppo all'infinito della soluzione, è utile esprimere le azioni aerodinamiche mediante l'integrale degli sforzi normali intorno al profilo. Si possono infatti ricavare informazioni interessanti sul diverso

ruolo che la distribuzione di spessore e la linea media rivestono nel determinare le forze aerodinamiche.

Calcoliamo dunque, a partire dalla relazione (1.24), la forza esercitata dal fluido sul profilo, ovvero l'integrale degli sforzi normali, esteso ad un circuito chiuso infinitamente prossimo al profilo stesso:

$$\mathbf{F}_a = \oint_{S_1} p \mathbf{n} \, dc$$

Teorema di Bernoulli linearizzato La pressione si esprime in funzione della velocità attraverso la relazione di Bernoulli (2.14) per il caso incomprimibile, irrotazionale e stazionario. Introducendo per la pressione e la velocità i relativi sviluppi in serie di Taylor rispetto al parametro piccolo ϵ , essa diviene:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p_0 + \epsilon p_1 + \dots + \rho \left(\frac{V_0^2}{2} + \epsilon \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_1 + \dots \right).$$

La relazione di Bernoulli linearizzata si ottiene eguagliando i termini proporzionali ad ϵ :

$$p_1 + \rho \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_1 = 0.$$

Dobbiamo ora prestare attenzione alle dimensioni fisiche delle quantità che stiamo considerando. Utilizziamo un asterisco per indicare le quantità dimensionali: quindi u_1^* indica la componente, dotata di dimensioni, di \mathbf{V}_1^* nella direzione x , che è anche la direzione di \mathbf{V}_∞^* , ed è $u_1^* = V_\infty^* u_1$. Ricordando la soluzione (7.6) del problema di ordine zero sappiamo che $\mathbf{V}_0^* = \mathbf{V}_\infty^*$; possiamo così scrivere la pressione (dimensionale) p_1^* come

$$p_1^* = -\rho^* V_\infty^{*2} u_1^* = -\rho^* V_\infty^{*2} u_1$$

Dalla definizione di coefficiente di pressione si ottiene quindi:

$$c_p = \frac{2p_1^*}{\rho^* V_\infty^{*2}} = -2u_1 \quad (7.8)$$

Per il calcolo di \mathbf{F}_a in teoria linearizzata occorre ancora linearizzare il termine $\mathbf{n} \, dc$: se il profilo è descritto dalle equazioni (7.3), risulta $\mathbf{n} \, dc = (-dy, dx) = (-dy/dx, 1)dx$. La forza aerodinamica diviene:

$$\mathbf{F}_a^* = \oint_{S_1} p_1^* \mathbf{n} \, dc = -\rho^* V_\infty^{*2} c \oint_{S_1} u_1 \left(-\frac{dy}{dx}, 1 \right) dx.$$

Resistenza Eliminando ora per semplicità gli asterischi per le quantità dimensionali, la componente orizzontale di \mathbf{F}_a , cioè la resistenza, è

$$F_x = D = \rho V_\infty^2 c \oint_{S_1} u_1(x) \frac{df}{dx} dx = \rho V_\infty^2 c \left(\int_1^0 u_d \frac{df_d}{dx} dx + \int_0^1 u_v \frac{df_v}{dx} dx \right).$$

La resistenza è proporzionale all'integrale della quantità $u_1 dy/dx$, prodotto di due termini proporzionali ad ϵ ed è quindi complessivamente di ordine ϵ^2 . All'ordine ϵ , cioè nell'ambito della teoria dei profili sottili, la resistenza aerodinamica è nulla. Conosciamo già il risultato del teorema di Kutta-Joukowski, secondo il quale la resistenza aerodinamica è identicamente nulla nell'ambito del modello matematico costituito dall'equazione di Laplace: tutto ciò deve valere indipendentemente da ogni linearizzazione. D'altro canto, non è banale ritrovare questo risultato nella teoria dei profili sottili: vedremo infatti che si ha un contributo non infinitesimo alla forza totale dovuto alla singolarità di bordo di attacco, senza il quale la resistenza appare per ora $O(\epsilon^2)$ anziché esattamente nulla.

La portanza Per la componente verticale di \mathbf{F}_a , cioè la portanza, risulta invece l'espressione:

$$F_y = L = -\rho V_\infty^2 c \oint_{S_1} u_1(x) dx = -\rho V_\infty^2 c \left(\int_1^0 u_d dx + \int_0^1 u_v dx \right)$$

Cambiando verso di percorrenza al primo integrale, si ha infine:

$$L = \rho V_\infty^2 c \int_0^1 (u_d(x) - u_v(x)) dx$$

La portanza è quindi proporzionale alla circolazione intorno al profilo, confermando ancora una volta il teorema di Kutta-Joukowski. Ma l'informazione interessante si ottiene separando i contributi dovuti alla linea media e allo spessore, secondo le definizioni:

$$u_d = u_{sp} + u_{lm}; \quad u_v = u_{sp} - u_{lm}.$$

Il contributo alla portanza di $u_{sp}(x)$ è uguale ed opposto fra dorso e ventre per ogni posizione x sul segmento unitario: di conseguenza la distribuzione di pressione dovuta allo spessore non ha alcun effetto sulla portanza. Al contrario il contributo di $u_{lm}(x)$ è uguale, anche nel segno, fra dorso e ventre. Si conclude quindi che la portanza è:

$$L = 2\rho V_\infty^2 c \int_0^1 u_{lm}(x) dx$$

Pur non conoscendo ancora la soluzione $u_{lm}(x)$, questa relazione ci mostra già che la forza aerodinamica, almeno per quanto riguarda la soluzione all'ordine uno, non dipende dalla distribuzione di spessore, ma solo dalla linea media del

profilo. Le differenze di pressione indotte su dorso e ventre del profilo dalla distribuzione di spessore sono infatti uguali e si compensano. Non bisogna dimenticare comunque che la distribuzione di spessore, oltre ad essere spesso utile di per sè, gioca un ruolo nel determinare l'andamento del coefficiente di pressione e delle velocità locali, ed è quindi una grandezza importante nel determinare, ad esempio, le caratteristiche del profilo rispetto alla separazione dello strato limite.

Il momento In modo analogo, il calcolo dell'unica componente M_z diversa da zero del momento aerodinamico M_a rispetto all'origine si effettua integrando gli sforzi normali intorno al profilo e linearizzando. Si giunge alla relazione:

$$\begin{aligned} M_{z,0} &= \rho V_\infty^2 c^2 \oint u_1(x) x \, dx = \rho V_\infty^2 c^2 \int_0^1 (u_d - u_v) x \, dx = \\ &= 2\rho V_\infty^2 c^2 \int_0^1 u_{lm}(x) x \, dx \end{aligned}$$

Anche per il momento aerodinamico non c'è contributo dalla distribuzione di spessore intorno al profilo: il momento dipende unicamente dalla pendenza della linea media.

7.4 Formule di Hilbert

Per il calcolo delle azioni aerodinamiche occorre conoscere, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, la velocità $u_{lm}(x)$ sul contorno del profilo. In variabili complesse, l'intera velocità complessa in tutto il piano z potrebbe essere ricavata, conoscendone la parte reale o la parte immaginaria sull'intero asse reale, mediante uno strumento concettualmente simile alla formula integrale di Cauchy (A.4), che qui riportiamo:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Essa consente il calcolo diretto del valore $f(z_0)$ di una funzione analitica $f(z)$ in un punto generico z_0 interno ad un cammino chiuso sul quale sia nota l'intera funzione. Per risolvere il problema dei profili sottili, è quindi necessario estendere la formula di Cauchy in modo da poter affrontare il caso in cui una sola componente della velocità complessa sia assegnata sull'asse reale. In questa estensione consistono le formule di Hilbert.

Semicirconferenza di raggio infinito Il cammino chiuso che si considera è un tratto da $-R$ ad R sull'asse reale, chiuso a semicerchio nel semipiano immaginario per esempio superiore (si veda la figura 7.6). L'estensione della formula di Cauchy a questo tipo di percorso chiuso è possibile solo quando la funzione $f(z)$ tende a zero abbastanza rapidamente quando $z \rightarrow \infty$ e $y > 0$: in questo caso l'integrale lungo l'arco di circonferenza fornisce un contributo nullo al tendere

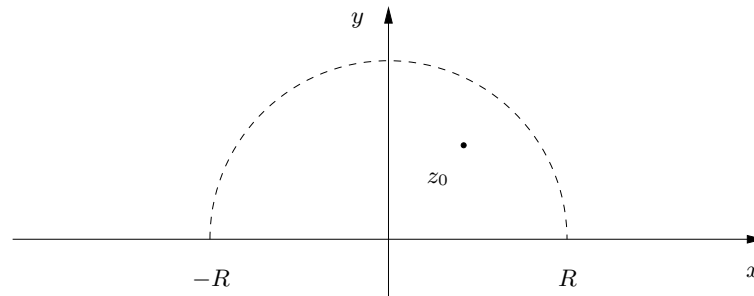


Figura 7.6 Cammino di integrazione per ricavare le formule di Hilbert.

del raggio R all'infinito. Notiamo esplicitamente che questa ipotesi è certamente verificata per i profili sottili, in cui la funzione $f(z)$ è la velocità complessa soluzione del problema linearizzato di ordine uno: infatti le condizioni al contorno all'infinito richiedono che sia u_1 che v_1 tendano a zero.

Con questa osservazione, la formula integrale di Cauchy per questo particolare contorno diviene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx$$

Quando la funzione $f(z)$ è proprio la velocità complessa, si ha:

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x - z_0} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iv(x)}{x - z_0} dx \quad (7.9)$$

Una importante simmetria Resta il secondo problema da risolvere: la formula che abbiamo appena ricavato richiede di conoscere sull'asse reale l'intera velocità complessa, mentre le condizioni al contorno che abbiamo a disposizione riguardano solamente la sua parte reale oppure la sua parte immaginaria.

Possiamo però dimostrare che i due addendi della formula (7.9) sono uguali. L'esistenza di un legame fra la parte reale e la parte immaginaria della velocità complessa si comprende pensando al fatto che la funzione $w(z)$ è analitica, ed in quanto tale ha parte reale ed immaginaria non indipendenti, ma legati dalle condizioni di Cauchy-Riemann. Abbiamo fatto la medesima osservazione in §6.4 a proposito della formula di Schwarz, che infatti richiede sul contorno la conoscenza solo della parte reale oppure della parte immaginaria della funzione incognita.

Per mettere in evidenza questa importante simmetria, consideriamo il primo addendo I_1 della (7.9), in cui compare solo la componente u ; rendiamo reale il denominatore moltiplicando numeratore e denominatore per la quantità $x - x_0 +$

iy_0 , riscrivendo:

$$I_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x) [(x - x_0) + iy_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

L'integrale I_1 ha parte reale antisimmetrica rispetto all'asse x , ovvero

$$\Re[I_1(x_0 + iy_0)] = -\Re[I_1(x_0 - iy_0)].$$

La sua parte immaginaria è invece simmetrica: $\Im[I_1(x_0 + iy_0)] = \Im[I_1(x_0 - iy_0)]$. Esaminando poi il secondo addendo I_2 della (7.9), si vede che l'integrale

$$I_2(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-v(x) [(x - x_0) + iy_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx$$

ha un comportamento opposto, ovvero ha parte reale simmetrica e parte immaginaria antisimmetrica rispetto all'asse x : $\Re[I_2(x_0 + iy_0)] = \Re[I_2(x_0 - iy_0)]$ mentre $\Im[I_2(x_0 + iy_0)] = -\Im[I_2(x_0 - iy_0)]$.

Ora, ricordiamo che la formula integrale di Cauchy (A.4) fornisce risultato nullo quando il punto z_0 è esterno al cammino di integrazione. Per un cammino del tipo illustrato nella figura 7.6, ciò significa che $w(z_0)$ è nullo quando il punto z_0 si trova nel semipiano inferiore. Perché ciò avvenga, devono essere nulle separatamente la sua parte reale e la sua parte immaginaria, e questo comporta immediatamente che debbano essere uguali ed opposte nel semipiano inferiore sia le parti reali dei due addendi della (7.9), sia le parti immaginarie. A causa delle simmetrie ora ricordate, nel semipiano superiore i due addendi sono quindi uguali e dello stesso segno.

La velocità complessa si può dunque ricavare in qualsiasi punto z_0 di un semipiano complesso, se si conosce sull'asse reale la sua parte reale oppure la sua parte immaginaria. Le due formule di Hilbert che consentono questo calcolo sono:

$$w(z_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x - z_0} dx \quad (7.10a)$$

$$w(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-v(x)}{x - z_0} dx \quad (7.10b)$$

7.5 Formule di Hilbert sull'asse reale

Per calcolare l'andamento del coefficiente di pressione e quindi le azioni aerodinamiche, è sufficiente conoscere l'andamento della velocità u sul profilo, il che equivale, con le semplificazioni permesse dalla teoria dei profili sottili, a conoscere la parte reale della velocità complessa sull'asse reale. Per questo non è sufficiente spostare senz'altro il punto z_0 che compare nelle (7.10a) e (7.10b) sull'asse reale, ponendo $z_0 = x_0$. Infatti le formule di Hilbert, essendo basate sulla

formula di Cauchy, richiedono che il punto z_0 sia interno al cammino di integrazione. È quindi necessario ricavare la velocità complessa $w(x_0)$ in un punto x_0 sull'asse reale operando un passaggio al limite:

$$\pi w(x_0) = \frac{1}{i} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x - x_0 - iy_0} dx = \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-v(x)}{x - x_0 - iy_0} dx.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $x - x_0 + iy_0$, e separando poi la parte reale e quella immaginaria per ottenere le componenti u e v della velocità complessa, si ottiene:

$$\begin{aligned} \pi u(x_0) &= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx = \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-v(x)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx; \\ \pi v(x_0) &= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx = \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(x)y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx. \end{aligned}$$

Integrali in parte principale secondo Cauchy Consideriamo la prima espressione per $\pi v(x_0)$. L'integrale nel senso classico di Riemann non esiste, perché quando $y_0 \rightarrow 0$ la funzione integranda diviene singolare nel punto $x = x_0$ che è interno all'intervallo di integrazione. L'integrale può però essere riscritto isolando il punto x_0 mediante un intervallino simmetrico centrato in x_0 e di sempiampiezza δ :

$$\begin{aligned} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx &= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \delta} \frac{u(x)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{u(x)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx + \int_{x_0 + \delta}^{+\infty} \frac{u(x)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx \right). \end{aligned}$$

Solo il secondo integrale a secondo membro non è regolare, mentre il primo ed il terzo non presentano singolarità all'interno dell'intervallo di integrazione. L'integrale singolare può invece essere calcolato se δ è abbastanza piccolo da poter ritenere la funzione $u(x)$ costante nell'intervallo di integrazione. In questo caso è lecito sostituirla con il valore costante $u(x_0)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{u(x_0)[x - x_0]}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx &= u(x_0) \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \log [(x - x_0)^2 + y_0^2] \Big|_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} = \\ &= u(x_0) \left(\frac{1}{2} \log \delta^2 - \frac{1}{2} \log \delta^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Il contributo complessivo della parte singolare all'integrale è quindi nullo, e quindi l'intero integrale è calcolabile, anche se non nel senso classico di Riemann. (Si noti che questo risultato avrebbe potuto essere rapidamente dedotto dal fatto che la funzione integranda è una funzione dispari rispetto ad $(x - x_0)$).

Un integrale calcolato mediante l'isolamento della singolarità con un intervallino simmetrico, all'interno del quale il resto della funzione integranda si assume costante, prende il nome di integrale in parte principale secondo Cauchy, e si indica con la simbologia seguente:

$$\pi v(x_0) = \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx$$

Naturalmente il calcolo esplicito del limite che compare nella seconda espressione per $\pi v(x_0)$ si riduce ad una identità.

Il calcolo ora svolto si può ripetere in modo analogo per l'altra componente della velocità complessa. Si ottengono in questo modo le formule di Hilbert scritte sull'asse reale, che in generale esprimono il legame fra la parte reale e la parte immaginaria di una qualsiasi funzione analitica. In termini di velocità complessa, esse consentono di esprimere la componente u in funzione della v e viceversa:

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{-v(x)}{x - x_0} dx; \quad (7.11a)$$

$$v(x_0) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx \quad (7.11b)$$

7.6 Soluzione per lo spessore

Grazie alle formule di Hilbert (7.11a) e (7.11b), siamo in grado di risolvere senz'altro la parte antisimmetrica del problema dei profili sottili, cioè il problema dello spessore. In questo caso è nota infatti la componente normale della velocità sull'intero asse reale. Utilizzando la formula di Hilbert (7.11a), ed estendendo l'integrale al solo tratto dell'asse reale in cui la funzione integranda non è nulla, si ottiene:

$$u_{sp}(x_0) = \frac{1}{\pi} \oint_0^1 \frac{-v_{sp}(x)}{x - x_0} dx. \quad (7.12)$$

La velocità complessa in tutto il semipiano si calcola invece utilizzando la formula (7.10b):

$$w_{sp}(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{-v_{sp}(x)}{x - z_0} dx.$$

La soluzione nell'altro semipiano si ottiene immediatamente per simmetria.

Si noti che, nonostante l'analogia formale, queste due espressioni hanno un'interpretazione diversa. Infatti il primo è un integrale reale, singolare per $x = x_0$ e calcolabile solo in parte principale secondo Cauchy, mentre il secondo è un integrale di linea nel campo complesso.

7.7 Soluzione per la linea media

Il problema della linea media è di soluzione meno immediata, dal momento che, come nel caso dello spessore, le condizioni al contorno sono assegnate sull'intero asse reale, ma sono di tipo misto. Infatti all'interno del segmento $(0, 1)$ si conosce l'opposto della parte immaginaria della velocità complessa $v = v_{lm}(x)$, mentre all'esterno si conosce la parte reale u , che deve essere nulla. Quando le condizioni sono miste, le formule di Hilbert (7.11) non permettono di arrivare immediatamente alla soluzione; occorre un'operazione preliminare per trasformare il problema in un nuovo problema in cui si conosca la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica di variabile complessa sull'intero asse reale. Questo si ottiene con un metodo, dovuto ancora a Hilbert, che descriviamo nel prossimo paragrafo.

7.7.1 Metodo di Hilbert per condizioni miste

Nella sua formulazione generale il metodo di Hilbert serve a trovare una funzione analitica di variabile complessa quando sull'asse reale se ne conosca ora la parte reale, ora la parte immaginaria, ora una combinazione qualsiasi delle due. In altre parole, si vuole trovare una funzione analitica $w(z)$ conoscendo sull'intero asse reale due funzioni reali $g(x)$ e $\alpha(x)$ tali che:

$$\Re \left[w(x)e^{i\alpha(x)} \right] = g(x).$$

La condizione al contorno consiste dunque nel conoscere su tutto l'asse x la proiezione di w nella direzione α .

Il metodo di Hilbert si basa sull'introduzione di un fattore moltiplicativo reale che riporti il problema ad essere risolvibile mediante le formule di Hilbert (7.11). Si tratta in altre parole di moltiplicare la condizione al contorno per una opportuna funzione reale $A(x)$, in modo tale che il prodotto $A(x)w(x)e^{i\alpha(x)}$ sia una funzione analitica. Si ha quindi:

$$A(x)\Re \left[w(x)e^{i\alpha(x)} \right] = \Re \left[A(x)w(x)e^{i\alpha(x)} \right] = A(x)g(x).$$

Ponendo

$$A(x)e^{i\alpha(x)} = f(x)$$

si ha che sull'asse reale $\Re[wf] = A(x)g(x)$. Inoltre risulta:

$$\log f = \log A(x) + i\alpha(x)$$

Se f è analitica anche $\log f$ è una funzione analitica, e in quanto tale le formule di Hilbert ne forniscono la parte reale in funzione di quella immaginaria, o viceversa.

La procedura per la soluzione è dunque la seguente. Grazie alle condizioni al contorno si conosce sull'intero asse reale $\Im[\log f]$, che vale $\alpha(x)$. Con la formula

di Hilbert (7.11a) si ricava la parte reale di $\log f$, ovvero $\log A(x)$. Inoltre con la formula di Hilbert (7.10b) si trova anche l'intera funzione $f(z)$. Calcolata poi $A(x)$ dal suo logaritmo, e moltiplicata per la funzione nota $g(x)$, si ottiene la funzione $A(x)g(x)$, che è la parte reale della funzione (analitica) $w(z)f(z)$. Una seconda applicazione delle formule di Hilbert consente di determinare l'intera funzione wf . Dividendo il risultato per la funzione nota $f(z)$ si ottiene infine la funzione w cercata.

7.7.2 Metodo di Hilbert applicato al profilo

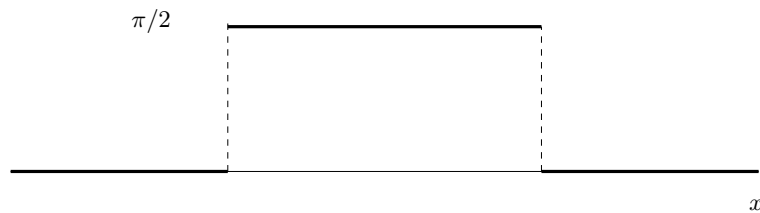


Figura 7.7 Un possibile andamento della funzione $\alpha(x)$ per i profili sottili.

Il problema della linea media di un profilo sottile si risolve utilizzando il metodo di Hilbert che abbiamo appena introdotto. Sull'asse reale si conosce, grazie alle condizioni al contorno illustrate nella figura 7.3, la parte reale della velocità complessa all'esterno del segmento unitario e quella immaginaria all'interno. La funzione $\alpha(x)$, schematizzata in figura 7.7, è quindi costante a tratti, e vale 0 oppure $\pi/2$. Una possibile definizione di $\alpha(x)$ è dunque:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \text{ e } x > 1, \\ \pi/2 & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases} \quad (7.13)$$

Calcolo della funzione ausiliaria Il primo passo del metodo di Hilbert, che consiste nel determinare $\log A(x)$ e quindi $A(x)$, non dipende dal particolare profilo considerato, dal momento che la funzione $\alpha(x)$ dipende solo da quale componente della velocità complessa si conosce sull'asse reale, e non dal suo valore. Dalla (7.11a) si ha che:

$$\begin{aligned} \log A(x_0) &= \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(x)}{x - x_0} dx = \frac{1}{\pi} \oint_0^1 \frac{\pi/2}{x - x_0} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{x_0 - \delta} \frac{dx}{x - x_0} + \int_{x_0 + \delta}^1 \frac{dx}{x - x_0} \right] \end{aligned}$$

in quanto la parte singolare ha integrale nullo. I rimanenti due integrali sono calcolabili, e risulta:

$$\log A(x_0) = \frac{1}{2} \log |x - x_0| \Big|_0^{x_0 - \delta} + \frac{1}{2} \log |x - x_0| \Big|_{x_0 + \delta}^1 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - x_0}{x_0} \right|$$

Basta prendere l'esponenziale di ambo i membri per ottenere:

$$A(x_0) = \sqrt{\left| \frac{1 - x_0}{x_0} \right|}$$

Quando il punto z_0 giace all'interno del piano complesso e non sull'asse reale, con un procedimento analogo si arriva a determinare la funzione $f(z_0)$. Utilizzando la formula di Hilbert (7.10b), si ha:

$$\log f(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(x)}{x - z_0} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x - z_0} = \frac{1}{2} \log (x - z_0) \Big|_0^1$$

e quindi si ottiene subito che:

$$f(z_0) = \frac{1}{2} \log \frac{1 - z_0}{-z_0} = \sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0}}$$

Quando il punto z_0 tende all'asse reale, si verifica facilmente che questa funzione ha modulo uguale ad $A(x_0)$, ed argomento pari ad $\alpha(x_0)$, cioè $\pi/2$ quando x_0 è interno al segmento $(0, 1)$, e zero altrimenti.

Calcolo della velocità complessa Il secondo passo del metodo di Hilbert consiste nel risalire alla velocità complessa $w(z)$ grazie ad una seconda applicazione delle formule di Hilbert. Dopo aver calcolato la funzione ausiliaria f , si conosce infatti sull'asse reale la parte reale della funzione analitica wf , che è nulla all'esterno del segmento $(0, 1)$, mentre all'interno vale:

$$\Re [w\mathcal{F}] = A(x)g(x) = v_{lm}(x) \sqrt{\left| \frac{1 - x}{x} \right|}$$

L'applicazione della formula di Hilbert (7.10a) consente di ottenere l'intera funzione wf :

$$w(z_0)f(z_0) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{x}} \frac{v_{lm}(x)}{x - z_0} dx$$

da cui, dividendo per $f(z_0)$, si ottiene la velocità complessa nel punto generico z_0 :

$$w(z_0) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z_0}{z_0 - 1}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{x}} \frac{v_{lm}(x)}{x - z_0} dx$$

La condizione di Kutta A questo punto, occorre osservare che la soluzione che abbiamo appena trovato è soltanto una delle soluzioni possibili, corrispondente ad una delle molteplici possibili definizioni per la funzione $\alpha(x)$. Per ogni definizione della funzione ausiliaria diversa dalla (7.13) si giunge a trovare una funzione ausiliaria f diversa dalla $f_1(z) = \sqrt{(z-1)/z}$ che abbiamo appena determinato. Ad esempio, considerando $\alpha(x) = -\pi/2$ all'interno del segmento unitario, si otterrebbe la funzione $f_2(z) = \sqrt{z/(z-1)}$; oppure si può supporre che sia $\alpha = \pi$ all'esterno del profilo, trovando in questo caso $f_3(z) = \sqrt{1/[z(z-1)]}$.

Si può mostrare facilmente che tutte le funzioni ausiliarie $f(z)$ possibili al variare della definizione di $\alpha(x)$ sono del tipo $f(z) = (z-1)^{m/2} z^{n/2}$, con m, n interi. All'interno di questo gruppo, bisogna però selezionare solamente le funzioni accettabili per il nostro problema. Occorre anzitutto che il comportamento all'infinito della velocità non venga alterato, e questo richiede che la funzione $f(z)$ abbia limite unitario quando $z \rightarrow \infty$: questa considerazione obbliga a scegliere gli esponenti $m = -n$. Un ulteriore vincolo viene dal fatto di richiedere la funzione con la minima singolarità, che porta a scegliere per $m = -n$ i due valori ± 1 . La soluzione viene infine resa unica, fra le due scelte ancora possibili, grazie alla condizione di Kutta. Essa richiede che la scia si distacchi dal bordo di uscita del profilo posto nel punto $z = 1$. In questo punto quindi la velocità deve mantenersi finita. Perché ciò si verifichi, il fattore $(z-1)$ non può trovarsi al denominatore nell'espressione della velocità complessa. Questo porta a scegliere, fra le varie f possibili, la funzione f_2 . In definitiva:

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}}. \quad (7.14)$$

La soluzione al problema della linea media diviene allora:

$$w_{lm}(z_0) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z_0-1}{z_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-v_{lm}(x)}{x-z_0} dx. \quad (7.15)$$

Sull'asse reale, questa relazione si specializza come:

$$u_{lm}(x_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-v_{lm}(x)}{x-x_0} dx.$$

7.8 Problema inverso

Nel progetto di un profilo aerodinamico ci si trova solitamente di fronte ad un problema inverso. Occorre cioè saper progettare la distribuzione di spessore e la linea media di un profilo, per il quale ad una determinata incidenza è assegnato l'andamento della pressione di carico e quindi del coefficiente di pressione. È possibile risolvere anche il problema inverso grazie alla teoria dei profili sottili, e quindi dividere l'intero problema in una parte simmetrica ed una antisimmetrica.

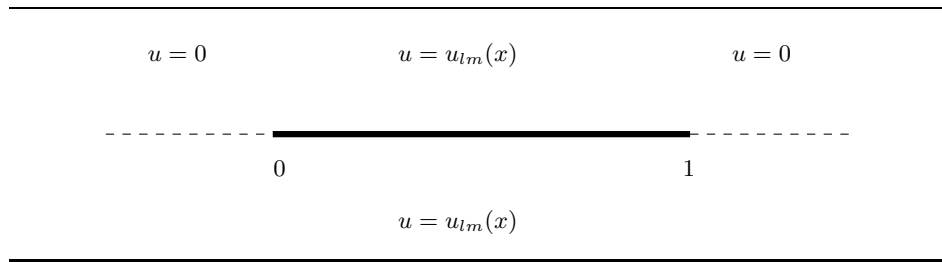


Figura 7.8 Problema inverso dei profili sottili per la linea media.

La linea media Il problema inverso della linea media, schematizzato in figura 7.8, è di soluzione più semplice rispetto al problema diretto. Infatti in campo lineare il coefficiente di pressione è dato dalla relazione (7.8) ed è semplicemente pari a $-2u$. Per il progetto della linea media (che già sappiamo essere l'unica ad influire sulle forze aerodinamiche) si conosce quindi la componente u_{lm} della velocità complessa su tutto l'asse reale. Essa è una funzione dispari rispetto ad y , e quindi sempre nulla sull'asse reale all'esterno del segmento $(0, 1)$. All'interno del segmento unitario invece l'intera differenza di pressione fra dorso e ventre del profilo si ripartisce antisimmetricamente, così che $u_{lm} = -c_{p,lm}/2$ sul dorso e $u_{lm} = +c_{p,lm}/2$ sul ventre. Si tratta allora di risolvere un problema analogo a quello diretto dello spessore, ovvero con condizioni al contorno assegnate su tutto l'asse reale e su una sola componente della velocità complessa. La soluzione del problema inverso della linea media nel semipiano superiore è:

$$w_{lm}^{(i)}(z_0) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{-c_{p,lm}(x)/2}{x - z_0} dx$$

Sull'asse reale la componente $v_{lm}^{(i)}$ è data da

$$v_{lm}^{(i)}(x_0) = \frac{1}{\pi} \oint_0^1 \frac{-c_{p,lm}(x)/2}{x - x_0} dx$$

La forma geometrica $y_{lm}(x)$ della linea media del profilo si ottiene integrando la $v_{lm}(x)$, che ne rappresenta la pendenza locale. La costante di integrazione si fissa arbitrariamente, ponendo ad esempio $y_{lm}(0) = 0$.

Spessore È invece necessario ricorrere al metodo di Hilbert descritto in §7.7.1 per risolvere il problema inverso dello spessore (si veda la figura 7.9). Anche in questo caso si ottiene una soluzione non unica, come conseguenza della non univocità della definizione della funzione $\alpha(x)$. Mentre però nel problema diretto la condizione di Kutta permette di rendere unica la soluzione usando i gradi di libertà sulla definizione di $\alpha(x)$ per soddisfarla, nel problema inverso questo non è possibile. Questo significa che il problema dello spessore ammette soluzione solo per opportune distribuzioni di pressione, tali da garantire un profilo chiuso.

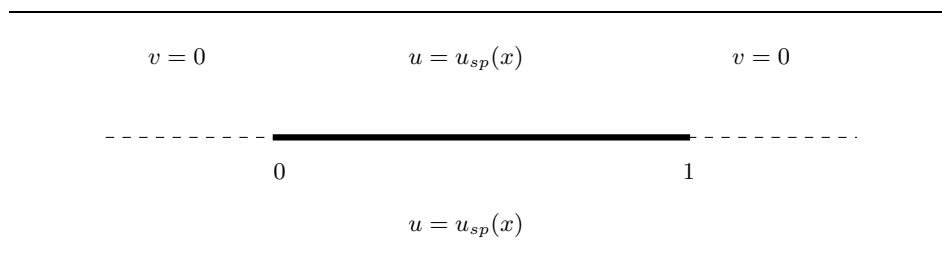


Figura 7.9 Problema inverso dei profili sottili per lo spessore.

Talvolta nel progetto di profili si usa anche un approccio misto, in cui si assegna un andamento di progetto per il c_p su una parte del profilo, ma si assegna la geometria in un'altra parte del profilo.

7.9 Lastra piana

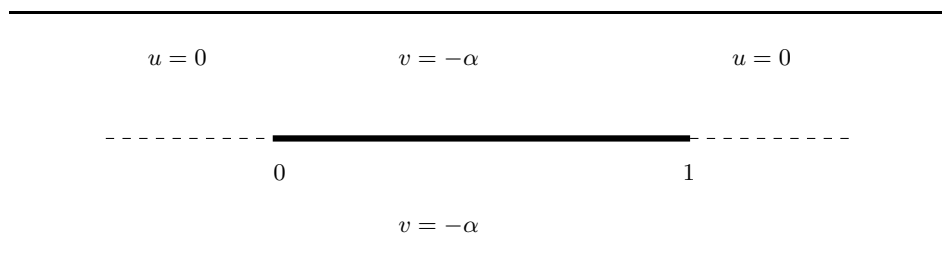


Figura 7.10 Condizioni al contorno per la lastra piana.

Rispetto ad un generico profilo sottile, la lastra piana costituisce un importante caso particolare. Come si vedrà meglio in seguito, l'importanza della lastra piana consiste nel fatto che, grazie alla linearità, la dipendenza dall'incidenza delle azioni aerodinamiche su una lastra è la stessa di quella relativa ad un profilo generico posto alla medesima incidenza. Il profilo potrà quindi essere studiato ad incidenza nulla, valutando una volta per tutte gli effetti dell'incidenza nel caso della lastra piana.

La soluzione per una lastra piana, la cui linea media è rettilinea e con pendenza costante $-\alpha$, si può naturalmente ricavare dalla soluzione generale (7.15) ponendo $v_{lm}(x) = -\alpha$. È però più semplice ottenere lo stesso risultato studiando preliminarmente il comportamento del reciproco della funzione ausiliaria f scelta con la (7.14), ed osservando che a partire da essa può essere facilmente costruita la soluzione cercata.

Il problema della lastra piana può essere schematizzato come in figura 7.10, dove si vede che la parte reale della soluzione è nulla all'esterno del segmento

unitario, mentre all'interno la parte immaginaria $-v$ è eguale all'angolo di incidenza α . Osserviamo ora il comportamento sull'asse reale della funzione $f(z)^{-1}$: essa è reale pura all'esterno del segmento, e immaginaria pura all'interno. All'infinito inoltre $f(z)^{-1}$ ha limite unitario. Per ottenere la velocità complessa cercata, che deve avere parte immaginaria pari ad α sul segmento $(0, 1)$, parte reale nulla all'esterno, e deve tendere a zero all'infinito, è sufficiente moltiplicare per $-i\alpha$ la funzione $f^{-1} - 1$.

Di conseguenza la velocità complessa $w_{lp}(z)$ intorno alla lastra piana è:

$$w_{lp}(z_0) = -i\alpha \left(\sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0}} - 1 \right) \quad (7.16)$$

ed in particolare sul lato superiore si ottiene una velocità $u(x_0)$ data da:

$$u(x_0) = \alpha \sqrt{\frac{1 - x_0}{x_0}}$$

mentre si può verificare che $v(x_0) = -\alpha$, come richiede la condizione al contorno.

(Si noti che la singolarità al bordo di attacco fornisce un contributo finito di pressione, che va rimosso se si vuole ottenere la forza aerodinamica mediante integrazione della pressione stessa lungo un contorno prossimo alla lastra. In caso contrario si vede facilmente che, avendo il versore \mathbf{n} direzione costante, si otterrebbe una forza aerodinamica diretta come \mathbf{n} , e quindi dotata anche di una componente di resistenza.)

7.9.1 Incidenza e linea media

Supponiamo che un profilo ad incidenza nulla sia descritto dall'equazione $y = \epsilon f_0(x) = y_0(x)$. Quando il profilo è posto ad incidenza α , i punti di dorso e ventre sono descritti dall'equazione:

$$y(x) = y_0(x) - \alpha x$$

e quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_0}{dx} - \alpha$$

Introducendo la scomposizione in parte simmetrica e antisimmetrica, si vede che nella parte relativa allo spessore l'incidenza non compare. Le equazioni che forniscono le ordinate del dorso e del ventre del profilo divengono infatti:

$$f_d(x) = y_{lm}(x) - \alpha x + \frac{s(x)}{2}$$

$$f_v(x) = y_{lm}(x) - \alpha x - \frac{s(x)}{2}$$

e le definizioni di v_{sp} e v_{lm} sono:

$$v_{sp}(x) = \frac{1}{2} \frac{dy_{sp}(x)}{dx} = \frac{ds(x)}{dx}$$

$$v_{lm}(x) = \frac{dy_{lm}(x)}{dx} - \alpha$$

Nella soluzione (7.15) del problema della linea media, possiamo allora pensare che $v_{lm}(x)$ si calcoli con la derivata della linea media del profilo posto ad incidenza nulla. Si deve allora aggiungere un secondo addendo proporzionale all'incidenza:

$$w_{lm}(z_0) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-v_{lm}(x)}{x - z_0} dx +$$

$$+ \frac{\alpha}{\pi i} \sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{dx}{x - z_0}$$

Quest'ultimo contributo è sempre lo stesso al variare del profilo, dal momento che non vi compare la forma del profilo stesso. Tutto l'addendo può quindi essere sostituito dalla più semplice velocità complessa (7.16) per la lastra piana:

$$w_{lm}(z_0) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-v_{lm}}{x - z_0} dx - i\alpha \left(\sqrt{\frac{z_0 - 1}{z_0}} - 1 \right) \quad (7.17)$$

7.10 Portanza di un profilo sottile

La teoria linearizzata sviluppata sin qui ci consente ora di calcolare la portanza ed il momento aerodinamico come integrali in cui compare linearmente la forma del profilo. Grazie a quanto abbiamo appena mostrato in §7.9.1, i contributi dell'incidenza e della linea media possono essere determinati separatamente e sommati a posteriori per ottenere le azioni aerodinamiche complessive. La distribuzione di spessore invece non influenza le azioni aerodinamiche.

Esiste, come al solito, la doppia possibilità di integrare gli sforzi normali sul profilo, oppure di calcolare l'integrale del flusso di quantità di moto lungo un percorso chiuso infinitamente lontano dal profilo stesso. Entrambe le strade sono praticabili, dal momento che ormai sono note sia la $u(x)$ sul profilo sia la $w(z)$ nel piano. Esse non sono però equivalenti dal punto di vista della praticità di calcolo. Il primo approccio è già stato descritto in §7.3, e ci ha già permesso di dedurre che la distribuzione di spessore non influisce sulle azioni aerodinamiche. Il secondo approccio è però preferibile per il calcolo effettivo delle azioni stesse, dal momento che evita di dover avere a che fare con la singolarità presente al bordo di attacco.

7.10.1 Contributo dell'incidenza

La portanza dovuta all'incidenza si calcola ricorrendo alla formula di Blasius (6.22), secondo cui le componenti cartesiane della forza aerodinamica sono legate all'integrale complesso del quadrato della velocità complessa. Nella formula di Blasius, occorre evidentemente considerare l'intera velocità complessa, quindi la somma della soluzione del problema di ordine zero in ϵ , sia il contributo aggiuntivo del primo ordine. Inoltre, sempre grazie alla linearità, il contributo dell'incidenza per un profilo qualsiasi coincide con quello della lastra piana. Di conseguenza la velocità complessa da inserire nella formula di Blasius per valutare l'effetto dell'incidenza è $(1 + w_{lp})$, dove 1 è il contributo di ordine zero, e w_{lp} è la soluzione (7.16) per la lastra piana.

Occorre dunque calcolare l'integrale complesso:

$$F_y + iF_x = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} c \oint (1 + w_{lp})^2 dz = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} c \oint (1 + 2w_{lp} + w_{lp}^2) dz$$

su un cammino chiuso molto lontano dalla lastra. L'integrale del termine costante è nullo, ed il termine in w_{lp}^2 risulta trascurabile nell'ambito dell'approssimazione lineare. Quindi, la portanza dovuta all'incidenza si può calcolare come:

$$F_y + iF_x = -\rho V_\infty^2 c \oint w_{lp}(z) dz = \rho V_\infty^2 c i\alpha \oint \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}} - 1 \right) dz$$

Il risultato di questo integrale si ottiene facilmente sfruttando il teorema dei residui. Grazie allo sviluppo binomiale

$$(1 + \epsilon)^a = 1 + a\epsilon - \frac{a^2}{2!}\epsilon^2 + \dots$$

lo sviluppo all'infinito della velocità complessa è:

$$w_{lp}(z) = -i\alpha \left(\left(1 - \frac{1}{z} \right)^{1/2} - 1 \right) = -i\alpha \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} + \dots \right) \quad (7.18)$$

Applicando il teorema dei residui nella versione "nell'intorno dell'infinito" che si riferisce ad un contorno di raggio sufficientemente grande da abbracciare tutte le singolarità dell'integrando, si ottiene il valore dell'integrale come:

$$F_y + iF_x = \rho V_\infty^2 c i\alpha 2\pi i \left(-\frac{1}{2} \right)$$

Il numero complesso $F_y + iF_x$ risulta quindi reale, e questa è una ulteriore conferma che, nelle ipotesi sotto cui ci troviamo, si può avere soltanto una componente portante della forza aerodinamica: ricordiamo infatti che, con questa scelta di assi, la velocità asintotica è allineata con l'asse x . L'espressione:

$$L = \rho V_\infty^2 c \pi \alpha \quad (7.19)$$

va confrontata con l'espressione (6.17) per la portanza di una lastra piana di lunghezza 4, nel caso non linearizzato. Notiamo che ora la portanza risulta direttamente proporzionale all'incidenza, in quanto l'ipotesi di piccoli angoli è fin dall'inizio implicita nel procedimento di linearizzazione.

Il coefficiente di portanza risulta:

$$c_l = \frac{2L}{\rho V_\infty^2 c} = 2\pi\alpha$$

e va confrontato con l'espressione (6.19) ricavata per il coefficiente di portanza della lastra piana con la teoria esatta. Anche qui l'approssimazione di $\sin \alpha$ con α è implicita nell'ipotesi di profilo sottile.

7.10.2 Contributo della linea media

La portanza dovuta alla linea media si valuta, allo stesso modo, utilizzando la formula di Blasius e la soluzione per w_{lm} data dalla (7.15):

$$F_y + iF_x = -\rho V_\infty^2 c \oint \left(\frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z-1}{z}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-v_{lm}(x)}{x-z} dx \right) dz$$

Il risultato dell'integrale si ottiene con il teorema dei residui. Lo sviluppo all'infinito di w_{lm} è:

$$\begin{aligned} w_{lm}(z) &= \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z-1}{z}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-v_{lm}(x)}{x-z} dx = & (7.20) \\ &= \frac{1}{\pi i} \left(1 - \frac{1}{2z} + \dots \right) \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) \frac{1}{z} \left(1 + \frac{x}{z} + \dots \right) dx = \\ &= \frac{1}{\pi i} \left[\frac{1}{z} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) dx + \frac{1}{z^2} \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Il residuo della funzione integranda è il coefficiente di $1/z$ di w_{lm} , cioè:

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) dx$$

Moltiplicando questo residuo per $2\pi i$ la forza aerodinamica, che è un numero reale in quanto pura portanza, diviene dunque:

$$F_y = L = -2\rho V_\infty^2 c \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) dx \quad (7.21)$$

Importanza della linea media Questo contributo alla forza aerodinamica, attraverso la condizione al contorno $v_{lm}(x) = dy_{lm}(x)/dx$, dipende dal particolare profilo, ed in particolare dalla pendenza della sua linea media. Rispetto alla teoria esatta si è ricavata una importante informazione aggiuntiva: nell'integrale (7.21) che esprime il contributo della linea media alla portanza, si vede che la $v_{lm}(x)$ vi appare moltiplicata per un fattore peso $\sqrt{x/(1-x)}$. Questa funzione, il cui andamento è riportato nella figura 7.11, è crescente dal bordo di attacco al bordo di uscita, vale zero al bordo di attacco ed ha un asintoto verticale al bordo di uscita. Ogni modifica locale della pendenza della linea media di un profilo alare fornisce quindi un contributo alla portanza pesato secondo il fattore $\sqrt{x/(1-x)}$, ovvero tanto più rilevante quanto più questa modifica viene applicata in prossimità del bordo di uscita del profilo. Questa è una delle ragioni per cui gli alettoni si trovano tipicamente nella parte posteriore dei profili alari.

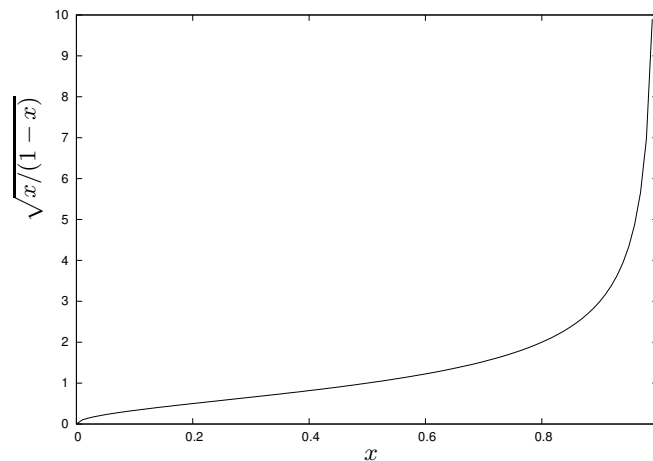


Figura 7.11 Fattore peso per la pendenza locale della linea media nell'integrale (7.21) della portanza.

7.10.3 Angolo di portanza nulla

Combinando gli effetti (7.19) dell'incidenza e (7.21) della linea media, si ottiene per la portanza di un profilo sottile posto ad incidenza α l'espressione complessiva:

$$L = \rho V_{\infty}^2 c \pi \left[\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) dx \right]$$

in cui il primo contributo, quello relativo all'incidenza, è pari a quello della lastra piana, mentre il secondo contributo dipende dalla forma del profilo attraverso

$v_{lm}(x)$. Se ora definiamo angolo di portanza nulla α_0 l'angolo:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) dx$$

otteniamo il risultato che la portanza è direttamente proporzionale all'angolo di incidenza α misurato rispetto alla direzione di portanza nulla (diversa da profilo a profilo). In termini di coefficiente di portanza possiamo scrivere:

$$c_l = 2\pi (\alpha - \alpha_0) \quad (7.22)$$

che va confrontata con il risultato (6.28) della teoria esatta. Il fattore $\sin(\alpha - \alpha_0)$ che compare nella teoria esatta è sostituito da $\alpha - \alpha_0$, che è la sua approssimazione lineare per piccoli angoli.

7.11 Momento di un profilo sottile

Anche per il calcolo del momento aerodinamico, sono praticabili le due strade di integrazione degli sforzi normali sul profilo e di calcolo del flusso di quantità di moto, in variabili complesse e su un contorno molto lontano dal profilo. Il primo approccio ha già permesso di mostrare facilmente che la distribuzione di spessore non produce alcun effetto sul momento aerodinamico. Con il secondo approccio, riusciremo invece a determinare separatamente i contributi dell'incidenza e della linea media.

7.11.1 Contributo dell'incidenza

Anche per il momento aerodinamico l'effetto dell'incidenza per un profilo è il medesimo di quello di una lastra piana posta alla medesima incidenza, grazie alla sovrapposizione degli effetti. Seguendo la formula di Blasius (6.23), occorre calcolare:

$$M_{z,0} = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} c^2 \Re \left[\oint (1 + w_{lp})^2 z dz \right]$$

che fornisce la componente non nulla del momento aerodinamico calcolato rispetto al polo $z = 0$, ed in cui $w_{lp}(z)$ è la velocità complessa (7.16) per la lastra piana. Dopo aver linearizzato e notato che il termine costante ha integrale nullo, si arriva a:

$$M_{z,0} = -\rho V_\infty^2 c^2 \Re \left[\oint w_{lp} z dz \right]$$

Grazie al teorema dei residui, il risultato dell'integrale è pari a $2\pi i$ volte il coefficiente di $1/z^2$ nello sviluppo all'infinito (7.18) di w_{lp} , che vale $1/8 i\alpha$. Quindi il momento è:

$$M_{z,0} = -\rho V_\infty^2 c^2 \Re \left[2\pi i \frac{1}{8} i\alpha \right] = \rho \frac{V_\infty^2}{2} c^2 \frac{\pi}{2} \alpha.$$

Il coefficiente adimensionale per il momento rispetto all'origine vale:

$$c_{m,0} = \frac{\pi}{2}\alpha = \frac{c_l}{4}.$$

Il momento aerodinamico rispetto ad un generico polo x_0 si ottiene a partire dal momento calcolato rispetto all'origine mediante la formula generale di trasporto:

$$M_{z,x_0} = M_{z,0} + (0 - x_0)L$$

Tenendo conto dell'espressione ora ricavata per $M_{z,0}$ e della formula (7.19) per la portanza L nel caso di lastra piana, si ha:

$$M_{z,x_0} = \rho \frac{V_\infty^2}{2} c^2 \frac{\pi}{2} \alpha + (0 - x_0) \rho V_\infty^2 c \pi \alpha$$

Centro aerodinamico Come già sappiamo dalla teoria esatta discussa in §??, esiste una particolare scelta del polo x_0 per cui il momento aerodinamico per una lastra piana è costante al variare dell'incidenza. In particolare questo valore costante deve essere nullo, come si deduce considerando la simmetria della distribuzione di pressione che si ha ad incidenza nulla. Questo polo è il centro aerodinamico, non solo per la lastra piana ma per tutti i profili sottili, per i quali il momento calcolato rispetto al centro aerodinamico non è necessariamente nullo, ma non varia con l'incidenza.

Per determinare la posizione del centro aerodinamico, basta eguagliare a zero l'espressione di M_{z,x_0} , ottenendo:

$$\rho V_\infty^2 c \pi \left(\frac{c}{4} - x_0 \right) \alpha = 0$$

Il momento aerodinamico per una lastra piana posta ad incidenza è quindi nullo (in modo indipendente dall'incidenza) quando calcolato rispetto al polo

$$x_0 = c/4$$

cioè un polo posto al 25% della corda. Per la sovrapposizione degli effetti, il momento aerodinamico calcolato rispetto al quarto anteriore della corda di un qualsiasi profilo sottile è indipendente dall'angolo di incidenza.

7.11.2 Contributo della linea media

Anche in questo caso si utilizza la formula di Blasius (6.23), in cui la velocità complessa è la soluzione (7.15) per il contributo della linea media. Il calcolo dell'integrale:

$$M_{z,0} = -\rho V_\infty^2 c^2 \Re \left[\oint w_{lm} z dz \right]$$

si effettua agevolmente con il teorema dei residui, determinando il coefficiente di $1/z^2$ dello sviluppo all'infinito di w_{lm} . Abbiamo già calcolato questo sviluppo, e dalla (7.20) si vede che il coefficiente di $1/z^2$ è:

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

e permette di scrivere il momento, sempre calcolato rispetto all'origine degli assi, come:

$$M_{z,0} = -2\rho V_\infty^2 c^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

Il coefficiente adimensionale di momento vale:

$$c_m = -4 \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

Il trasporto del momento nel centro aerodinamico consente di ottenere un'espressione indipendente dall'incidenza. Sfruttando il risultato ottenuto per la lastra piana, per cui già sappiamo che il centro aerodinamico è posizionato al quarto anteriore della corda, e l'espressione (7.21) per la portanza, si ha:

$$M_{ac} = M_{z,0} - \left(0 - \frac{c}{4}\right) 2\rho V_\infty^2 c \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} v_{lm}(x) dx$$

Ne segue che il momento rispetto al centro aerodinamico è:

$$M_{ac} = -2\rho V_\infty^2 c^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \left(x - \frac{3}{4}\right) v_{lm}(x) dx$$

Per un profilo sottile quindi il momento aerodinamico calcolato rispetto al centro aerodinamico (posizionato al quarto anteriore della corda) non è nullo, ma costante al variare dell'incidenza. Il valore di questa costante si calcola a partire dalla forma geometrica del profilo.

7.12 Angolo di Theodorsen

La velocità sul profilo, soluzione del problema della linea media e data dalla formula (7.17), è proporzionale al fattore $\sqrt{(z_0 - 1)/z_0}$, e quindi non è singolare al bordo di uscita, perché abbiamo utilizzato la condizione di Kutta e scelto conseguentemente la funzione $f(z)$ in modo da rimuovere l'infinito per $z_0 = 1$. Esiste invece una singolarità in corrispondenza del bordo di attacco, cioè in $z_0 = 0$.

Ma il fattore che moltiplica l'infinito al bordo di attacco dipende dall'incidenza, ed esiste un particolare valore di α in corrispondenza del quale la velocità

complessa non è singolare anche al bordo d'attacco. Cerchiamo allora per quale valore di α risulta:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{-dy_0/dx + \alpha}{x} dx = 0$$

Questo particolare angolo di incidenza si dice angolo di Theodorsen, e lo indichiamo con α_{Th} . L'angolo di Theodorsen si chiama anche angolo di progetto, o angolo di incidenza ideale.

Si può ricavare allora l'angolo di Theodorsen come:

$$\alpha_{Th} = \frac{\int_0^1 \frac{dy_0/dx}{\sqrt{x(1-x)}} dx}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}$$

L'integrale a denominatore non dipende dal profilo, può essere calcolato una volta per tutte e vale esattamente π . Quindi:

$$\alpha_{Th} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy_0/dx}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Significato dell'angolo di Theodorsen L'angolo di Theodorsen costituisce una media dell'inclinazione della linea media, pesata attraverso un fattore peso simmetrico rispetto allo scambio di x con $1-x$. Si tratta quindi di una specie di incidenza media del profilo, ma diversa dall'angolo di portanza nulla, nella quale compare un fattore peso diverso.

Da un punto di vista fisico una velocità infinita al bordo di attacco non è realistica; d'altro canto il bordo di attacco di un profilo subsonico è arrotondato, e la velocità è quindi finita. L'infinito previsto dalla teoria linearizzata significa che la velocità per un fluido reale assume sul bordo di attacco, arrotondato ma con valori molto piccoli del raggio di curvatura, dei valori molto elevati. Questo picco di velocità nella regione anteriore del profilo comporta certamente dei problemi di separazione dello strato limite nella parte posteriore, dove la corrente deve necessariamente rallentare, tanto più bruscamente quanto più elevata è la sovravelocità nella parte anteriore.

Un profilo dotato di buon comportamento aerodinamico deve produrre una scia sottile e di conseguenza una resistenza aerodinamica ridotta, e quindi deve evitare questa situazione. L'angolo di Theodorsen (che non a caso si chiama anche angolo di incidenza ideale) è quel particolare angolo di incidenza, diverso per ogni profilo, in cui il profilo stesso si trova a lavorare più vicino alle condizioni ideali, ed in cui il picco di velocità presente al bordo di attacco è ridotto. In effetti si può vedere che l'angolo di Theodorsen costituisce un'ottima stima dell'angolo di resistenza minima di un profilo, che si determina considerando necessariamente gli effetti della viscosità.

