

6

L'equazione di Laplace e le variabili complesse

Le variabili complesse costituiscono un potente strumento per la soluzione dell'equazione di Laplace, trasformando un problema dipendente da due variabili indipendenti in un problema che dipende da una sola variabile. Hanno però il limite significativo di essere applicabili solo a problemi bidimensionali.

Grazie alla tecnica delle trasformazioni conformi, la soluzione esatta del moto intorno ad un cerchio può essere trasformata in quella relativa ad un corpo di forma qualsiasi.

Indice del capitolo

6.1	Potenziale complesso	106
6.1.1	Potenziale complesso delle correnti elementari	107
6.1.2	Principio delle immagini	109
6.2	Trasformazioni conformi	109
6.2.1	Significato geometrico delle trasformazioni conformi	110
6.2.2	XXX Trasformazione del contorno e della soluzione	111
6.2.3	Non unicità delle trasformazioni conformi	112
6.3	Alcune semplici trasformazioni	113
6.3.1	Applicazione: corrente sullo spigolo	115
6.3.2	Applicazione: corrente che investe una parete	116
6.4	Formula di Schwarz per il cerchio	117
6.5	Corrente traslocircolatoria intorno al cerchio	120
6.6	Condizione di Kutta	122
6.7	Lastra piana ad incidenza	124
6.7.1	La portanza	126
6.8	Formule di Blasius per le azioni aerodinamiche	127
6.8.1	Forza aerodinamica	128
6.8.2	Momento aerodinamico	130
6.9	Forza aerodinamica su un profilo	131

6.10	Momento aerodinamico su un profilo	134
6.10.1	Centro aerodinamico	135
6.11	Trasformazione di Schwarz–Christoffel	136
6.12	Profili di Joukowski	139
6.13	Profili di Karman–Trefftz	142
6.14	Algoritmo di Theodorsen per i profili alari	144
6.15	Teoria delle <i>free streamlines</i>	147

6.1 Potenziale complesso

Abbiamo già descritto in §4.1.2 come il problema aerodinamico, sotto le opportune ipotesi, si riduce alla soluzione di un'equazione di Laplace in cui la funzione incognita può essere equivalentemente il potenziale cinetico φ o la funzione di corrente ψ . Abbiamo anche visto che fra le funzioni φ e ψ intercorrono le relazioni (4.5), che discendono direttamente dal legame fra le funzioni φ e ψ e le componenti cartesiane u e v del vettore velocità. Le funzioni φ e ψ non sono dunque indipendenti, come è evidente se si pensa al loro significato fisico: se il potenziale cinetico descrive compiutamente il moto, anche la funzione di corrente ne risulta individuata.

Le condizioni (4.5) che legano φ e ψ alle componenti cartesiane della velocità sono equivalenti alle condizioni di Cauchy-Riemann (A.1), che nell'Appendice A abbiamo visto legare fra loro la parte reale $\xi(x, y)$ e la parte immaginaria $\eta(x, y)$ di una generica funzione analitica della variabile complessa $z = x + iy$. Anche ξ ed η non sono funzioni indipendenti, e le abbiamo denominate funzioni coniugate.

Introduciamo allora una funzione $\mathcal{F}(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$, la cui parte reale è il potenziale cinetico e la cui parte immaginaria è la funzione di corrente:

$$\mathcal{F}(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Alla funzione $\mathcal{F}(z)$ diamo il nome di potenziale complesso. Per l'equivalenza fra le (4.5) e le (A.1), le condizioni che garantiscono che φ e ψ sono funzioni a un sol valore della posizione garantiscono anche che $\mathcal{F}(z)$ è una funzione analitica. Al contrario, data una qualsiasi funzione analitica, la sua parte reale è il potenziale cinetico, e la sua parte immaginaria è la funzione di corrente di un possibile moto bidimensionale e irrotazionale di fluido non viscoso e incomprimibile.

La velocità complessa La derivata rispetto alla variabile complessa z del potenziale complesso $\mathcal{F}(z)$ è anch'essa una funzione analitica, che chiamiamo velocità complessa ed indichiamo con $w(z)$:

$$w(z) = \frac{d\mathcal{F}(z)}{dz}$$

Si verifica facilmente che la parte reale di $w(z)$ è pari alla componente x della velocità, mentre la parte immaginaria è opposta alla componente y , come mostrato

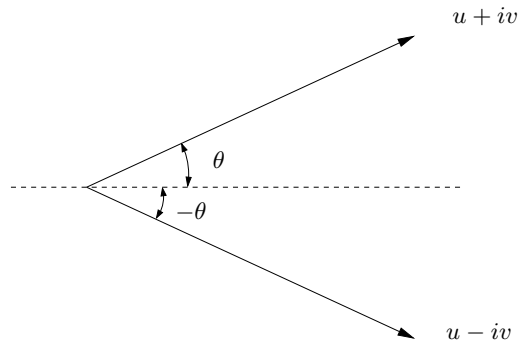


Figura 6.1 Definizione della velocità complessa $w(z)$: la parte immaginaria è opposta alla componente y del vettore velocità.

in figura 6.1. Se calcoliamo la derivata come limite del rapporto incrementale, scegliendo in particolare un incremento $\Delta z = \Delta x$ reale, si ha infatti

$$\frac{d\mathcal{F}(z)}{dz} = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} = u(x, y) - iv(x, y)$$

e dal momento che il potenziale complesso è una funzione analitica, il valore della derivata è lo stesso indipendentemente dall'argomento di Δz . Il medesimo risultato si ottiene infatti, per esempio, scegliendo $\Delta z = i\Delta y$. La velocità complessa in notazione cartesiana o esponenziale è legata quindi alle componenti cartesiane e al modulo e direzione del vettore velocità nel modo seguente:

$$w(z) = u - iv = Ve^{-i\theta}.$$

In particolare è interessante notare che il quadrato V^2 del modulo del vettore velocità in un punto è pari al quadrato del modulo della velocità complessa in quel punto, che si calcola anche come il prodotto della velocità complessa per il suo complesso coniugato:

$$V^2 = |w|^2 = \frac{d\mathcal{F}}{dz} \left(\frac{d\mathcal{F}}{dz} \right)^*.$$

6.1.1 Potenziale complesso delle correnti elementari

Le correnti elementari descritte in §5.3 separatamente in termini di potenziale cinetico e di funzione di corrente si possono descrivere più sinteticamente grazie al potenziale complesso.

Corrente uniforme Il potenziale complesso

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{W}_\infty z$$

in cui \mathcal{W}_∞ è una costante complessa, descrive compiutamente una corrente uniforme. La velocità complessa è ovunque costante e pari a

$$w(z) = \mathcal{W}_\infty$$

Ponendo

$$\mathcal{W}_\infty = V_\infty e^{-i\alpha} \quad (6.1)$$

in cui V_∞ è il modulo e $-\alpha$ l'argomento del numero complesso \mathcal{W}_∞ , si vede che questo potenziale complesso descrive la corrente uniforme di modulo V_∞ e parallela ad una parete piana indefinita inclinata di un angolo α rispetto all'asse x . La parte reale e la parte immaginaria del potenziale complesso coincidono con le (5.10a) e (5.10b) relative a potenziale cinetico e funzione di corrente della corrente uniforme.

Sorgente Se a è una costante reale, il potenziale complesso di una sorgente puntiforme posta nell'origine del piano z è:

$$\mathcal{F}(z) = a \log z.$$

La sua parte reale è $a \log r$ e la sua parte immaginaria $-a\theta$: ritroviamo quindi il potenziale (5.11a) e la funzione di corrente (5.11b) della sorgente discussi in §5.3. La funzione di corrente non è ad un sol valore, perché nell'origine non vale l'ipotesi di incomprimibilità. Il suo valore cambia dopo ogni giro intorno all'origine di una quantità legata alla portata che fuoriesce dalla sorgente stessa.

La velocità complessa della sorgente è

$$w(z) = \frac{a}{z}$$

ed il suo modulo diminuisce con la distanza dalla sorgente con un andamento proporzionale a r^{-1} .

Il vortice Se a è una costante reale, il potenziale complesso di un vortice puntiforme posto nell'origine del piano z è:

$$\mathcal{F}(z) = ia \log z.$$

La sua parte reale è $-a\theta$ e la sua parte immaginaria $a \log r$: ritroviamo quindi il potenziale (5.12a) e la funzione di corrente (5.12b) del vortice discussi in §5.3. Il potenziale, che non è ad un sol valore perché nell'origine non vale l'ipotesi di irrotazionalità, cambia dopo ogni giro intorno all'origine di una quantità legata all'intensità del vortice.

La doppietta Il potenziale complesso di una doppietta si scrive in variabile complessa come:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\mu e^{i\alpha}}{z}$$

in cui μ ed α sono costanti reali, e rappresentano rispettivamente l'intensità della doppietta e l'inclinazione del suo asse. Le sue parti reale e immaginaria coincidono con le (5.13a) e (5.13b) nel caso di doppietta allineata con l'asse x , cioè con $\alpha = 0$.

La velocità complessa per la doppietta è

$$w(z) = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{z^2}$$

ed il suo modulo decresce con la distanza dalla doppietta con un andamento $\sim r^{-2}$.

6.1.2 Principio delle immagini

Il principio delle immagini introdotto in §5.4 può essere formulato sinteticamente anche in termini della variabile complessa, almeno per i problemi bidimensionali. Esso si esprime dicendo che se $\mathcal{F}(z)$ è una funzione analitica, allora anche la sua immagine \mathcal{F}' così definita:

$$\mathcal{F}'(z) = \mathcal{F}^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \quad (6.2)$$

è una funzione analitica. Notando che

$$\frac{1}{z^*} = \frac{1}{r} e^{i\theta}$$

si verifica facilmente infatti che, se $\mathcal{F}(z) = \varphi + i\psi$, si ha:

$$\mathcal{F}^* \left(\frac{1}{z^*} \right) = \varphi \left(\frac{1}{r}, \theta \right) - i\psi \left(\frac{1}{r}, \theta \right)$$

e quindi sia la parte reale che la parte immaginaria separatamente sono soluzioni dell'equazione di Laplace ricavate con il metodo delle immagini descritta in §5.4 per le variabili reali. Con la variabile complessa si ottiene un'informazione aggiuntiva che riguarda la parte immaginaria di \mathcal{F} .

6.2 Trasformazioni conformi

Consideriamo una funzione di variabile complessa $z = z(\mathcal{Z})$, che fa corrispondere valori della variabile complessa $z = x + iy$ a valori della variabile complessa

$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$. Rappresentando i valori di z e \mathcal{Z} come punti in due piani complessi, alla funzione $z(\mathcal{Z})$ si può dare una interpretazione geometrica, dal momento che essa trasforma punti del piano \mathcal{Z} in punti del piano z , e quindi contorni in \mathcal{Z} in altri contorni in z .

Ci interessiamo in particolare a quelle trasformazioni che sono descritte da una funzione $z = z(\mathcal{Z})$ analitica. Trasformazioni di questo tipo si chiamano trasformazioni conformi.

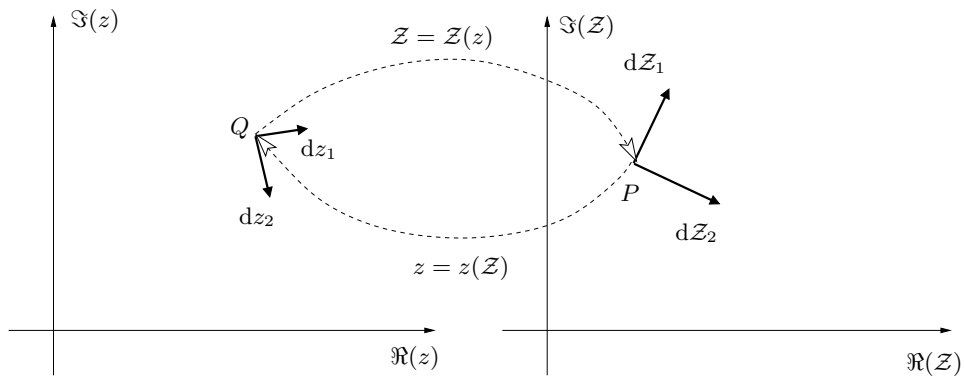


Figura 6.2 Trasformazione conforme di segmenti infinitesimi dal piano \mathcal{Z} al piano z (e viceversa).

6.2.1 Significato geometrico delle trasformazioni conformi

È importante conoscere le proprietà geometriche di una funzione analitica di variabile complessa $z = z(\mathcal{Z})$. Essa trasforma (si veda la figura 6.2) un segmento infinitesimo $d\mathcal{Z}_1$ spiccato da un punto P del piano complesso \mathcal{Z} nel segmento infinitesimo dz_1 spiccato dal punto Q del piano z che corrisponde a P secondo la trasformazione $z(\mathcal{Z})$. I due segmentini sono legati fra loro dalla derivata della trasformazione:

$$dz_1 = \frac{dz}{d\mathcal{Z}} d\mathcal{Z}_1$$

Per mettere in evidenza il significato geometrico di questa trasformazione, poniamo $dz = dle^{i\theta}$ e $d\mathcal{Z} = dLe^{i\phi}$; la derivata $dz/d\mathcal{Z}$, nei punti in cui non si annulla, è un numero complesso rappresentabile con Ae^{ib} , dove A e b sono numeri reali. La relazione fra i differenziali diviene

$$dle^{i\theta} = Ae^{ib} dLe^{i\phi}$$

Il modulo del segmento infinitesimo $d\mathcal{Z}_1$ si trasforma quindi secondo la relazione

$$|dz_1| = dl_1 = AdL_1 = A|d\mathcal{Z}_1|$$

mentre la formula che lega gli argomenti dei due segmenti infinitesimi è

$$\arg(dz_1) = \theta = \phi + b = \arg(dZ_1) + b$$

Consideriamo ora due diversi segmenti infinitesimi dZ_1 e dZ_2 , spiccati dallo stesso punto Q del piano Z . Come abbiamo accennato nell'Appendice §A, se la funzione $z = z(Z)$ è analitica la derivata dz/dZ calcolata nel punto P non dipende dalla direzione con cui si valuta il limite del rapporto incrementale, e quindi il numero complesso Ae^{ib} è lo stesso per dZ_1 e dZ_2 . Nella trasformazione di coordinate dunque il fattore A con cui localmente variano le lunghezze non dipende dall'angolo ϕ .

Considerando poi le direzioni dei due segmenti infinitesimi nel piano Z , l'angolo fra di esse è uguale all'angolo fra le direzioni dei due corrispondenti segmenti infinitesimi nel piano z , dal momento che entrambe le direzioni cambiano dello stesso fattore b :

$$\theta_1 - \theta_2 = \phi_1 - \phi_2$$

Una trasformazione conforme gode quindi della proprietà di conservare localmente gli angoli e il rapporto fra le lunghezze. In piccolo le forme geometriche non vengono alterate nel passaggio fra i due piani, mentre ovviamente in grande le forme cambiano, dal momento che la derivata della trasformazione varia da punto a punto.

Nei punti in cui tale derivata si annulla o diventa infinita, la trasformazione può non essere conforme: punti di questo tipo sono punti singolari della trasformazione. Avremo a che fare con punti singolari tutte le volte che vorremo trattare corpi dotati di spigoli.

6.2.2 XXX Trasformazione del contorno e della soluzione

Supponiamo di conoscere esplicitamente la funzione $z = z(Z)$ che trasforma il contorno di un corpo, disegnato nel piano Z (per esempio un contorno di geometria semplice, come un cerchio o un semipiano), nel contorno di un altro corpo nel piano z (tipicamente di forma più complicata, per esempio un profilo alare). La medesima funzione $z = z(Z)$ trasforma anche l'esterno del primo contorno nell'esterno (o nell'interno) del secondo. Se conosciamo il potenziale complesso $\mathcal{F}(Z)$ che descrive il moto intorno al corpo di geometria semplice, ci interessa determinare il suo legame con il potenziale complesso del moto intorno al profilo.

La trasformazione $z = z(Z)$ è una funzione analitica che può essere invertita e composta con la funzione analitica $\mathcal{F}(Z)$ per ottenere una nuova funzione analitica $\mathcal{F}(Z(z))$. Si può dimostrare questa nuova funzione analitica ha come parte reale il potenziale cinetico e come parte immaginaria la funzione di corrente del moto intorno al profilo, grazie al fatto che la trasformazione $z = z(Z)$ è una trasformazione conforme.

Anche la velocità complessa $w(z)$ nel piano z è legata alla velocità complessa $\mathcal{W}(Z)$ nel piano Z attraverso la trasformazione:

$$w(z) = \frac{d\mathcal{F}}{dz} = \frac{d\mathcal{F}}{dZ} \frac{dZ(z)}{dz} = \mathcal{W}(Z) \frac{dZ(z)}{dz} \quad (6.3a)$$

Si può anche evitare di invertire la trasformazione $z = z(\mathcal{Z})$ e valutare la velocità complessa w rimanendo nel piano \mathcal{Z} , come

$$w(z(\mathcal{Z})) = \frac{\mathcal{W}(\mathcal{Z})}{dz(\mathcal{Z})/d\mathcal{Z}}. \quad (6.3b)$$

XXX Trasformazione delle singolarità Batchelor p.415 XXX

Integrale di linea della velocità complessa L'integrale di linea della velocità intorno ad un cammino chiuso fornisce la circolazione della velocità. Quando invece della velocità calcoliamo l'integrale della velocità complessa lungo un qualsiasi cammino chiuso, si può mostrare che risulta

$$\oint \mathcal{W}(\mathcal{Z}) d\mathcal{Z} = \Gamma + iQ \quad (6.4)$$

in cui Γ è la circolazione della velocità e Q la portata complessivamente uscente dal contorno lungo il quale si calcola l'integrale.

6.2.3 Non unicità delle trasformazioni conformi

È possibile far vedere che si può sempre trasformare conformemente un contorno qualsiasi in un altro contorno qualsiasi, trasformando contestualmente anche il potenziale complesso che descrive il moto all'interno (esterno) del primo nel potenziale complesso che descrive il moto all'interno (esterno) del secondo. Una trasformazione di questo tipo non è univoca, e dispone di tre costanti reali libere.

Dal momento che il nostro interesse si concentra sui problemi esterni, conviene usare questi tre gradi di libertà per rendere più facile l'applicazione delle condizioni all'infinito. Consideriamo una trasformazione generica $z = z(\mathcal{Z})$ con cui intendiamo trasformare una geometria semplice nel piano \mathcal{Z} in una geometria più complicata nel piano z . Una prima utile caratteristica di questa trasformazione è che i punti all'infinito siano coincidenti, ovvero:

$$\lim_{\mathcal{Z} \rightarrow \infty} \frac{z(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}} = 1$$

e questa condizione richiede l'utilizzo di due gradi di libertà. Infatti la coincidenza di due punti, al finito o all'infinito, nel piano complesso richiede che siano uguali sia la parte reale sia la parte immaginaria dei numeri complessi che li rappresentano.

È inoltre comodo in pratica avere a che fare con velocità coincidenti all'infinito; questo implica che deve essere anche

$$\lim_{\mathcal{Z} \rightarrow \infty} \frac{dz(\mathcal{Z})}{d\mathcal{Z}} = 1.$$

L'imposizione di questa condizione richiede due ulteriori gradi di libertà. Di conseguenza, volendo imporre entrambe le condizioni all'infinito è necessario introdurre un grado di libertà aggiuntivo nella trasformazione, ad esempio lasciando libero un fattore di scala. Nel caso di trasformazioni determinate numericamente, ci si può anche limitare ad imporre all'infinito che la derivata della trasformazione sia costante ma non unitaria.

6.3 Alcune semplici trasformazioni

Esaminiamo nel seguito alcuni semplici trasformazioni descrivibili per via analitica, mettendone in evidenza il loro significato geometrico.

Funzioni razionali fratte La funzione

$$z = a + b\mathcal{Z}$$

dove a e b sono numeri complessi, rappresenta la combinazione di una traslazione di a con una rotazione di $\arg(b)$ unita ad un ingrandimento di $|b|$, ed essendo ovunque analitica mantiene intatta la forma (ma non le dimensioni né l'orientamento) di un contorno generico del piano \mathcal{Z} .

La funzione

$$z = 1/\mathcal{Z}$$

che si scrive in notazione polare come

$$re^{i\theta} = \frac{1}{\mathcal{R}}e^{-i\phi}$$

determina un cambio di segno degli angoli, ed è capace di trasformare l'interno di un cerchio nell'esterno. Ha inoltre la proprietà di trasformare cerchi in cerchi (considerando anche la possibilità di rette come cerchi degeneri di raggio infinito), che è evidente per cerchi centrati nell'origine, ma si può dimostrare anche per cerchi qualsiasi. La trasformazione $z = 1/\mathcal{Z}$ è quindi la trasformazione che permette di passare da problemi interni a problemi esterni, porta l'infinito nell'origine e prende il nome di inversione.

La più generale trasformazione lineare fratta:

$$z = \frac{a + b\mathcal{Z}}{c + d\mathcal{Z}}$$

è una combinazione delle trasformazioni elementari precedenti, e quindi anch'essa trasforma ogni cerchio del piano \mathcal{Z} in un cerchio del piano z (considerando le rette come cerchi degeneri).

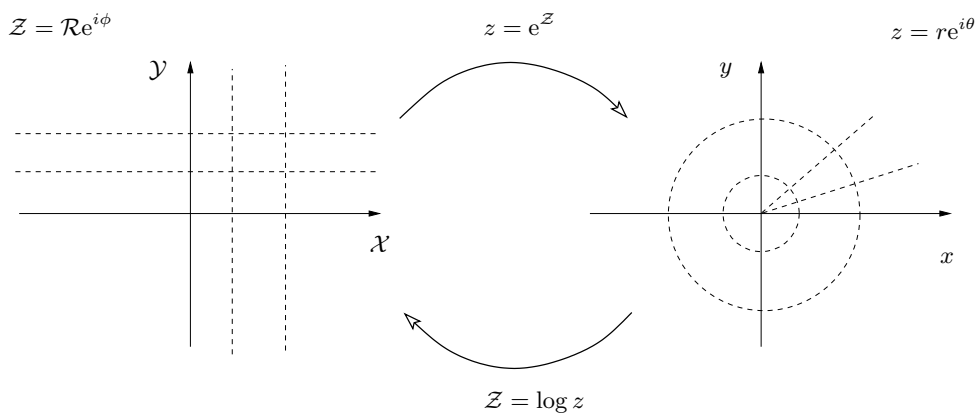


Figura 6.3 Le trasformazioni logaritmica ed esponenziale.

Logaritmo ed esponenziale Un'altra interessante trasformazione è rappresentata dalla funzione esponenziale $z = e^Z$, che si può anche scrivere, separando modulo e argomento, come

$$r = e^{\mathcal{X}}; \quad \theta = \mathcal{Y}$$

Essa (rappresentata in figura 6.3 insieme alla sua inversa) trasforma linee ad $\mathcal{Y} = \text{cost}$ del piano Z in linee a $\theta = \text{cost}$ (cioè raggi) nel piano z , mentre a linee ad $\mathcal{X} = \text{cost}$ corrispondono linee ad $r = \text{cost}$ (cioè circonferenze). Una striscia verticale nel piano Z si trasforma quindi una corona circolare in z , ed il semipiano $\mathcal{X} \geq 0$ diviene l'esterno della circonferenza unitaria in z ; una striscia orizzontale nel piano Z corrisponde invece ad un settore angolare nel piano z . L'esponenziale $e^{i\phi}$ riassume il medesimo valore dopo un giro di 2π attorno all'origine; la corrispondenza fra i punti dei due piani quindi non è biunivoca, perché ogni striscia orizzontale nel piano Z corrisponde all'intero piano z .

Di conseguenza la trasformazione inversa dell'esponenziale, cioè la trasformazione logaritmica $Z = \log z$, che in parte reale e immaginaria si scrive

$$\mathcal{X} = \log r; \quad \mathcal{Y} = \theta$$

è una funzione polidroma (cioè a più valori), dal momento che ogni punto del piano z corrisponde ad un'infinità di punti del piano Z , tutti alla stessa ascissa ma con ordinate che differiscono per multipli interi, positivi o negativi, di 2π .

L'elevamento a potenza La funzione di elevamento a potenza $z = Z^a$ nel campo complesso si definisce necessariamente, quando l'esponente a è reale, attraverso la funzione logaritmica, cioè:

$$z = Z^a = e^{a \log Z}.$$

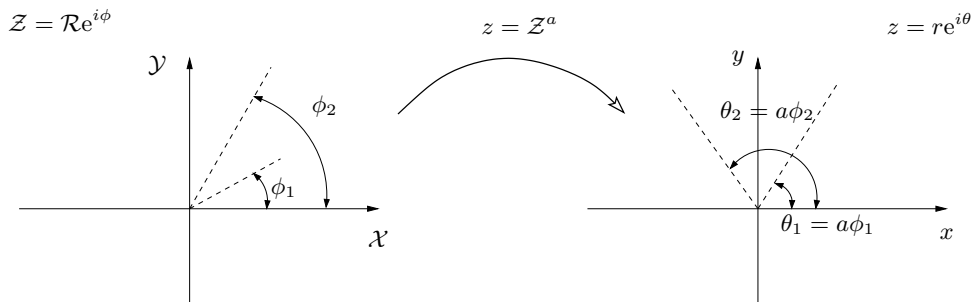


Figura 6.4 L'elevamento a potenza trasforma fra loro settori diversi del piano complesso.

Il modulo e l'argomento sono dati da

$$r = \mathcal{R}^a; \quad \theta = a\phi.$$

Quando a non è intero, l'elevamento a potenza presenta anch'esso, come la funzione logaritmica, un problema di polidromia. Fatta questa riserva, la trasformazione di elevamento a potenza (figura 6.4) eleva alla potenza a il modulo, e moltiplica per un fattore a gli angoli misurati dall'origine (che è un punto in cui la trasformazione non è conforme). L'elevamento a potenza è allora la funzione che permette di trasformare fra loro settori diversi del piano, ed in particolare l'intero semipiano ad $\mathcal{Y} \geq 0$ (un settore di ampiezza π) in un settore di ampiezza $a\pi$.

6.3.1 Applicazione: corrente sullo spigolo

La trasformazione con elevamento a potenza permette di risolvere il problema del flusso attorno ad uno spigolo. Consideriamo infatti una parete piana, per esempio la linea $\mathcal{Y} = 0$ del piano complesso \mathcal{Z} ; il potenziale complesso $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ di una corrente uniforme di intensità V_∞ parallela alla parete e diretta nel verso positivo dell'asse \mathcal{X} è $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = V_\infty \mathcal{Z}$, e la relativa velocità complessa (tutta reale per la particolare scelta della direzione della velocità asintotica) è $\mathcal{W}(\mathcal{Z}) = V_\infty$.

Il potenziale complesso $\mathcal{F}(z)$ della corrente intorno ad uno spigolo di ampiezza β si ottiene da questa soluzione attraverso la trasformazione di elevamento a potenza

$$z = \mathcal{Z}^{\beta/\pi}$$

e risulta

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}(z)) = V_\infty z^{\pi/\beta} \tag{6.5}$$

La parete piana (cioè un settore angolare di ampiezza π) si trasforma così nel settore angolare di ampiezza β . La velocità complessa si calcola immediatamente

derivando il potenziale complesso e risulta:

$$w(z) = \frac{d\mathcal{F}(z)}{dz} = V_\infty \frac{\pi}{\beta} z^{\pi/\beta-1}$$

Il suo modulo vale

$$|w(z)| = V = V_\infty \frac{\pi}{\beta} r^{\pi/\beta-1}$$

La soluzione è singolare nello spigolo, che è un punto dove la trasformazione non è conforme. La velocità si annulla nello spigolo quando $\pi/\beta - 1 > 0$, cioè $\beta < \pi$: questo caso corrisponde al flusso intorno ad uno spigolo concavo, come mostra la figura 6.5 a sinistra. La velocità risulta invece infinita nello spigolo quando $\beta > \pi$, ovvero nel caso di spigolo convesso (figura 6.5 a destra). Da un punto di vista fisico, la viscosità farà in modo che la corrente reale si comporti diversamente. In particolare, per lo spigolo convesso si avrà una separazione sullo spigolo. Nello spigolo concavo invece si avrà ancora separazione, ma in un punto anteriore rispetto allo spigolo.

Nonostante la semplicità della geometria, soluzioni di questo tipo sono utili anche per trattare casi di contorni più complicati ma che presentano uno spigolo: in prossimità dello spigolo infatti la soluzione avrà un comportamento locale descritto da questa soluzione semplice.

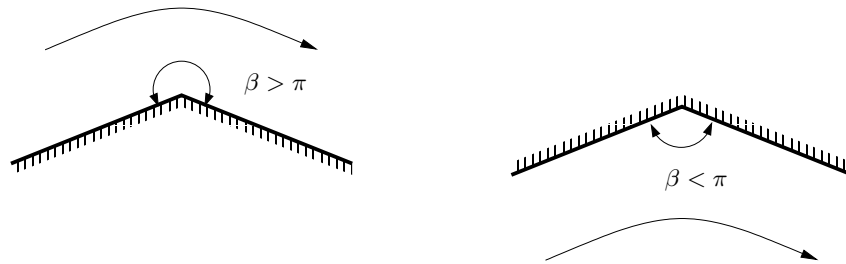


Figura 6.5 Corrente attorno ad uno spigolo convesso (a sinistra), con velocità infinita nel vertice, e attorno ad uno spigolo concavo (a destra), con velocità nulla nel vertice.

6.3.2 Applicazione: corrente che investe una parete

Con lo stesso tipo di trasformazione si descrive in modo elementare una corrente uniforme che investe una parete ortogonale ad essa. Per motivi di simmetria, infatti, la linea tratteggiata della figura 6.6 è una linea di corrente, e può essere sostituita con una parete solida. Appare allora evidente che il potenziale complesso si ottiene, come nel caso precedente, considerando uno spigolo concavo di

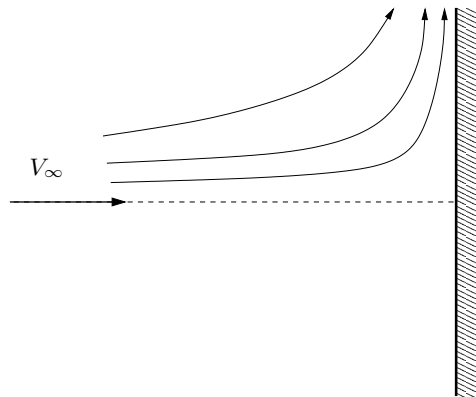


Figura 6.6 Corrente uniforme che investe ortogonalmente una parete piana.

ampiezza $\beta = \pi/2$. Sostituendo questo valore di β nella (6.5) si ottiene

$$\mathcal{F}(z) = V_\infty z^2$$

e la velocità complessa è:

$$w(z) = 2V_\infty z$$

Anche in questo caso si ha una singolarità nel punto A corrispondente al vertice dello spigolo, dove il modulo della velocità si annulla.

6.4 Formula di Schwarz per il cerchio

La variabile complessa permette di trattare separatamente la ricerca della soluzione dell'equazione di Laplace in geometria semplice e la trasformazione di questa soluzione in quella corrispondente ad una geometria più complicata.

In due dimensioni la geometria più semplice con le stesse caratteristiche topologiche del problema del profilo è quella del cerchio. Cercare la soluzione dell'equazione di Laplace all'interno (o all'esterno) di un cerchio significa, con la terminologia propria delle funzioni di variabile complessa, cercare una funzione $\mathcal{F}(z)$ della variabile complessa z che sia analitica all'interno (oppure all'esterno) del cerchio, conoscendo sul contorno ad esempio la sua parte reale $\Re[\mathcal{F}]$, cioè

$$\Re[\mathcal{F}] = g(\theta).$$

Dal momento che $\mathcal{F}(z)$ è una funzione analitica, le sue parti reale ed immaginaria non sono indipendenti, ma legate fra di loro dalle condizioni di Cauchy-Riemann (A.1a) e (A.1b), e quindi il problema si deve poter risolvere con una sola condizione al contorno sulla parte reale oppure sulla parte immaginaria di

\mathcal{F} , senza bisogno di dover specificare l'intera funzione. D'altro canto supporre di conoscere $\Re[\mathcal{F}]$ non toglie generalità al nostro ragionamento: se conoscessimo $\Im[\mathcal{F}]$ basterebbe applicarlo alla funzione $i\mathcal{F}$, di cui ora sarebbe nota la parte reale.

Sviluppo di Taylor per $\mathcal{F}(z)$ Come si discute in §A.7, una funzione analitica ammette sempre uno sviluppo in serie di Laurent, del tipo:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

Nella soluzione di un problema interno i coefficienti a_n devono essere identicamente nulli per $n < 0$, e la serie si riduce ad una serie di Taylor. Per il problema esterno invece i coefficienti a_n devono essere identicamente nulli per $n > 0$, e si ottiene una serie di Taylor in $1/z$.

Concentrandoci per ora sul problema interno, la $\mathcal{F}(z)$ all'interno del cerchio unitario ammette, in quanto funzione analitica, uno sviluppo in serie di Taylor del tipo

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (6.6)$$

Serie di Fourier per $\Re[\mathcal{F}]$ Per trovare i coefficienti a_n della serie di Taylor (6.6), si ricorre, analogamente a quanto fatto in §5.1, ad uno sviluppo in serie di Fourier della condizione al contorno. Si ha:

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} \quad (6.7)$$

La serie di Fourier può essere invertita per ottenere l'espressione dei coefficienti c_n in funzione di $g(\theta)$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

in cui, essendo la funzione $g(\theta)$ reale, per le proprietà della trasformata di Fourier si ha $c_n = c_{-n}^*$.

Osserviamo ora che sul cerchio unitario, dove $z = e^{i\theta}$, la serie di Taylor per la parte reale di $\mathcal{F}(z)$ può essere scritta come una serie di Fourier. Infatti, ricordando che $\Re[\mathcal{F}]$ è la semisomma di \mathcal{F} e del suo coniugato, si ha:

$$2g(\theta) = \mathcal{F}(e^{i\theta}) + \mathcal{F}^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n e^{in\theta} + a_n^* e^{-in\theta})$$

Eguagliando quest'ultima sommatoria alla serie di Fourier (6.7) per $g(\theta)$, si ottengono le seguenti relazioni fra i coefficienti a_n e c_n :

$$\frac{a_n}{2} = c_n = c_{-n}^* \quad \text{per } n > 0; \quad \Re[a_0] = c_0$$

La soluzione in forma chiusa Conoscendo la condizione al contorno, si possono quindi calcolare i coefficienti c_n del suo sviluppo in serie di Fourier, e con questi trovare i coefficienti a_n della serie di Taylor (6.6) per $\mathcal{F}(z)$. Resta indeterminata solo la parte immaginaria della costante complessa a_0 , che è effettivamente arbitraria in quanto non influisce sulla condizione al contorno.

È ora possibile sostituire esplicitamente l'espressione dei coefficienti a_n all'interno dello sviluppo di Taylor di $\mathcal{F}(z)$. Dato un punto z_0 interno al cerchio, la serie di Taylor per $\mathcal{F}(z_0)$ si scrive, separando il termine per $n = 0$ dal resto della sommatoria, come

$$\mathcal{F}(z_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right] z_0^n.$$

Sul cerchio unitario $e^{-in\theta} = z^{-n}$. Inoltre i segni di sommatoria ed integrale possono essere scambiati, ottenendo:

$$\mathcal{F}(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} z_0^n z^{-n} \right] d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \left[\sum_{n=0}^{+\infty} z_0^n z^{-n} - \frac{1}{2} \right] d\theta$$

in cui la sommatoria parte nuovamente da $n = 0$ e quindi si è tolto 1. Tale sommatoria è calcolabile; si tratta infatti di una serie geometrica, del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

che converge quando $|q| < 1$. Nel nostro caso la condizione di convergenza è sempre verificata, dal momento che se z_0 sta all'interno del cerchio è sempre $|z_0/z| = |z_0|/|z| < 1$. La convergenza della serie è dunque garantita, e si ha:

$$\mathcal{F}(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \left[\frac{1}{1 - z_0/z} - \frac{1}{2} \right] d\theta$$

Sempre sul cerchio, dove $z = e^{i\theta}$, si ha che $dz = ie^{i\theta} d\theta$. L'integrale precedente si può allora scrivere come integrale di linea nel piano complesso:

$$\mathcal{F}(z_0) = \frac{1}{\pi} \oint g(\theta) \frac{z + z_0}{2(z - z_0)} \frac{dz}{iz}$$

per ricavare la formula di Schwarz:

$$\mathcal{F}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \Re[\mathcal{F}] \frac{z + z_0}{z - z_0} \frac{dz}{z}. \quad (6.8)$$

Essa consente di esprimere in forma chiusa una funzione analitica $\mathcal{F}(z)$ in tutti i punti interni al cerchio unitario, se sul contorno è nota la sua parte reale (o la sua parte immaginaria).

Analogia con la formula di Green La formula di Schwarz è l'analogo in variabile complessa della formula di Green per il problema del cerchio. Infatti in entrambi i casi la conoscenza della condizione al contorno permette di scrivere la soluzione in forma chiusa; esiste però la differenza che, mentre nella formula di Green si ragiona in termini di potenziale cinetico e della sua derivata normale, con la formula di Schwarz applicata al potenziale complesso entrano in gioco contemporaneamente il potenziale cinetico e la funzione di corrente.

Formula di Schwarz per l'esterno La formula di Schwarz valida per un punto z_0 esterno al cerchio si ottiene ripetendo il medesimo procedimento, ma a partire dallo sviluppo di Taylor in $1/z$ per $\mathcal{F}(z)$:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Ripetendo i passaggi descritti per il caso del problema interno al cerchio, si riottiene una serie geometrica calcolabile, dal momento che ancora $q = z/z_0$ e $|q| < 1$ quando z_0 è esterno al cerchio. Si giunge così ad una formula che differisce dalla precedente (6.8) solo per un segno:

$$\mathcal{F}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \Re[\mathcal{F}] \frac{z_0 + z}{z_0 - z} \frac{dz}{z}.$$

Si noti che le due formule per l'interno e per l'esterno del cerchio hanno la stessa espressione analitica, ma danno risultati diversi a seconda che il punto z_0 sia interno o esterno al cerchio unitario.

6.5 Corrente traslocircolatoria intorno al cerchio

La formula di Schwarz costituisce uno strumento generale per la costruzione di una funzione analitica una volta che sia assegnata una condizione al contorno di qualsiasi tipo sul contorno di un cerchio. Nel caso particolare di corrente uniforme che investe un cilindro circolare, possiamo però determinare il potenziale complesso in modo più diretto e semplice.

Già conosciamo la funzione potenziale cinetico e la funzione di corrente per una corrente uniforme che investe un cilindro circolare indefinito: è stata costruita in §5.3.1 per sovrapposizione di una corrente uniforme e una doppietta, e in §5.4.1 grazie al metodo delle immagini. In §5.3.2 invece abbiamo descritto il caso più generale di corrente traslocircolatoria intorno al cilindro, aggiungendo l'effetto di un vortice puntiforme per rappresentare una eventuale circolazione non nulla intorno al cerchio. Affrontiamo ora questo problema in termini di variabile complessa.

Corrente traslatoria Supponiamo per semplicità che il raggio R del cerchio sia unitario, e che la velocità asintotica sia unitaria (senza perdere di generalità, grazie alla linearità del problema). Scegliendo ora l'asse \mathcal{X} allineato rispetto alla velocità, è immediato ricavare l'espressione del potenziale complesso $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$. La corrente uniforme infatti ha potenziale $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$, e aggiungendo il cilindro secondo il metodo delle immagini in variabile complessa discusso in §6.1.2 si ha

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{1}{\mathcal{Z}} \quad (6.9)$$

Si verifica che questo è il potenziale complesso che ci interessa separando la parte reale e la parte immaginaria:

$$\varphi + i\psi = \left(\mathcal{R} + \frac{1}{\mathcal{R}}\right) \cos \phi + i \left(\mathcal{R} - \frac{1}{\mathcal{R}}\right) \sin \phi$$

La parte reale coincide con la soluzione (5.16) già discussa per il potenziale cinetico, mentre la parte immaginaria è identicamente nulla su tutto il cerchio, che quindi è linea di corrente.

Nel caso generale in cui la velocità asintotica ha modulo V_∞ non unitario e non è allineata con l'asse \mathcal{X} , ma forma con esso un certo angolo di incidenza α , la velocità complessa all'infinito è data dalla (6.1), ed il potenziale complesso vale:

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{W}_\infty \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{W}_\infty^*}{\mathcal{Z}} \quad (6.10)$$

All'infinito il potenziale, come necessario, ha un comportamento asintotico $\sim \mathcal{Z}$; sul cerchio inoltre la velocità possiede solo una componente tangente al contorno. Infatti sul cerchio dove $\mathcal{Z} = e^{i\phi}$ la velocità complessa è:

$$\mathcal{W}(e^{i\phi} = V_\infty (e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\phi)}) = 2V_\infty \sin(\phi - \alpha)ie^{-i\phi}$$

ed il suo argomento vale $\pi/2 - \phi$. Dal momento che ϕ identifica la direzione normale al cerchio, la velocità ha ovunque direzione tangente.

Corrente traslocircolatoria Il potenziale complesso (6.10) risolve il problema di trovare un potenziale cinetico continuo. Se però siamo interessati a casi in cui la costante ciclica del moto non è nulla (che sono poi i casi di interesse aerodinamico), il potenziale cinetico deve poter essere discontinuo, e già sappiamo che in questo caso il problema di Laplace non è completamente determinato: esiste un grado di libertà in più, legato alla costante ciclica incognita, che rende la soluzione non univoca. Inoltre la discontinuità $\Delta\varphi$ del potenziale cinetico a cavallo della scia è (almeno nel caso stazionario) costante, per quanto abbiamo detto in §4.5.1.

In campo complesso la funzione $\log \mathcal{Z}$ ha simmetria circolare, e presenta una discontinuità (costante) della parte immaginaria attraversando l'asse \mathcal{X} , mentre la parte reale è costante sulla circonferenza $|\mathcal{Z}| = 1$. La velocità complessa di un potenziale complesso logaritmico è $\sim 1/\mathcal{Z}$, quindi si annulla all'infinito ed è continua in tutto il piano complesso (tranne che nell'origine). Se ne deduce quindi che un termine proporzionale a $i \log \mathcal{Z}$ è ciò che occorre aggiungere al potenziale complesso (6.10) per poter tenere in conto anche la discontinuità di φ sulla scia e rappresentare così moti con circolazione attorno al cilindro.

La soluzione generale, analoga alla (5.15) scritta per la funzione di corrente, diviene dunque:

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{W}_\infty \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{W}_\infty^*}{\mathcal{Z}} + iA \log \mathcal{Z} \quad (6.11)$$

Evidentemente questa soluzione non è unica, ma dipende dal valore della costante reale A , che per ora resta indeterminata.

6.6 Condizione di Kutta

Per rendere unica la soluzione attorno al cerchio, occorre essere capaci di specificare la costante reale A che rimane indeterminata nell'espressione (6.11) del potenziale complesso. Come abbiamo già discusso in §4.4, in generale questa costante può essere determinata solo rimuovendo l'ipotesi di non viscosità del fluido: nel quadro non viscoso, qual è quello che conduce all'equazione di Laplace per φ o ψ , il problema resta a tutti gli effetti indeterminato.

Profili aerodinamici Una fortunata eccezione è però costituita dai cosiddetti corpi (o profili) aerodinamici, quei corpi cioè in cui la singolarità geometrica introdotta dalla presenza di un bordo di uscita aguzzo suggerisce che proprio da quel punto si debba staccare la scia.

Sfruttando l'informazione geometrica in luogo di quella viscosa, conosciamo allora la posizione in cui avviene il distacco della scia dal corpo. Se la scia è anche ragionevolmente sottile, potremo ancora valerci dell'ipotesi di irrotazionalità in tutto il campo di moto tranne che nella linea corrispondente alla scia, attraverso cui il potenziale cinetico può essere discontinuo.

Lo spigolo rappresenta un punto in cui una trasformazione che porta il cerchio nel profilo non è conforme: in corrispondenza dello spigolo gli angoli passano infatti da un valore di π sul cerchio ad un valore di 2π se lo spigolo è cuspidato,

oppure a un valore di poco inferiore se i due lati dello spigolo non sono paralleli. Questo implica che la derivata della trasformazione nello spigolo deve essere infinita. Ricordando il legame (6.3a) fra modulo della velocità e derivata della trasformazione, ne segue che l'unica via per non avere velocità infinita nello spigolo consiste nell'imporre che lo spigolo sia un punto di ristagno.

La costante A si determina allora con la condizione ulteriore che il punto sul cerchio corrispondente allo spigolo del corpo aerodinamico sia un punto di ristagno. Questa condizione prende il nome di condizione di Kutta.

Punto di ristagno al bordo di uscita Fra le diverse possibilità, la trasformazione conforme che porta il cerchio nel profilo può essere scelta in modo che lo spigolo al bordo di uscita del profilo corrisponda sempre al punto $\mathcal{Z} = 1$ sul cerchio. La condizione di Kutta, con questa scelta, consiste quindi nel determinare la costante incognita A in modo che il punto $\mathcal{Z} = 1$ sia un punto di ristagno. L'andamento qualitativo della linea di corrente limite e la posizione dei punti A e B di ristagno sono indicati schematicamente nella figura 6.7.

Una trasformazione di questo tipo richiede un ulteriore parametro libero, oltre a quello che già resta libero se vogliamo imporre che i punti all'infinito e le velocità all'infinito coincidano nei due piani z e \mathcal{Z} (si veda §6.2.3). Oltre ad un fattore di scala, resta indeterminata anche una rotazione del profilo. A fronte dello svantaggio di avere ben due parametri liberi, in questo modo il valore della costante A si può determinare una volta per tutte, in maniera indipendente dai diversi profili, che risultano variamente ruotati rispetto alla direzione dell'asse x , il quale coincide sempre con la direzione di portanza nulla. Otteniamo quindi il significativo vantaggio di ottenere una soluzione nel piano del cerchio che non dipende per nulla dalla geometria del profilo.

La condizione da imporre analiticamente nel piano del cerchio è l'annullamento della velocità complessa nel punto $\mathcal{Z} = 1$, che vogliamo sia punto di ristagno.

In $\mathcal{Z} = 1$ la velocità complessa, derivata del potenziale complesso (6.11), è:

$$\mathcal{W}(1) = \mathcal{W}_\infty - \mathcal{W}_\infty^* + iA$$

e dall'annullamento di questa velocità si ottiene per la costante A il valore:

$$A = i(\mathcal{W}_\infty - \mathcal{W}_\infty^*) = 2V_\infty \sin \alpha$$

Il valore della costante A è quindi legato alla circolazione attorno al profilo, ed in particolare risulta $A = 0$ per flussi non circolatori, in cui il termine logaritmico non compare nel potenziale complesso. Per mettere in evidenza il legame fra A e la circolazione, è sufficiente calcolare l'integrale della velocità complessa lungo un contorno chiuso che racchiuda il cerchio, la cui parte reale secondo la (6.4) eguaglia Γ . Dal momento che solo la parte logaritmica del potenziale complesso può dar luogo a una circolazione, si ha

$$\Gamma = \Re \left[\oint \frac{\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty}{\mathcal{Z}} d\mathcal{Z} \right] = -4\pi V_\infty \sin \alpha$$

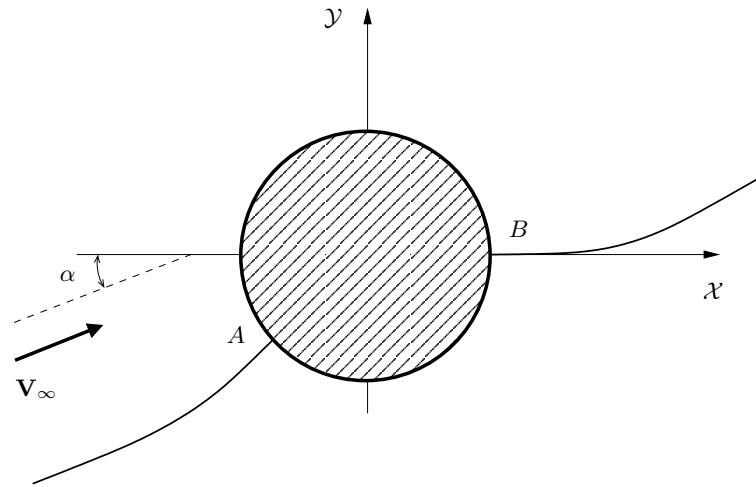


Figura 6.7 Condizione di Kutta: la circolazione intorno al cilindro si sceglie in modo che $\mathcal{Z} = 1$ corrisponda sempre al punto di ristagno posteriore.

e quindi

$$A = -\frac{\Gamma}{2\pi} \quad (6.12)$$

In conclusione il potenziale complesso che descrive il moto di un fluido ideale attorno al cerchio è il seguente

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{W}_\infty \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{W}_\infty^*}{\mathcal{Z}} + (\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty) \log \mathcal{Z} \quad (6.13)$$

e la sua velocità complessa è data da

$$\mathcal{W}(\mathcal{Z}) = \mathcal{W}_\infty - \frac{\mathcal{W}_\infty^*}{\mathcal{Z}^2} + \frac{\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty}{\mathcal{Z}}. \quad (6.14)$$

6.7 Lastra piana ad incidenza

Dopo aver determinato, una volta per tutte, il potenziale e la velocità complessa nel piano del cerchio, iniziamo ad esaminare ora quali trasformazioni possano portare la geometria circolare in un contorno chiuso di interesse aerodinamico, cioè in un profilo.

Il primo e più semplice profilo che consideriamo è la lastra piana senza spessore. Nelle ipotesi di flusso non viscoso, una lastra di questo tipo (che supponiamo allineata con l'asse x) se investita da una corrente uniforme diretta parallelamente alla lastra stessa non produce alcuna perturbazione nella corrente. Il problema

diventa interessante nel momento in cui la corrente asintotica e la lastra non sono allineate, ma formano fra loro un angolo α , che chiamiamo angolo di incidenza.

Il potenziale complesso (6.9), che per velocità asintotica unitaria e reale descrive il moto attorno al cerchio di raggio unitario, può essere interpretato anche come una trasformazione che porta dal piano della variabile complessa \mathcal{Z} a quello della z :

$$z(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{1}{\mathcal{Z}} \quad (6.15)$$

È facile verificare che questa trasformazione porta il cerchio unitario del piano \mathcal{Z} nel segmento che unisce i punti -2 e $+2$ dell'asse reale del piano z , cioè in una lastra piana di lunghezza 4. Si tratta di una trasformazione che, naturalmente, non è conforme nei punti corrispondenti ai due spigoli della lastra.

Per quanto detto in §6.2.2, la medesima trasformazione esplicitata rispetto a \mathcal{Z} ed applicata al potenziale complesso $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ (6.13) del moto intorno al cerchio, fornisce immediatamente il potenziale complesso $\mathcal{F}(z(\mathcal{Z}))$ del moto intorno alla lastra. Anche la velocità complessa si ottiene componendo la velocità complessa intorno al cerchio con la derivata della trasformazione, come indicato nella (6.3b):

$$w(z(\mathcal{Z})) = \frac{\mathcal{W}(\mathcal{Z})}{dz(\mathcal{Z})/d\mathcal{Z}}$$

Sostituendo l'espressione (6.14) per $\mathcal{W}(\mathcal{Z})$ e calcolando la derivata della trasformazione (6.15), si ottiene:

$$w(z(\mathcal{Z})) = \frac{\mathcal{W}_\infty - \mathcal{W}_\infty^*/\mathcal{Z}^2 - (\mathcal{W}_\infty - \mathcal{W}_\infty^*)/\mathcal{Z}}{1 - 1/\mathcal{Z}^2} \quad (6.16)$$

Questa relazione costituisce la soluzione generale del problema della lastra piana. È facile verificare che w è reale (e quindi tangente alla lastra) quando \mathcal{Z} sta sul cerchio. Inoltre all'infinito w è costante e vale \mathcal{W}_∞ : la coincidenza delle velocità complesse all'infinito nei due piani è garantita dalla trasformazione (6.15) utilizzata, che soddisfa le condizioni discusse in §6.2.3.

L'andamento delle linee di corrente è mostrato in maniera schematica nella figura 6.8. Il punto di ristagno posteriore B si trova proprio in corrispondenza del bordo di uscita della lastra, e la linea di corrente limite si stacca parallelamente alla lastra stessa. Il punto di ristagno anteriore A invece si trova sul lato del ventre quando l'angolo di incidenza è positivo.

Bordo di attacco aguzzo Osserviamo che il denominatore nell'espressione (6.16) della velocità complessa si annulla quando $\mathcal{Z} = \pm 1$: in questi punti, che sono i corrispondenti sul cerchio degli spigoli della lastra piana, la trasformazione (6.15) non è conforme, e quindi non conserva gli angoli. Nel punto $\mathcal{Z} = 1$ corrispondente al bordo di uscita la velocità è nulla grazie alla condizione di Kutta, che rende B un punto di ristagno annullando anche il numeratore della (6.16). Il punto sulla lastra corrispondente a $\mathcal{Z} = -1$ è invece effettivamente un punto in

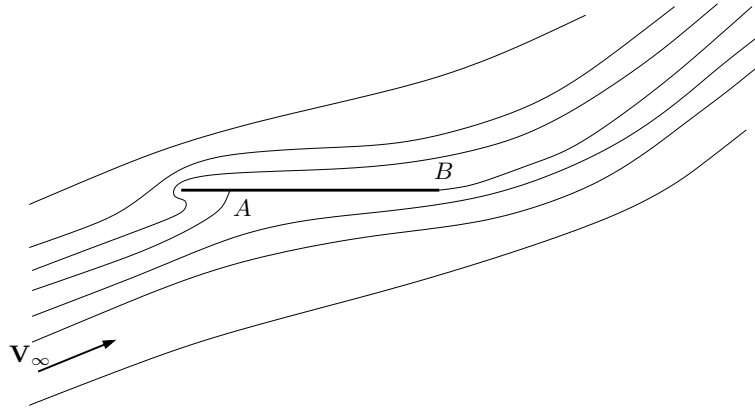


Figura 6.8 Linee di corrente intorno a una lastra piana investita con incidenza.

cui la velocità è infinita. La lastra piana costituisce infatti un caso limite di profilo aerodinamico in cui non solo il bordo di uscita, ma anche il bordo di attacco è aguzzo.

In generale il caso di corpo aerodinamico dotato di due spigoli non è trattabile in maniera semplice. La velocità infinita al bordo di attacco significa che, per un fluido reale, la velocità al bordo di attacco è molto elevata, e si ha quindi una tendenza alla separazione come conseguenza delle brusche decelerazioni che il fluido incontra dopo aver superato lo spigolo. Possiamo però ritenere che, fino a quando gli angoli di incidenza restano piccoli, la scia dovuta alla separazione sul bordo d'attacco sia piccola. La trattazione ora fatta resta quindi sostanzialmente valida anche in questo caso.

6.7.1 La portanza

La portanza (per unità di apertura) esercitata da una lastra piana posta ad incidenza α rispetto ad una corrente uniforme di modulo V_∞ può essere rapidamente dedotta dal teorema di Kutta-Joukowski (4.13).

Se il cerchio ha raggio unitario, la circolazione intorno alla lastra è data da $\Gamma = -2\pi A = -4\pi V_\infty \sin \alpha$, quindi il modulo della portanza è dato da

$$L = 4\pi\rho V_\infty^2 \sin \alpha \quad (6.17)$$

La curva $c_l - \alpha$ È utile ragionare in termini di un coefficiente adimensionale di forza, in questo caso il coefficiente di portanza c_l , che indichiamo con un pedice in minuscolo per distinguerlo dal coefficiente di portanza c_L relativo al caso tridimensionale:

$$c_l = \frac{2L}{\rho V_\infty^2 c} \quad (6.18)$$

Il c_l si ottiene rendendo adimensionale la portanza (per unità di apertura) attraverso la pressione dinamica all'infinito e una lunghezza di riferimento c , che tipicamente è la corda del profilo o, in questo caso, la lunghezza della lastra. Dalla precedente espressione (6.17) per la portanza, e ricordando che la lunghezza c della lastra vale esattamente 4 se il cerchio ha raggio unitario, si ha:

$$c_l = 2\pi \sin \alpha \approx 2\pi\alpha \quad (6.19)$$

dove l'approssimazione $\sin \alpha \approx \alpha$ è valida per piccoli valori dell'angolo di incidenza.

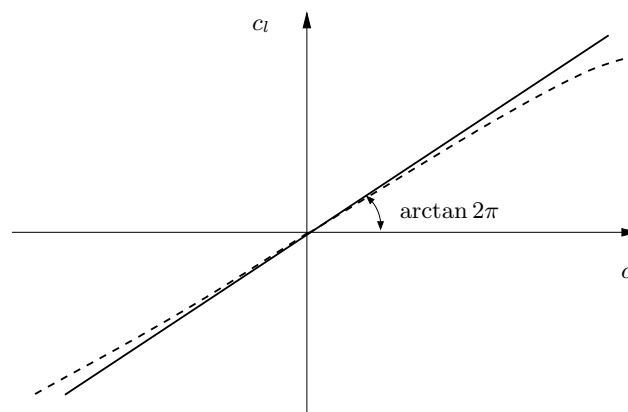


Figura 6.9 Curva $c_l - \alpha$ per una lastra piana senza spessore: approssimazione per piccoli angoli (linea continua) e curva esatta (linea tratteggiata).

Come mostra schematicamente la figura 6.9, il coefficiente di portanza per la lastra piana ovviamente è nullo quando l'angolo di incidenza è nullo: le curve passano quindi per l'origine. Inoltre il c_l è proporzionale al seno dell'angolo di incidenza (espresso in radianti), attraverso una costante di proporzionalità che vale 2π . Per piccoli angoli di incidenza la curva $c_l - \alpha$ ha andamento rettilineo con pendenza 2π .

Questo risultato fondamentale, la cui generalizzazione a geometrie diverse sarà discussa in seguito, trova buon riscontro con le misure sperimentali, almeno fino a quando le ipotesi di piccoli angoli e quindi di scia sottile sono ben verificate.

6.8 Formule di Blasius per le azioni aerodinamiche

Abbiamo già ricavato in §4.6 l'importante risultato che la forza aerodinamica esercitata da una corrente uniforme su un corpo bidimensionale di estensione finita è nulla se non c'è circolazione attorno al corpo, mentre ha solo componente portante in caso contrario, il cui modulo è dato dalla (??).

Grazie alle variabili complesse, e quindi solo per il caso bidimensionale, si possono ottenere risultati più generali, che riguardano non solo la forza ma anche il momento aerodinamico, sul quale il teorema di Kutta-Joukowski non fornisce alcuna informazione. La trattazione che segue conduce dapprima alle formule, dovute al matematico tedesco Blasius nel 1910, per la forza e il momento aerodinamici, ed in seguito al calcolo delle azioni aerodinamiche nel caso generale di un profilo alare di forma qualsiasi.

La forza La forza aerodinamica \mathbf{F}_a (per unità di profondità) si calcola integrando il flusso di quantità di moto lungo un contorno \mathcal{S}_1 infinitamente prossimo al corpo. Se sul corpo si impongono condizioni al contorno di non penetrazione, ci si riconduce, come già mostrato nella (1.24), al calcolo dell'integrale degli sforzi normali:

$$\mathbf{F}_a = \oint_{\mathcal{S}_1} p \mathbf{n} \, dc$$

La pressione si ricava dalla formula di Bernoulli (2.13); inoltre i termini costanti non danno contributo all'integrale, in quanto l'integrale di $\mathbf{n} \, dc$ lungo un contorno chiuso è nullo per ragioni geometriche. La forza aerodinamica si calcola conoscendo la pressione sul corpo come

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{S}_1} V^2 \mathbf{n} \, dc \quad (6.20)$$

Il momento In maniera analoga, il momento aerodinamico \mathbf{M}_a (per unità di profondità), calcolato rispetto ad un polo coincidente con l'origine del sistema di coordinate (e assunto positivo in accordo con la regola della mano destra), è dato da:

$$\mathbf{M}_{a,0} = \oint_{\mathcal{S}_1} (\rho \mathbf{r} \times \mathbf{V}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r} \times p \mathbf{n}) \, dc$$

Il primo addendo della funzione integranda è nullo per la condizione al contorno di non penetrazione. Utilizzando la formula di Bernoulli per scrivere il secondo addendo in funzione della pressione, si ottiene:

$$\mathbf{M}_{a,0} = -\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{S}_1} V^2 \mathbf{r} \times \mathbf{n} \, dc$$

In due dimensioni la forza \mathbf{F}_a ha solo le componenti cartesiane F_x ed F_y . Per il momento $\mathbf{M}_{a,0}$ calcolato rispetto all'origine la sola componente $M_{z,0}$ in direzione normale al piano del moto può essere diversa da zero.

6.8.1 Forza aerodinamica

Per calcolare gli integrali che esprimono forza e momento aerodinamici grazie alla variabile complessa, occorre dapprima trasformare il vettore $\mathbf{n} \, dc$ in componenti cartesiane. Notiamo a questo scopo che $\mathbf{t} \, dc = (dx, dy)$ e quindi, $\mathbf{n} \, dc =$

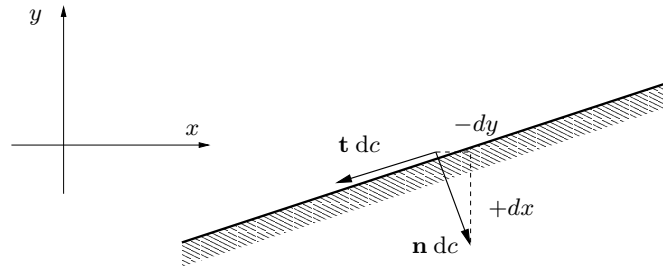


Figura 6.10 Scrittura del vettore $\mathbf{n} \, dc$ in componenti cartesiane; la normale è orientata dal fluido verso il corpo.

$(-dy, dx)$. (Si noti a questo proposito che sulla parte superiore del corpo dx è negativo, mentre su quella inferiore è positivo; questo permette di utilizzare la medesima formula per tutto il contorno del corpo. Si osservi la figura 6.10) Proiettando la relazione vettoriale (6.20) che fornisce la forza nelle direzioni degli assi cartesiani x ed y si ha:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \oint_{S_1} V^2 \, dy \tag{6.21a}$$

$$F_y = -\frac{\rho}{2} \oint_{S_1} V^2 \, dx \tag{6.21b}$$

Passaggio alla variabile complessa Per passare alle variabili complesse occorre ora cercare il legame fra gli integrali (12.31) che esprimono le componenti della forza e opportuni integrali della velocità complessa, calcolati lungo il medesimo contorno S_1 prossimo al corpo. Sia

$$dz = e^{i\theta} dc$$

il differenziale dz sul contorno S_1 . A causa della condizione di non penetrazione, la velocità \mathbf{V} deve essere tangente al contorno, che ha pendenza θ . Quindi l'argomento della velocità complessa sul contorno S_1 è proprio $-\theta$:

$$w = V e^{-i\theta}$$

La quantità $w^2 dz$ sul contorno si scrive come

$$w^2 dz = V^2 e^{-2i\theta} e^{i\theta} dc = V^2 e^{-i\theta} dc$$

Notiamo che $e^{-i\theta} dc = dz^* = dx - i dy$. Integrando allora la funzione w^2 lungo il contorno chiuso S_1 si ottiene:

$$\oint w^2 dz = \oint V^2 (dx - i dy)$$

Confrontando questa relazione con le espressioni (6.21a) e (6.21b) si ricava la formula di Blasius per le componenti della risultante delle azioni aerodinamiche:

$$F_y + iF_x = -\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{S}_1} w^2 dz$$

Essa fornisce tali componenti mediante il calcolo, lungo il contorno del corpo stesso, dell'integrale complesso, rispetto alla variabile z , della funzione analitica w^2 . Scegliamo di utilizzare quantità adimensionali per la variabile complessa z e per la velocità complessa w , introducendo una lunghezza di riferimento R ed una velocità di riferimento, che scegliamo uguale a V_∞ :

$$F_y + iF_x = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} R \oint w^2 dz \quad (6.22)$$

A questo punto si possono sfruttare le proprietà degli integrali in campo complesso, per i quali il cammino di integrazione può essere modificato a piacere purché, come si discute in §A.5, non si includano o escludano nuove singolarità. L'integrale (6.22) per la forza (e il suo analogo (6.23) per il momento, che verrà ricavato nel prossimo paragrafo) derivano dall'integrazione della pressione lungo il contorno \mathcal{S}_1 infinitamente prossimo al corpo, ma la teoria delle variabili complesse ora ci permette di spostare il cammino di integrazione: sceglieremo allora di effettuare il calcolo lungo un cammino molto lontano dal corpo, in modo da poter sfruttare lo sviluppo in serie di Laurent in $1/z$ della funzione integranda per ottenere rapidamente il risultato grazie al teorema dei residui, trattato in §A.8.

6.8.2 Momento aerodinamico

Anche per la componente non nulla $M_{z,0}$ del momento aerodinamico si deve trasformare $\mathbf{n} dc$ in componenti cartesiane. In particolare si ha che $\mathbf{r} \times \mathbf{n} dc = (x, y) \times (-dy, dx) = xdx + ydy$, e quindi:

$$M_{z,0} = -\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{S}_1} V^2 (xdx + ydy)$$

Per trovare un legame fra questa espressione ed un opportuno integrale di una funzione della variabile complessa, moltiplichiamo per z l'espressione di $w^2 dz$, ed otteniamo

$$zw^2 dz = V^2 [xdx + ydy + i(ydx - xdy)]$$

Confrontando questa formula con l'espressione di $M_{z,0}$ si ricava la formula di Blasius per la componente del momento aerodinamico normale al piano del moto:

$$M_{z,0} = -\frac{\rho}{2} \Re \left[\oint_{\mathcal{S}_1} zw^2 dz \right]$$

Essa fornisce l'unica componente non nulla del momento aerodinamico (calcolato rispetto all'origine degli assi), esercitato da una corrente fluida su un corpo immerso in essa, mediante il calcolo, lungo il contorno del corpo stesso, della parte reale dell'integrale complesso, rispetto alla variabile z , della funzione analitica zw^2 . In termini adimensionali si ha:

$$M_z = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} R^2 \Re \left[\oint_{S_1} zw^2 dz \right] \quad (6.23)$$

6.9 Forza aerodinamica su un profilo

La formula di Blasius (6.22) consente il calcolo delle componenti della forza aerodinamica esercitata su un corpo immerso in una corrente fluida, conoscendo la velocità complessa del moto intorno al profilo. In realtà possiamo stabilire risultati molto generali, a partire dall'espressione (6.14) della velocità complessa relativa al moto intorno al cerchio, senza la necessità di specificare la trasformazione $z = z(\mathcal{Z})$ e quindi la geometria del profilo, purché la trasformazione abbia le caratteristiche discusse in §6.2.3, mantenga cioè la corrispondenza dei punti all'infinito e delle velocità all'infinito.

Calcoleremo perciò tutti gli integrali rimanendo nel piano \mathcal{Z} del cerchio. Utilizziamo anzitutto la (6.3b) per scrivere la velocità complessa w in termini della velocità complessa \mathcal{W} nel piano del cerchio e della derivata della trasformazione:

$$w(z(\mathcal{Z})) = \frac{\mathcal{W}(\mathcal{Z})}{dz(\mathcal{Z})/d\mathcal{Z}}$$

Inoltre ricordiamo che il differenziale dz sul profilo è legato al $d\mathcal{Z}$ sul cerchio da

$$dz = \frac{dz}{d\mathcal{Z}} d\mathcal{Z}$$

La formula di Blasius per la forza aerodinamica diviene:

$$F_y + iF_x = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} R \oint \frac{\mathcal{W}^2}{dz(\mathcal{Z})/d\mathcal{Z}} d\mathcal{Z} \quad (6.24)$$

Il valore di questo integrale si calcola agevolmente grazie al teorema dei residui se ci si pone molto lontano dal profilo, dove la funzione integranda può essere sostituita dal suo sviluppo in serie di Laurent. Infatti w^2 è una funzione analitica, e il suo sviluppo in serie di Laurent si ottiene combinando le serie di Laurent per \mathcal{W}^2 e $(dz/d\mathcal{Z})^{-1}$.

La velocità complessa \mathcal{W} intorno al cerchio (6.14) si trova già in una forma polinomiale in $1/\mathcal{Z}$. Per quanto riguarda invece la derivata della trasformazione, osserviamo che la più generica trasformazione $z = z(\mathcal{Z})$ fra cerchio e profilo che

mantenga la corrispondenza del punto all'infinito e della velocità all'infinito può essere posta nella forma

$$z = \mathcal{Z} + a_0 + \frac{a_1}{\mathcal{Z}} + \frac{a_2}{\mathcal{Z}^2} + \dots \quad (6.25)$$

Lo sviluppo della sua derivata $dz/d\mathcal{Z}$ vale, conseguentemente:

$$\frac{dz}{d\mathcal{Z}} = 1 - \frac{a_1}{\mathcal{Z}^2} + \dots$$

Il teorema dei residui Secondo il teorema dei residui, il valore dell'integrale (6.24) è uguale a $2\pi i$ moltiplicato per il residuo della funzione integranda, ovvero il coefficiente del termine \mathcal{Z}^{-1} del suo sviluppo in serie di Laurent. Trascurando sin d'ora i termini che danno origine a potenze negative di \mathcal{Z} inferiori a -1 , si ottiene per lo sviluppo di \mathcal{W}^2

$$\mathcal{W}^2 = \mathcal{W}_\infty^2 + 2 \frac{\mathcal{W}_\infty (\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)}{\mathcal{Z}} + \dots$$

La moltiplicazione per l'inverso della derivata della trasformazione non modifica il coefficiente di \mathcal{Z}^{-1} . Si ha infatti:

$$\frac{1}{dz(\mathcal{Z})/d\mathcal{Z}} = \left(1 - \frac{a_1}{\mathcal{Z}^2} + \dots\right)^{-1} = 1 + \frac{a_1}{\mathcal{Z}^2} + \dots \quad (6.26)$$

Il valore dell'integrale quindi è:

$$F_y + iF_x = -2\pi i \rho V_\infty^2 R \mathcal{W}_\infty (\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)$$

Osserviamo inoltre che $\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty = 2i \sin \alpha$. Di conseguenza:

$$F_y + iF_x = 4\pi \rho V_\infty^2 R \sin \alpha e^{-i\alpha}$$

La resistenza è nulla Il numero complesso $F_y + iF_x$ ha argomento $-\alpha$, che è lo stesso argomento di \mathcal{W}_∞ . Ne segue che la forza aerodinamica è ortogonale a \mathbf{V}_∞ , cioè è una pura portanza. Infatti $F_y - iF_x$ ha argomento α , che è l'argomento di \mathcal{W}_∞^* e la direzione di \mathbf{V}_∞ . La direzione perpendicolare si ottiene moltiplicando per i : quindi il numero complesso $i(F_y - iF_x) = F_x + iF_y$ ha argomento di $\alpha + \pi/2$. Ne segue quindi che la forza aerodinamica è ortogonale alla direzione di \mathbf{V}_∞ .

Osservando anche che, per la (6.12), $2\pi i(\mathcal{W}_\infty - \mathcal{W}_\infty^*)$ è proprio la circolazione attorno al profilo, concludiamo che abbiamo ricavato per via diversa il teorema di Kutta-Joukowski (4.13).

La curva $c_l - \alpha$ La portanza è proporzionale al seno dell'angolo α formato dalla direzione di \mathbf{V}_∞ con l'asse x , che quindi è la direzione della velocità asintotica per cui si ha portanza nulla. Inoltre la portanza appare indipendente dalle caratteristiche geometriche del profilo: i coefficienti a_i della trasformazione (6.25) non vi compaiono in alcun modo.

D'altro canto, il fattore di scala che resta libero nella trasformazione viene fissato proprio dal requisito che profili diversi abbiano sempre la stessa portanza, e quindi deve esistere una dipendenza dalla particolare trasformazione. Per metterla in evidenza, scriviamo la portanza (per unità di apertura) come:

$$L = \rho \frac{V_\infty^2}{2} R 8\pi \sin \alpha$$

ed il coefficiente di portanza, già definito dalla (6.18), come:

$$c_l = \frac{R}{c} 8\pi \sin \alpha \quad (6.27)$$

in cui c è la corda del profilo.

Questa espressione coincide con la (6.19) già trovata nel caso particolare della lastra piana, per la quale il fattore moltiplicativo R/c vale $1/4$. Il medesimo rapporto assume valori di poco superiori per i profili aerodinamici.

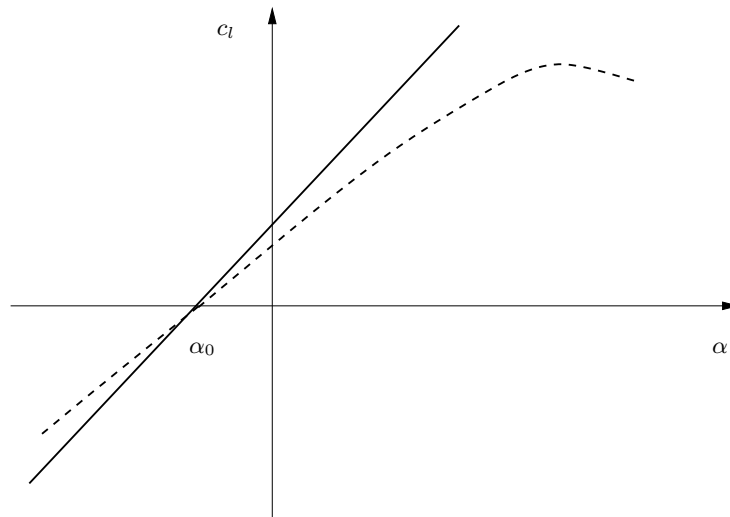


Figura 6.11 Curva $c_l - \alpha$ per un profilo non simmetrico: andamento teorico (linea continua) e andamento per fluido reale (linea tratteggiata).

L'angolo di portanza nulla Per quanto riguarda la dipendenza da α , il coefficiente di portanza è proporzionale a $\sin \alpha$, ovvero, se gli angoli sono piccoli, direttamente all'angolo α . Questo implica una ulteriore dipendenza dal particolare profilo. Infatti l'angolo α che compare nella formula (6.27) non è l'angolo di incidenza che si utilizza comunemente, e che si misura fra la direzione di \mathbf{V}_∞ e la direzione individuata dalla corda del profilo. La corda è di definizione arbitraria: per esempio la congiungente fra bordo di attacco e bordo di uscita, oppure il massimo segmento inscritto nel profilo, o altro ancora.

Rispetto alla corda, la direzione di portanza nulla forma un certo angolo, che chiamiamo angolo di portanza nulla α_0 . Se dunque indichiamo con α' l'angolo di incidenza, misurato cioè rispetto alla corda, si ha:

$$c_l = \frac{R}{c} 8\pi \sin(\alpha' - \alpha_0) \quad (6.28)$$

Notiamo infine che l'arbitrarietà insita nella definizione di corda del profilo non ha alcun effetto sul calcolo del c_l : in quest'ultima formula dobbiamo infatti considerare definiti a meno della stessa costante arbitraria sia l'angolo di incidenza α' che l'angolo di portanza nulla α_0 , ma la loro differenza non presenta ambiguità.

6.10 Momento aerodinamico su un profilo

In maniera analoga a quanto descritto per la forza aerodinamica si procede per il calcolo del momento aerodinamico.

Iniziamo dal calcolo del momento rispetto all'origine $z = 0$; l'integrale (6.23) si scrive nella variabile \mathcal{Z} , e considerando la più generica trasformazione (6.25) si ha:

$$M_{z,0} = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} R^2 \Re \left[\oint \frac{\mathcal{W}^2}{dz(\mathcal{Z})/d\mathcal{Z}} z(\mathcal{Z}) d\mathcal{Z} \right]$$

Il teorema dei residui Grazie al teorema dei residui, anche il valore di questo integrale è $2\pi i$ volte il coefficiente del termine \mathcal{Z}^{-1} dello sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda. I termini che occorre considerare nello sviluppo di \mathcal{W}^2 sono

$$\mathcal{W}^2 = \mathcal{W}_\infty^2 + 2 \frac{\mathcal{W}_\infty(\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)}{\mathcal{Z}} + \frac{(\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)^2}{\mathcal{Z}^2} - 2 \frac{\mathcal{W}_\infty \mathcal{W}_\infty^*}{\mathcal{Z}^2} + \dots$$

mentre lo sviluppo del reciproco della derivata della trasformazione è dato dalla (6.26). Il loro prodotto vale:

$$\frac{\mathcal{W}^2}{dz/d\mathcal{Z}} = \mathcal{W}_\infty^2 + \frac{\mathcal{W}_\infty^2 a_1}{\mathcal{Z}^2} + 2 \frac{\mathcal{W}_\infty(\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)}{\mathcal{Z}} + \frac{(\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)^2}{\mathcal{Z}^2} - 2 \frac{\mathcal{W}_\infty \mathcal{W}_\infty^*}{\mathcal{Z}^2} + \dots$$

e l'intera funzione integranda si ottiene moltiplicando questa serie per la trasformazione generica (6.25). Il coefficiente di \mathcal{Z}^{-1} è:

$$a_1 \mathcal{W}_\infty^2 + a_1 \mathcal{W}_\infty^2 + 2a_0 \mathcal{W}_\infty(\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty) + (\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)^2 - 2\mathcal{W}_\infty \mathcal{W}_\infty^*$$

ed il valore dell'integrale si ottiene grazie al teorema dei residui:

$$M_{z,0} = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} R^2 \Re [2\pi i (2a_1 \mathcal{W}_\infty^2 + 2a_0 \mathcal{W}_\infty (\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty) + (\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty)^2 - 2\mathcal{W}_\infty \mathcal{W}_\infty^*)]$$

Già possiamo osservare che la particolare trasformazione ha effetto sul momento aerodinamico, in particolare attraverso i due soli coefficienti a_0 ed a_1 . Ma si riesce a semplificare ulteriormente l'espressione del momento. Notiamo infatti che l'ultimo addendo è pari a V_∞^2 e quindi, moltiplicato per i , ha parte reale nulla. Inoltre il termine $\mathcal{W}_\infty^* - \mathcal{W}_\infty$ è immaginario puro, il suo quadrato è reale e quindi moltiplicato per i ha parte reale nulla. Negli altri termini sostituiamo poi $\mathcal{W}_\infty = e^{-i\alpha}$, ottenendo:

$$M_{z,0} = -\rho \frac{V_\infty^2}{2} R^2 \Re [2\pi i (2e^{-2i\alpha} a_1 - 2e^{-2i\alpha} a_0 + 2a_0)]$$

Con qualche altra semplificazione, e ricordando che la parte reale di un numero complesso è opposta alla parte immaginaria del numero stesso moltiplicato per i , si ottiene infine l'espressione per il momento aerodinamico (calcolato rispetto all'origine degli assi coordinati) esercitato dalla corrente asintotica che forma un angolo α con la direzione di portanza nulla di un profilo alare generico:

$$M_{z,0} = 2\pi\rho V_\infty^2 R^2 \Im [(e^{-2i\alpha}(a_1 - a_0) + a_0)] \quad (6.29)$$

6.10.1 Centro aerodinamico

Nell'espressione del momento rispetto all'origine compaiono i due coefficienti complessi a_0 ed a_1 , che dipendono dalla trasformazione. Notiamo però, osservando la (6.25), che il coefficiente a_0 rappresenta semplicemente una traslazione, e non è quindi altro che l'effetto della scelta del polo rispetto al quale calcolare il momento. È quindi possibile traslare l'origine delle coordinate nel punto $z_0 = a_0 - a_1$, in modo da scegliere quel particolare polo per cui $a_0 = a_1$. Così facendo nella relazione (6.29) si annulla il fattore in cui compare la dipendenza dall'angolo α .

In altre parole, se dopo aver effettuato la trasformazione del cerchio in un profilo si sposta l'origine delle coordinate mediante una traslazione di $(a_0 - a_1)$, la nuova origine viene a posizionarsi in un punto caratterizzato dalla proprietà che il momento aerodinamico calcolato rispetto a questo punto resta costante (anche se, ovviamente, diverso per ogni singolo profilo) al variare dell'incidenza. Questo punto prende il nome di centro aerodinamico del profilo, ed il momento rispetto ad esso vale

$$M_{z,ac} = 2\pi\rho V_\infty^2 R^2 \Im [a_1]$$

I profili simmetrici presentano ad incidenza nulla una distribuzione di pressione simmetrica fra dorso e ventre, e di conseguenza hanno momento aerodinamico nullo ad incidenza nulla. Quindi il loro momento calcolato rispetto al centro

aerodinamico è sempre nullo, anche se può essere diverso da zero per un profilo simmetrico se calcolato rispetto a poli diversi. Nei profili simmetrici quindi il coefficiente a_1 è un numero reale.

Il concetto di centro aerodinamico è stato ed è di grande aiuto nella progettazione aerodinamica dei velivoli, in quanto permette di rimediare all'inconveniente che il baricentro della distribuzione di pressione sul profilo (il centro di pressione) presenta notevoli escursioni al variare dell'incidenza.

Il coefficiente di momento Il coefficiente adimensionale di momento è definito dalla relazione:

$$c_m = \frac{2M_z}{\rho V_\infty^2 c^2}$$

in cui M_z è un momento per unità di apertura, e c è la corda del profilo. Risulta quindi:

$$c_{m,ac} = 4\pi \left(\frac{R}{c}\right)^2 \Im[a_1]$$

in cui, come per il coefficiente di portanza, compare il rapporto R/c .

6.11 Trasformazione di Schwarz–Christoffel

Ci rimane ora da compiere una breve rassegna delle trasformazioni conformi capaci di portare un contorno semplice del piano \mathcal{Z} , per il quale la soluzione si può conoscere in forma chiusa, in un contorno di maggior interesse pratico.

Prima di descrivere alcune trasformazioni di un cerchio in un profilo alare, che saranno considerate nei prossimi paragrafi, accenniamo qui al teorema di Schwarz–Christoffel, che è un'altra trasformazione in forma analitica (anche se, come vedremo, è in forma chiusa solo per quanto riguarda la sua derivata), che permette di trasformare una linea retta (o un cerchio) in una linea spezzata chiusa. Conoscendo il potenziale complesso della corrente uniforme parallela a una parete, potremo così immediatamente ottenere il potenziale del moto all'esterno (o all'interno) di corpi con un contorno descrivibile mediante una linea spezzata chiusa.

Il semipiano Una linea poligonale è una successione di spigoli, e quindi non deve sorprendere il fatto che il teorema di Schwarz–Christoffel costituisca la generalizzazione dell'elevamento a potenza, che come abbiamo visto in §6.3.1 è capace di trasformare un semipiano in uno spigolo, concavo o convesso.

La trasformazione $z = \mathcal{Z}^k$ trasforma il semipiano $\mathcal{Y} \geq 0$ (cioè un settore angolare di ampiezza π) del piano \mathcal{Z} nello spigolo delimitato dalle due direzioni $\theta = 0$ e $\theta = k\pi$. (Se si debba considerare l'esterno o l'interno dello spigolo, dipende da come viene resa monodroma la funzione di elevamento a potenza.) Su entrambi i lati dello spigolo, il differenziale dz ha argomento costante, quando il

punto \mathcal{Z} si muove sull'asse reale. In particolare l'argomento è nullo sul lato a $\theta = 0$, mentre sull'altro lato l'argomento salta di $(k - 1)\pi$, essendo $dz/d\mathcal{Z} \sim \mathcal{Z}^{k-1}$.

Se ne deduce quindi che la derivata della trasformazione:

$$\frac{dz(\mathcal{Z})}{d\mathcal{Z}} = (\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_0)^{k-1}$$

ha argomento costante su ognuno dei due lati di un angolo di ampiezza $k\pi$ e con vertice nel punto \mathcal{Z}_0 .

Cerchiamo ora di determinare la trasformazione dell'intero semipiano $\mathcal{Y} \geq 0$ del piano \mathcal{Z} in un poligono, nel piano z dotato di n vertici z_j , in corrispondenza di ognuno dei quali i lati hanno una rotazione di un angolo esterno $\alpha\pi$ (si veda la figura 6.12).

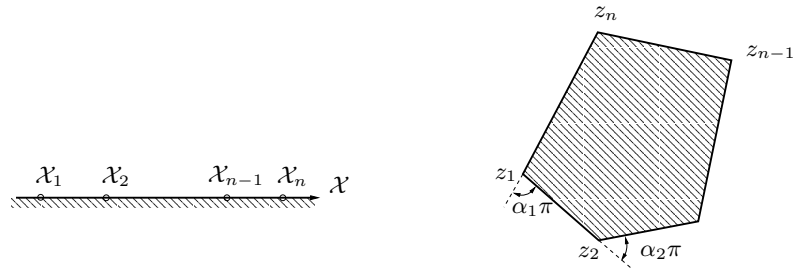


Figura 6.12 Trasformazione di un poligono nel semipiano $\mathcal{Y} \geq 0$: agli n vertici z_j corrispondono altrettanti punti \mathcal{X}_j sull'asse reale del piano \mathcal{Z} .

Facciamo corrispondere, in un modo per ora incognito, ai vertici z_j altrettanti punti \mathcal{X}_j posti sull'asse reale del piano \mathcal{Z} , in modo che $\mathcal{X}_1 < \mathcal{X}_2 < \dots < \mathcal{X}_n$. Indicando con \mathbb{C} una costante complessa di proporzionalità, la derivata della trasformazione cercata è:

$$\frac{dz(\mathcal{Z})}{d\mathcal{Z}} = \mathbb{C} \prod_{j=1}^n (\mathcal{Z} - \mathcal{X}_j)^{\alpha_j}. \tag{6.30}$$

Si vede infatti che, percorrendo l'asse reale del piano \mathcal{Z} da destra a sinistra, l'argomento della derivata della trasformazione salta da zero a $\alpha_n\pi$ in \mathcal{Z}_n , da $\alpha_n\pi$ a $(\alpha_n + \alpha_{n-1})\pi$ in \mathcal{Z}_{n-1} , e così via. La condizione di chiusura del poligono richiede che, dopo aver percorso l'intero asse reale, la somma dei salti di argomento sia esattamente pari a -2π . Questo si traduce nella condizione:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = -2. \tag{6.31}$$

La trasformazione $z(\mathcal{Z})$ cercata è l'integrale della produttoria (6.30) ora costruita, che però non è completamente determinata, in quanto non si conoscono le posizioni dei punti \mathcal{X}_j . Mentre le rotazioni in corrispondenza degli spigoli sono note, e quindi gli esponenti α_j determinano angoli corretti fra ogni coppia di lati del poligono, le posizioni dei punti \mathcal{X}_j determinano implicitamente le lunghezze dei lati del poligono. La posizione degli \mathcal{X}_j può quindi essere trovata richiedendo che la lunghezza di tutti i lati risulti corretta. A questo scopo è sufficiente integrare la trasformazione da un punto \mathcal{Z}_j al successivo punto \mathcal{Z}_{j+1} per ottenere la lunghezza l_j del lato j -simo:

$$l_j = |z_{j+1} - z_j| = \left| \int_{\mathcal{Z}_j}^{\mathcal{Z}_{j+1}} \frac{dz}{d\mathcal{Z}} d\mathcal{Z} - z_j \right|$$

Si può quindi iniziare fissando a piacere la posizione del vertice z_1 e la corrispondente posizione del punto \mathcal{Z}_1 . Dopo di che, la lunghezza del primo lato può essere calcolata in funzione dell'estremo incognito di integrazione \mathcal{Z}_2 , che si sceglie in modo che la distanza l_1 sia pari alla corretta lunghezza del primo lato del poligono. Il calcolo degli integrali corrispondenti ai lati successivi permette di stabilire completamente la trasformazione. Grazie alle n condizioni che discendono dalla richiesta che ogni lato sia della corretta lunghezza, possiamo infatti trovare le n costanti reali \mathcal{Z}_j , mentre la costante complessa \mathbb{C} lascia due gradi di libertà in più, che corrispondono però semplicemente alla scelta dell'origine.

Il cerchio La trasformazione di una linea poligonale in una circonferenza si effettua utilizzando la medesima trasformazione (6.30) che trasforma anche una poligonale nell'asse reale del piano complesso.

Si può dimostrare questo risultato operando una trasformazione preliminare del cerchio nel semipiano. Detto $\zeta = e^{i\phi}$ il punto generico sulla circonferenza unitaria, la trasformazione che porta il semipiano $\mathcal{Y} \geq 0$ del piano \mathcal{Z} nel cerchio unitario è

$$\mathcal{Z} = -i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

La derivata della trasformazione di Schwarz–Christoffel può quindi essere espressa con il prodotto delle derivate:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{d\mathcal{Z}} \frac{d\mathcal{Z}}{d\zeta}$$

Il secondo fattore si può calcolare immediatamente, e vale

$$\frac{d\mathcal{Z}}{d\zeta} = \frac{-2i}{(\zeta + 1)^2}$$

La trasformazione diviene:

$$\frac{dz}{d\mathcal{Z}} = \mathbb{C} \prod_{j=1}^N \left(-i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - \mathcal{Z}_j \right)^{\alpha_j}$$

Tutti i termini in parentesi possono essere scritti alternativamente come

$$\frac{(-i - \mathcal{Z}_j)\zeta - (\mathcal{Z}_j - i)}{\zeta + 1} = B \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta + 1}$$

in cui B è un'opportuna costante.

La trasformazione complessiva si scrive dunque:

$$\frac{dz}{d\zeta} = A' \frac{1}{(\zeta + 1)^2} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta + 1} \right)^{\alpha_j}$$

Ricordiamo ora la condizione di chiusura del poligono, per cui la somma delle costanti α_j deve essere uguale a -2 . Questo permette la semplificazione dei termini contenenti $(\zeta + 1)$, arrivando quindi a:

$$\frac{dz}{d\zeta} = A' \prod_{j=1}^N (\zeta - \zeta_j)^{\alpha_j}$$

che è una espressione del tutto analoga alla (6.30) già ottenuta per il semipiano.

6.12 Profili di Joukowski

Una trasformazione, nota in forma analitica, che porta la circonferenza in un contorno adatto ad essere usato come profilo alare è dovuta a Joukowski. Ne risultano i cosiddetti profili di Joukowski, che sono stati effettivamente utilizzati in aeronautica all'inizio del secolo scorso, anche se oggi l'interesse di questa trasformazione rimane solo concettuale, a causa dei limiti di questa famiglia di profili.

Dopo aver completamente caratterizzato la corrente attorno al cerchio, in §6.7 abbiamo imparato a trasformarla, grazie alla trasformazione (6.15), in quella intorno ad una lastra piana. L'infinito di velocità che si genera sul bordo di attacco appuntito della lastra piana costituisce il problema principale dell'utilizzo di una lastra piana come profilo alare. Proviamo allora a modificare leggermente la trasformazione (6.15): esaminando la sua derivata, abbiamo già osservato che essa è singolare nei punti $\mathcal{Z} = \pm 1$, corrispondenti agli spigoli $z = \pm 2$ della lastra piana. Cerchiamo allora, lasciando fissa sul cerchio la singolarità in $\mathcal{Z} = +1$ (che corrisponde al bordo di uscita del profilo), di spostare leggermente all'interno del cerchio l'altra singolarità. In questo modo, potremo ottenere nel piano z un corpo non troppo diverso dalla lastra piana, ma dotato di un solo spigolo al bordo di uscita, mentre il bordo di attacco sarà arrotondato, grazie al fatto che la trasformazione è diventata conforme in questo punto.

Un primo tentativo consiste nel modificare la derivata della trasformazione (6.15) nel modo seguente:

$$\frac{dz}{d\mathcal{Z}} = \left(1 + \frac{a}{\mathcal{Z}}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{Z}}\right)$$

dove a è una costante complessa di modulo minore o uguale ad 1. Le due singolarità della trasformazione si trovano ora nei punti $+1$ e $-a$ del piano complesso, e si riottiene la trasformazione della circonferenza nella lastra piana quando $a = 1$. Moltiplicando i due fattori ed integrando, si ottiene però una trasformazione del tipo:

$$z(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + (a - 1) \log \mathcal{Z} + \frac{a}{\mathcal{Z}}$$

in cui il termine logaritmico non è accettabile, perché la trasformazione non avrebbe l'andamento della (6.25). Occorre quindi aggiungere un ulteriore grado di libertà per poter mantenere la seconda singolarità all'interno del cerchio ma senza il termine logaritmico. Esaminiamo allora la trasformazione seguente, in cui compaiono due costanti complesse a ed b , per ora indeterminate:

$$z = \mathcal{Z} + \frac{a}{\mathcal{Z} + b}. \quad (6.32)$$

La sua derivata è:

$$\frac{dz}{d\mathcal{Z}} = 1 - \frac{a}{(\mathcal{Z} + b)^2}$$

e si annulla quando $(\mathcal{Z} + b)^2 - a = 0$, ovvero nei due punti $\mathcal{Z}_{1,2} = -b \pm \sqrt{a}$. Imponendo che la radice \mathcal{Z}_2 sia uguale ad 1 si ottiene il legame $a = (1 + b)^2$ fra le due costanti. Con questo legame la seconda singolarità si trova nel punto $\mathcal{Z}_1 = -(1 + 2b)$.

La trasformazione (6.32), tenendo conto del legame ora determinato fra le due costanti libere, si scrive allora in funzione dell'unico parametro complesso a , come:

$$z = \mathcal{Z} + \frac{(1 + b)^2}{\mathcal{Z} + b}. \quad (6.33)$$

La trasformazione (6.33), al variare del parametro complesso b , descrive la famiglia dei profili di Joukowski. In particolare quando il secondo punto singolare sta sulla circonferenza unitaria, il profilo corrispondente è un profilo senza spessore, costituito da un arco di circonferenza. La figura 6.13 riporta un particolare profilo, disegnato con la trasformazione (6.33) e con secondo punto singolare in $-0.9 + i0.10$, che corrisponde a $b = -0.05 - i0.05$. La corda se definita come il massimo segmento inscritto nel profilo è lunga 3.8138.

Scelto un valore del parametro b e quindi individuato un particolare profilo all'interno della famiglia, oltre alla trasformazione che porta il cerchio nel profilo è noto in forma chiusa tutto il campo di moto attorno ad esso. La velocità complessa, in accordo con la (6.3b), si ottiene dividendo la velocità nel piano del cerchio per la derivata $dz/d\mathcal{Z}$, calcolabile dall'espressione (6.33) della trasformazione. L'integrale che fornisce la forza aerodinamica può dapprima essere scritto in funzione di \mathcal{Z} , e poi calcolato all'infinito mediante il teorema dei residui. La portanza si calcola direttamente sfruttando il teorema di Kutta-Joukowski, ed è identica all'espressione (6.17) già ricavata per la lastra piana, in cui non compare esplicitamente alcuna dipendenza dalla trasformazione. La dipendenza

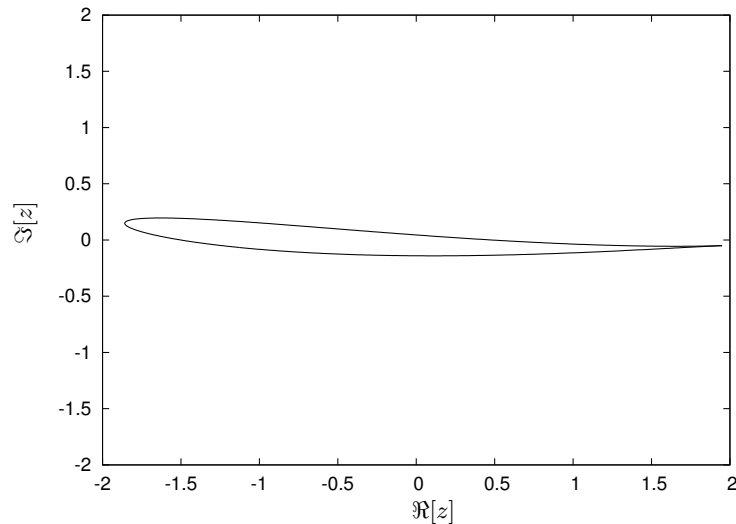


Figura 6.13 Profilo di Joukowski ottenuto con la trasformazione (6.33) e con secondo punto sigolare in $-0.9 + i0.1$, che corrisponde a $b = -0.05 - i0.05$. Si noti che la direzione di portanza nulla coincide con l'asse x .

dal particolare profilo compare considerando il coefficiente di portanza; il fattore $4/c$ e l'angolo α_0 di portanza nulla si calcolano immediatamente conoscendo la geometria del profilo.

Un diverso sistema di riferimento Spesso la trasformazione (6.33) viene scritta con una scelta diversa del sistema di coordinate, in cui le due singolarità sono posizionate sempre sull'asse reale, e di conseguenza la circonferenza non è più simmetrica rispetto all'asse \mathcal{X} . In questo modo si riesce effettivamente a scrivere la trasformazione in modo più semplice, ma l'espressione del potenziale complesso nel piano del cerchio diventa più complicata, e soprattutto dipende dalla trasformazione. Come abbiamo già discusso in §6.6, invece, fissando una volta per tutte nel punto $\mathcal{Z} = 1$ il punto sulla circonferenza corrispondente al bordo di uscita del profilo, si ha il vantaggio che tutti i risultati per il moto attorno al cerchio non dipendono dal profilo, così che i risultati relativi al profilo dipendono solo dalla derivata della trasformazione.

Limiti dei profili Joukowski I profili di Joukowski sono interessanti in quanto permettono una soluzione esatta in forma semplice, ma risultano di scarsa utilità dal punto di vista pratico. L'unico grado di libertà a disposizione (la posizione del secondo punto singolare) non consente margini di manovra sufficienti per poter modificare l'andamento del coefficiente di pressione lungo il profilo. Ma il prin-

Il principale difetto dei profili di Joukowski consiste nel loro bordo di uscita cuspidato, che si può osservare nell'esempio di figura 6.13: questo è una notevole difficoltà strutturale nella realizzazione. Sviluppando in serie di Taylor in prossimità del bordo di uscita la trasformazione (6.33), si vede che localmente $z \sim (\mathcal{Z} - 1)^2$, dal momento che la derivata prima della trasformazione è nulla in quel punto. Di conseguenza l'angolo π sul cerchio nel punto $\mathcal{Z} = +1$ viene moltiplicato per 2 nel punto corrispondente sul profilo, come nel caso della lastra piana: l'angolo (esterno) al bordo di uscita è esattamente 2π .

6.13 Profili di Karman–Trefftz

Il principale difetto dei profili alari della famiglia Joukowski, cioè il bordo di uscita cuspidato, può essere rimosso utilizzando una famiglia lievemente diversa di trasformazioni, che dà origine ai cosiddetti profili di Karman–Trefftz.

Essi derivano dalla modifica della trasformazione di Joukowski con lo scopo di introdurre la possibilità di scegliere l'angolo al bordo di uscita del profilo, che per la famiglia Joukowski è sempre 2π . A tal fine è utile riscrivere la trasformazione di Joukowski (6.33) come una successione di trasformazioni, in modo da isolare e quindi poter modificare l'elevamento al quadrato cui è dovuta la cuspidate al bordo di uscita. Scomporremo quindi nel seguito la (6.33) dapprima in una trasformazione lineare fratta che espande il cerchio in un settore infinito, poi un elevamento a potenza che modifica l'ampiezza del settore angolare, e infine una seconda trasformazione lineare fratta per tornare al profilo.

Con una prima trasformazione dal piano \mathcal{Z} del cerchio ad un piano intermedio \mathcal{Z}_1 , si portano le due singolarità $-(1 + 2b) = c$ ed 1 della famiglia dei profili di Joukowski nei punti ∞ e 0:

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{Z} - 1}{\mathcal{Z} - c}$$

Si devono ora alterare gli angoli di questo settore angolare che ha il vertice nell'origine del piano \mathcal{Z}_1 . La trasformazione di Joukowski modifica gli angoli esattamente di un fattore 2 e quindi consiste in un elevamento al quadrato. Se vogliamo introdurre un grado di libertà in più, possiamo considerare un elevamento a potenza secondo un esponente (reale) k , che determina l'angolo al bordo di uscita del profilo:

$$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_1^k$$

Ci si riporta infine dal piano ausiliario \mathcal{Z}_2 al piano z del profilo riposizionando i due punti singolari 0 ed ∞ in due punti al finito attraverso una nuova trasformazione lineare fratta:

$$z = \frac{A + B\mathcal{Z}_2}{C + D\mathcal{Z}_2} \quad (6.34)$$

in cui i coefficienti A , B , C e D sono ancora indeterminati.

Per determinare completamente la trasformazione ottenuta componendo questi tre passi, occorre (si veda §6.2.3) imporre la corrispondenza dei punti all'infinito e della velocità complessa all'infinito. Quando $\mathcal{Z} \rightarrow \infty$, sia \mathcal{Z}_1 che \mathcal{Z}_2 tendono ad 1, e quindi nella (6.34) deve essere $C = -D$. Dividendo poi numeratore e denominatore per C , si ottiene:

$$z = \frac{E + F\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_2 - 1}$$

Affinché anche la velocità complessa all'infinito coincida, si deve imporre che gli sviluppi in serie di z e \mathcal{Z} siano coincidenti fino al secondo ordine. Lo sviluppo della prima trasformazione è:

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{1 - 1/\mathcal{Z}}{1 - c/\mathcal{Z}} = \left(1 - \frac{1}{\mathcal{Z}}\right) \left(1 + \frac{c}{\mathcal{Z}} + \dots\right) = 1 - \frac{1}{\mathcal{Z}} + \frac{c}{\mathcal{Z}} + \dots$$

Lo sviluppo di \mathcal{Z}_2 diviene quindi:

$$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_1^k = 1 + k\frac{c-1}{\mathcal{Z}} + \dots$$

Infine risulta:

$$z = \frac{E + F\left(1 + k\frac{c-1}{\mathcal{Z}} + \dots\right)}{1 + k\frac{c-1}{\mathcal{Z}} - 1} = \mathcal{Z} \frac{E + F + \dots}{(c-1)k}$$

A meno di termini di ordine superiore, la derivata della trasformazione vale quindi:

$$\frac{dz}{d\mathcal{Z}} = \frac{E + F}{(c-1)k}$$

e se si vuole la coincidenza delle velocità all'infinito tale derivata deve essere unitaria. Ne segue la relazione:

$$E = (c-1)k - F$$

Sostituendo questa espressione per la costante E , ed esprimendo l'intera trasformazione, si ottiene in definitiva per la trasformazione di Karman-Trefftz la forma:

$$z(\mathcal{Z}) = F + \frac{k(c-1)}{\left(\frac{\mathcal{Z}-1}{\mathcal{Z}-c}\right)^k - 1} \quad (6.35)$$

L'intera trasformazione risulta determinata a meno della costante complessa F , che però corrisponde ad una semplice traslazione del sistema di riferimento, ed in particolare coincide con la posizione nel piano z del bordo di uscita del profilo.

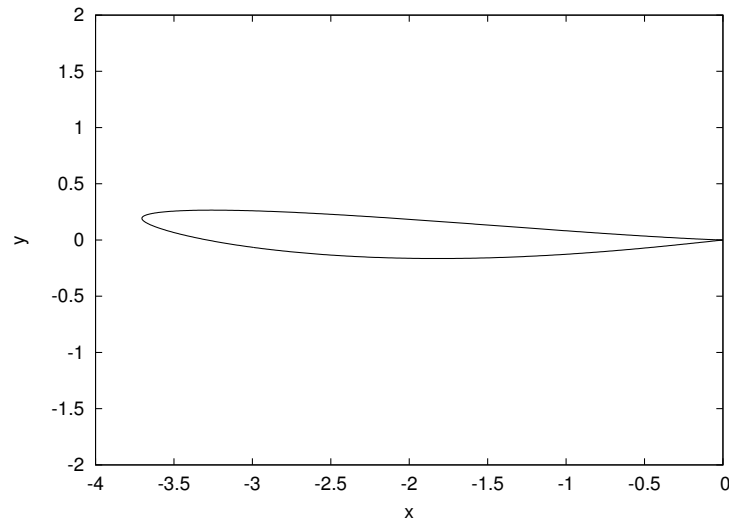


Figura 6.14 Profilo di Karman–Trefftz, ottenuto mediante la trasformazione (6.35) con $F = 0$. Il secondo punto singolare è in $c = -0.9 + i0.10$ e l'angolo al bordo di uscita di 10 gradi, cui corrisponde $k = 1.9444$.

I parametri liberi della famiglia di profili di Karman–Trefftz sono dunque tre: la parte reale e la parte immaginaria della costante complessa c , ed il numero reale k , che determina un bordo di uscita del profilo con dorso e ventre che formano un angolo relativo di $k\pi$. Il caso $k = 2$ corrisponde nuovamente alla famiglia a due parametri dei profili di Joukowski, il che costituisce un risultato non banale in quanto le due trasformazioni sono state ricavate in modo sostanzialmente diverso.

La figura 6.14 mostra un esempio di profilo appartenente alla famiglia Karman–Trefftz: in questo caso la costante F è stata posta uguale a zero, così che il bordo di uscita del profilo si trova nell'origine del piano z . Il profilo corrisponde alla trasformazione con secondo punto singolare $c = -0.9 + i0.1$, ed angolo al bordo di uscita di 10 gradi. La corda, definita come massimo segmento inscritto nel profilo, è di 3.7094

6.14 Algoritmo di Theodorsen per i profili alari

Sono pochi i casi, discussi per esempio in §6.12 e §6.13, in cui si conosce in forma analitica la trasformazione della circonferenza in un profilo alare. Per tutti gli altri profili si rende necessario il calcolo numerico della trasformazione.

Questo calcolo risulta ancor oggi di qualche interesse applicativo. È vero infatti che, in tempi recenti, i limiti delle soluzioni bidimensionali dell'equazione di Laplace ed il contemporaneo sviluppo della potenza del calcolo automatico hanno

reso di uso corrente modelli fisico-matematici più avanzati di quello di fluido ideale in moto irrotazionale. Ma, nonostante questo, determinare la trasformazione del cerchio nel profilo è ancora un'operazione attuale, in quanto permette contemporaneamente di determinare una griglia di calcolo intorno all'oggetto stesso. Tale griglia, se ben costruita, permette notevoli semplificazioni e risparmi nei calcoli per la soluzione di problemi più complessi.

Il metodo di Theodorsen costituisce una procedura iterativa per la determinazione della trasformazione di un profilo alare generico in un cerchio, e si svolge in due passi. In un primo passo, una pre-trasformazione determinata analiticamente porta il profilo, di forma arbitraria, ad assumere una forma il più possibile simile a quella circolare e, soprattutto, priva di spigoli; in un secondo passo, attraverso una procedura iterativa e numerica, si trasforma conformemente questo nuovo contorno (che prende il nome di quasi-cerchio) in un cerchio, attorno al quale la soluzione analitica è nota.

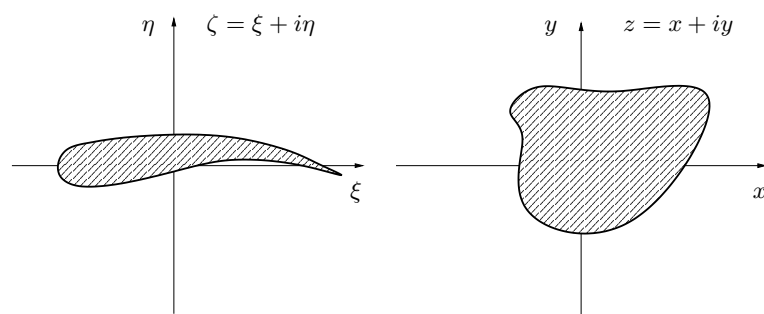


Figura 6.15 Metodo di Theodorsen: passaggio mediante una pre-trasformazione di Karman-Trefftz dal profilo nel piano ζ al quasi-cerchio del piano z .

La pre-trasformazione Il primo dei due passi che costituiscono l'intera sequenza (figura 6.15) è rappresentato dalla pre-trasformazione che porta il profilo alare di forma generica, disegnato nel piano ζ in una figura del piano ausiliario z , il quasi-cerchio, il più possibile prossima alla forma circolare. L'obiettivo della pre-trasformazione consiste nell'eliminare lo spigolo del profilo, e può essere conseguito utilizzando una trasformazione di Kármán-Trefftz (6.35) in cui il parametro k si sceglie in funzione dell'angolo formato dal profilo al bordo di uscita. Naturalmente, dato che il profilo di partenza non è un profilo di Kármán-Trefftz, la trasformazione non consente di ottenere un cerchio; scegliendo però opportunamente i parametri liberi, si potrà arrivare ad un quasi-cerchio abbastanza vicino alla forma del cerchio ed in particolare senza spigoli. La pre-trasformazione è un passo importante nell'intera procedura, perché le caratteristiche di convergenza dell'algoritmo iterativo successivo sono ovviamente influenzate dalla qualità della soluzione iniziale.

Una procedura iterativa Il secondo passo dell'algoritmo di Theodorsen, illustrato graficamente nella figura 6.16, è propriamente numerico, dal momento che opera su una rappresentazione discretizzata della trasformazione, ed ha lo scopo di trasformare il quasi-cerchio in un cerchio vero e proprio.

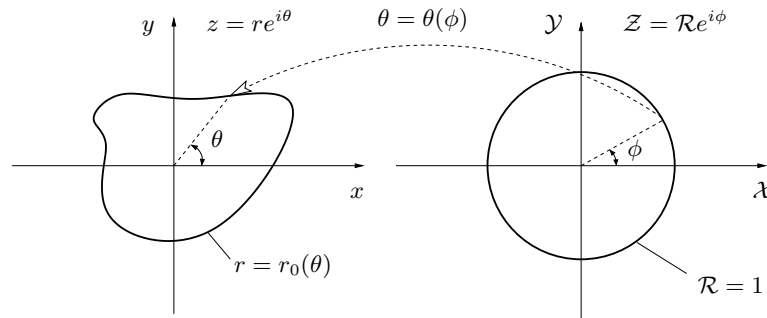


Figura 6.16 Metodo di Theodorsen: passaggio dal quasi-cerchio del piano z al cerchio del piano \mathcal{Z} .

Sia z il piano del quasi-cerchio, e \mathcal{Z} il piano del cerchio; con $z = r e^{i\theta}$ e $\mathcal{Z} = R e^{i\phi}$ indichiamo i punti nei due piani. Il quasi-cerchio è descritto da una equazione del tipo $r = r_0(\theta)$, che è nota a seguito della pre-trasformazione, ed in cui la funzione $r_0(\theta)$ non è molto diversa da una costante, se la pre-trasformazione è stata compiuta correttamente. Il problema consiste nel determinare una funzione di variabile complessa $z(\mathcal{Z})$ che sia analitica all'esterno del cerchio $|\mathcal{Z}| = 1$, e tale che $z(\mathcal{Z}) \sim \mathcal{Z}$ quando $z \rightarrow \infty$; inoltre sulla circonferenza unitaria del piano \mathcal{Z} deve essere:

$$z(e^{i\phi}) = r_0(\theta) e^{i\theta(\phi)}$$

Dal momento che l'equazione del quasi-cerchio $r = r_0(\theta)$ è nota, il problema consiste nel determinare la funzione $\theta = \theta(\phi)$ sul cerchio di raggio unitario, che permette di conoscere l'intera corrispondenza fra punti del cerchio e del quasi-cerchio.

Utilizzeremo la formula di Schwarz (6.8); grazie ad essa, conoscendo la parte reale di una qualsiasi funzione analitica $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ sul contorno della circonferenza di raggio unitario, siamo in grado di calcolare l'intera funzione. La funzione $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ che utilizziamo è la seguente:

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \log \frac{z}{\mathcal{Z}}$$

Sulla circonferenza unitaria questa funzione ha parte reale pari a $\log r$ mentre la parte immaginaria eguaglia la differenza $\theta - \phi$ degli argomenti dei punti z e \mathcal{Z} .

Avviamo dunque la procedura iterativa con una prima stima della funzione $\theta = \theta(\phi)$, che descrive la corrispondenza fra i due contorni: in prima battuta, per

esempio, scegliamo $\theta^{(0)}(\phi) = \phi$. Conoscendo la corrispondenza fra i due contorni, dall'equazione del quasi-cerchio $r = r_0(\theta)$ si può calcolare $r(\phi) = r_0[\theta^{(0)}(\phi)]$. Questa quantità permette il calcolo della parte reale della funzione $\log(z/\mathcal{Z})$ sul cerchio $|\mathcal{Z}| = 1$, che è infatti:

$$\Re^{(0)} \left[\log \frac{z}{\mathcal{Z}} \right] = \log \left\{ r_0 \left(\theta^{(0)}(\phi) \right) \right\}$$

Conoscendo ora $\Re^{(0)}[\mathcal{F}]$, la formula di Schwarz consente il calcolo dell'intera funzione \mathcal{F} al passo 0, e quindi anche di $\Im^{(0)}[\mathcal{F}]$, cioè della sua parte immaginaria, pari a $\theta - \phi$.

Si può così avviare una seconda iterazione, in cui la corrispondenza fra i due contorni può essere approssimata con

$$\theta^{(1)}(\phi) = \phi + \Im^{(0)} \left[\log \frac{z}{\mathcal{Z}} \right].$$

L'intero procedimento viene così ripetuto, per arrivare ad una $\Im^{(1)}[\mathcal{F}]$ con cui si può correggere la funzione $\theta = \theta(\phi)$. La procedura può essere convenientemente iterata fino a convergenza. La corrispondenza fra i punti del quasi-cerchio e quelli della circonferenza unitaria, alla generica iterazione n -sima, sarà data da:

$$\theta^{(n)}(\phi) = \theta^{(n-1)}(\phi) + \Im^{(n-1)} \left[\log \frac{z}{\mathcal{Z}} \right].$$

Per quanto riguarda l'applicazione pratica di questa procedura, abbiamo visto in §6.4 che l'uso della formula di Schwarz equivale al calcolo dei coefficienti della serie di Fourier della parte reale (nota) della funzione incognita. La possibilità di evitare il calcolo di integrali singolari, e di utilizzare algoritmi efficienti di Fast Fourier Transform rende preferibile questo approccio nelle applicazioni. In quest'ultimo caso è necessario effettuare le iterazioni utilizzando punti equispaziati rispetto a θ .

Le proprietà di convergenza dell'algoritmo di Theodorsen dipendono da quanto il quasi-cerchio approssima la forma circolare. Se non se ne discosta troppo, la procedura converge, e l'errore decresce con un andamento esponenziale rispetto al numero di iterazioni.

6.15 Teoria delle *free streamlines*

Se il corpo di cui interessa studiare le azioni aerodinamiche non ha la forma di un profilo alare, cioè non ha un bordo di uscita appunto ben identificabile, il problema di determinare il punto di distacco della scia non è risolvibile senza informazioni di tipo viscoso.

Una classe particolare di corpi non aerodinamici (o corpi tozzi) è quella di corpi il cui contorno è costituito da una spezzata. In questi casi particolari il problema di Laplace si può ancora risolvere senza bisogno di un'analisi di tipo

viscoso. I risultati sono però spesso di validità più limitata rispetto a quelli discussi nei Capitoli precedenti. Occorre ricordare però che questo tipo di analisi è stato fondamentale agli albori dell'Aerodinamica, con i contributi di Kirchoff (1861), Rayleigh (1876), Planck (1884) e Levi-Civita (1907).

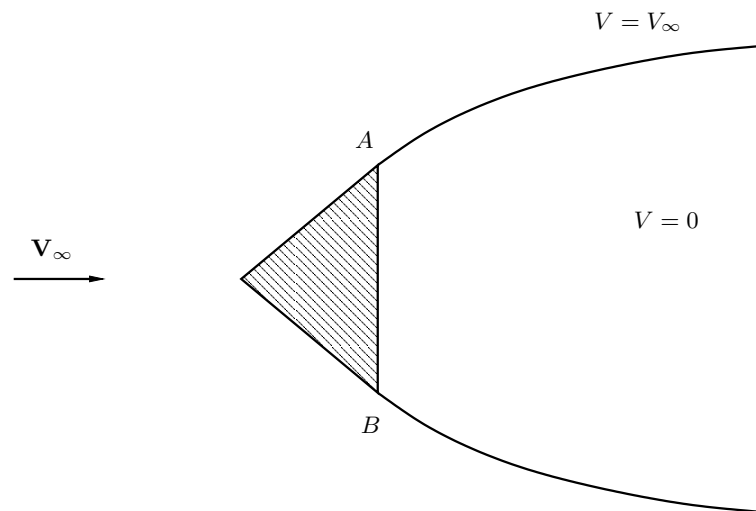


Figura 6.17 Flusso irrotazionale intorno ad un corpo tozzo dotato di spigoli, da cui si distacca la scia.

Quando il contorno del corpo presenta degli spigoli, come i punti A e B del corpo a sezione triangolare rappresentato in figura 6.17, si può ritenere che la scia si distacchi dal corpo proprio in corrispondenza degli spigoli: anche se evidentemente lo spessore della scia non è infinitesimo, la posizione del punto di distacco è nota. Una ulteriore, forte ipotesi semplificativa consiste nel ritenere che, all'interno della scia, la velocità sia nulla. Da questo segue che la pressione all'interno della scia è costante, e di conseguenza, per la continuità della pressione sui due lati della scia, anche sul lato esterno della scia la pressione deve essere costante. Dal momento che all'esterno della scia il moto è irrotazionale, vale il teorema di Bernoulli:

$$p_\infty + \rho \frac{V_\infty^2}{2} = p_e + \rho \frac{V_e^2}{2}$$

Ne segue che, essendo costante ed uguale a quella della scia la pressione p_e , deve essere tale anche la velocità V_e dal lato esterno. Sul bordo esterno della scia, quindi, il modulo V della velocità resta costante e pari al valore noto V_∞ . La velocità in questa schematizzazione non è però più continua attraverso la scia stessa.

Con le variabili complesse, il problema si affronta utilizzando un contorno esteso anche alla scia, la cui forma è incognita. Sul tratto di contorno corrispon-

dente al corpo, di geometria nota, è incognito il modulo ma si conosce l'argomento della velocità complessa, mentre sul tratto di contorno corrispondente alla scia, di geometria incognita, è incognito l'argomento ma si conosce il modulo della velocità complessa, che è inoltre costante.

La procedura di soluzione si basa sull'uso di una variabile ausiliaria ω , legata alla velocità complessa da:

$$e^{-i\omega} = Ve^{-i\theta} \quad (6.36)$$

Basta prendere il logaritmo dell'espressione precedente per vedere che $\Re[\omega] = \theta$ mentre $\Im[\omega] = \log V$. Si può ora utilizzare la trasformazione conforme che porta il corpo (più la scia) nel piano z in un semicerchio nel piano \mathcal{Z} , facendo in modo che alla semicirconferenza corrisponda il contorno vero e proprio del corpo, e al diametro corrisponda la scia. Analogamente a quanto già visto studiando il metodo di Schwarz-Christoffel, se la forma del corpo è poligonale θ è costante a tratti. Quindi nel piano della semicirconferenza $\Re[\omega] = \theta$ è costante a tratti e noto sulla parte della semicirconferenza che corrisponde al corpo, mentre $\Im[\omega] = \log V$ è costante e noto sul diametro, ovvero sulla parte della semicirconferenza che corrisponde alla scia.

