

Metodi risolutivi per l'equazione di Laplace

Esistono numerose tecniche risolutive per l'equazione di Laplace, che gode della fondamentale proprietà di essere un'equazione lineare. Sfruttando allora il principio di sovrapposizione degli effetti si possono costruire nuove soluzioni grazie alla opportuna combinazione lineare di soluzioni elementari, comunque esse siano state ricavate.

Indice del capitolo

5.1	Variabili separabili: coordinate cartesiane	66
5.1.1	Semipiano: condizioni di Dirichlet	67
5.1.2	Semipiano: condizioni di Neumann	68
5.2	Variabili separabili: coordinate polari	68
5.2.1	Cerchio: condizioni di Dirichlet	70
5.2.2	Cerchio: condizioni di Neumann	71
5.2.3	Spicchio infinito: condizioni di Dirichlet	72
5.3	Sovrapposizione di correnti elementari	73
5.3.1	Applicazione: cilindro indefinito	76
5.3.2	Applicazione: cilindro indefinito con circolazione	79
5.4	Principio delle immagini	80
5.4.1	Applicazione: cilindro indefinito	82
5.5	Metodo della funzione di Green	82
5.5.1	Funzione di Green di spazio libero	84
5.5.2	Applicazione: cilindro indefinito	86
5.5.3	Andamento del potenziale all'infinito: caso 2d	87
5.5.4	Andamento del potenziale all'infinito: caso 3d	90
5.5.5	Altre conseguenze della formula di Green	90
5.6	Soluzioni numeriche con la formula di Green	91
5.6.1	L'infinito nel problema esterno	92
5.6.2	Scia dietro ad un corpo portante	93
5.6.3	Sovrapposizione di singolarità virtuali	94
5.7	Metodi inversi (metodo di Hess & Smith)	96

5.1 Variabili separabili: coordinate cartesiane

Una delle tecniche per risolvere l'equazione di Laplace consiste nel verificare se esistano soluzioni composte dal prodotto di funzioni che, singolarmente, dipendono da una sola delle variabili indipendenti del problema. Per il caso bidimensionale, ed in coordinate cartesiane, l'equazione di Laplace si scrive:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Verifichiamo allora se esistono soluzioni non identicamente nulle del tipo:

$$\varphi(x, y) = F(x) G(y).$$

Sostituendo soluzioni di questo tipo nell'equazione, e dividendo poi per il prodotto FG , si ha:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} = 0.$$

Con questo siamo riusciti a separare le variabili: infatti, perché la relazione precedente abbia senso, i due addendi, funzioni il primo solo di x ed il secondo solo di y , non possono che essere costanti. Inoltre tali costanti devono essere eguali ed opposte per la relazione data dall'equazione stessa. Si ottengono quindi due equazioni:

$$\frac{F''}{F} = K, \quad \frac{G''}{G} = -K$$

in cui K è una costante reale, che può essere positiva, negativa o nulla.

Si tratta di due equazioni differenziali ordinarie, a coefficienti costanti e quindi con soluzioni date da esponenziali. Se $K \neq 0$, la soluzione della prima, a meno di costanti moltiplicative che in questo momento non interessano data la linearità del problema, è del tipo

$$F(x) \sim e^{k_1 x}$$

in cui k_1 è una costante. Mediante la sostituzione di questa soluzione nell'equazione si vede che deve essere $k_1 = \pm\sqrt{K} = \pm k$, in cui k è una ulteriore costante, che assume valore reale se $K > 0$, o immaginario puro se $K < 0$. Un ragionamento analogo per la soluzione generale $G(y) = e^{k_2 y}$ porta a concludere che $k_2 = \pm\sqrt{-K} = \pm ik$.

Il caso particolare di $K = 0$ ha soluzioni che non sono comprese fra gli esponenziali. Le due soluzioni particolari delle equazioni $F'' = 0$ e $G'' = 0$ sono facilmente determinabili e pari a:

$$F_0(x) = c_1 + c_2 x, \tag{5.1a}$$

$$G_0(y) = c_3 + c_4 y. \quad (5.1b)$$

Oltre ai termini zero, la soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate cartesiane contiene quindi una sovrapposizione lineare di soluzioni elementari del tipo:

$$\varphi(x, y) = e^{\pm kx} e^{\pmiky} \quad (5.2)$$

che andranno ulteriormente specificate mediante le condizioni al contorno. In generale però richiederemo al potenziale la convergenza all'infinito: ciò significa che le derivate di φ devono tendere a zero all'infinito.

5.1.1 Semipiano: condizioni di Dirichlet

Sia nota una condizione al contorno

$$\varphi(0, y) = g(y)$$

sulla retta $x = 0$ del semipiano $x \geq 0$. La soluzione è la più generale combinazione lineare di quelle accettabili fra le soluzioni elementari (5.2), pesate attraverso opportuni coefficienti.

Le soluzioni accettabili per questo specifico problema sono anzitutto quelle in cui la costante complessa k assume solo valori reali, per evitare la divergenza della soluzione quando $y \rightarrow \pm\infty$. Indichiamo dunque con a una costante reale. Occorre anche che la soluzione si mantenga finita quando $x \rightarrow +\infty$, e questo porta ad escludere dalla soluzione tutti i termini del tipo $e^{+|a|x}$. La soluzione più generale quindi è

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}(a) e^{-|a|x} e^{ia y} da \quad (5.3)$$

I coefficienti $\mathbb{C}(a)$ possono essere calcolati utilizzando l'informazione della condizione al contorno:

$$g(y) = \varphi(0, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}(a) e^{ia y} da$$

Questa relazione è una trasformata di Fourier, e può quindi essere invertita per esprimere i coefficienti in funzione della condizione al contorno:

$$\mathbb{C}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-ia y} dy$$

I coefficienti $\mathbb{C}(a)$, inseriti nell'espressione della soluzione, permettono quindi di valutarla in forma chiusa:

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y') e^{-ia y'} dy' \right) e^{-|a|x} e^{ia y} da$$

Questo metodo (metodo di Fourier) consente quindi di calcolare la soluzione in forma chiusa con una trasformazione di Fourier della condizione al contorno. Come vedremo in seguito, questo risultato è di validità generale: la medesima operazione è possibile sia nel caso in cui viene assegnata sul contorno una condizione di Neumann, sia per geometrie diverse da quella del semipiano.

5.1.2 Semipiano: condizioni di Neumann

La soluzione del problema di Laplace con condizioni di Neumann è, per la stessa geometria, in gran parte analoga. Supponiamo infatti che la condizione al contorno assegnata sia

$$\varphi_n(0, y) = g(y)$$

sulla retta $x = 0$ del semipiano $x \geq 0$. La derivata normale (ovvero, in questo caso, rispetto a x) della più generale fra le soluzioni accettabili (5.3) è:

$$\varphi_x(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -|a| \mathbb{C}(a) e^{-|a|x} e^{iay} da$$

e quindi la condizione al contorno diviene:

$$g(y) = \varphi_x(0, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -|a| \mathbb{C}(a) e^{iay} da$$

Anche questa relazione è una trasformata di Fourier; invertendola si ottiene l'espressione per la quantità $-|a| \mathbb{C}(a)$ e quindi i coefficienti incogniti sono:

$$\mathbb{C}(a) = -\frac{1}{2\pi|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iay} dy$$

da cui poi è immediato risalire alla soluzione in forma chiusa.

5.2 Variabili separabili: coordinate polari

Talora è conveniente risolvere l'equazione di Laplace in un sistema di coordinate diverso da quello cartesiano, in cui si riesca a descrivere più facilmente il contorno. Se l'equazione è separabile anche nel nuovo sistema di coordinate, il problema è ancora risolubile in forma chiusa.

Esistono numerosi sistemi di coordinate in cui l'equazione di Laplace risulta separabile. Un caso di particolare interesse è quello delle coordinate polari r e θ , adatto a problemi con contorno circolare. In questo sistema di coordinate, l'equazione di Laplace si scrive:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5.4)$$

Ancora si possono cercare soluzioni del tipo:

$$\varphi(r, \theta) = F(r) G(\theta).$$

Sostituendo nell'equazione soluzioni di questo tipo si ottiene, dopo aver diviso per FG :

$$\frac{r(rF'(r))'}{F(r)} + \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = 0.$$

Perché esistano soluzioni separabili, i due addendi (funzioni il primo solo di r ed il secondo solo di θ) non possono che essere costanti. Inoltre tali costanti devono essere uguali ed opposte, per il legame dato dall'equazione stessa. Si ottengono quindi le due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{r(rF')'}{F} = K, \quad \frac{G''}{G} = -K$$

in cui K è una costante reale, che può essere positiva, negativa o nulla.

Consideriamo il caso $K \neq 0$. L'equazione per G , lineare e a coefficienti costanti, è analoga a quelle già discussa in §5.1 per le coordinate cartesiane, ed ha quindi soluzioni del tipo:

$$G(\theta) = e^{\pm ik\theta}$$

in cui k è una costante, reale se $K > 0$ o immaginaria pure se $K < 0$.

L'equazione, lineare ma non a coefficienti costanti, per la funzione $F(r)$ si scrive invece come:

$$r \frac{d}{dr} (rF') - KF = 0$$

ed appartiene al gruppo delle cosiddette equazioni di Eulero, che sono integrabili grazie alla sostituzione $\log r = t$ che le trasforma in equazioni a coefficienti costanti in t . Infatti

$$dt = \frac{1}{r} dr$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} = r \frac{d}{dr}.$$

Le soluzioni dell'equazione $F_{tt} - KF = 0$ sono quindi degli esponenziali rispetto a t , cioè del tipo e^{kt} ; in termini della variabile r si ha

$$F(r) = r^{\pm k}.$$

Il caso $K = 0$ va trattato separatamente, perché dà origine a soluzioni che non sono comprese fra gli esponenziali ora trovati. L'equazione $G'' = 0$ ammette la semplice soluzione:

$$G_0(\theta) = c_1 + c_2\theta \tag{5.5a}$$

L'equazione per F invece diviene:

$$\frac{d}{dr}(rF') = 0$$

Con la sostituzione $\log r = t$ si determina la soluzione $F(t) = c_3 + c_4 t$, e tornando alla variabile r :

$$F_0(r) = a_0 \log r + b_0 \quad (5.5b)$$

La soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate polari è quindi costituita da una combinazione lineare della soluzione per $K = 0$ e delle soluzioni elementari del tipo:

$$\varphi(r, \theta) = r^{\pm k} e^{\pm ik\theta} \quad (5.6)$$

che andranno ulteriormente specificate mediante le condizioni al contorno.

5.2.1 Cerchio: condizioni di Dirichlet

Sia nota una condizione al contorno

$$\varphi(r_0, \theta) = g(\theta)$$

sulla circonferenza di raggio $r = r_0$, e cerchiamo di determinare la soluzione all'interno o all'esterno del cerchio. La soluzione è la più generale combinazione lineare di singole soluzioni del tipo (5.6), pesate attraverso opportuni coefficienti, e dei termini zero (5.5a) e (5.5b). Le soluzioni accettabili per questo specifico problema sono quelle che assumono lo stesso valore per valori di θ diversi di multipli di 2π , ovvero periodiche in θ con periodo 2π . Questo implica che il parametro k può assumere in questo caso solo valori interi. Detti n questi valori, le soluzioni generali accettabili sono:

$$\varphi(r, \theta) = a_0 \log r + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^n e^{in\theta} + d_n r^{-n} e^{in\theta} \quad (5.7)$$

in cui, poiché il parametro n è intero, la combinazione lineare è stata espressa con una sommatoria e non come un integrale.

Il problema esterno Se si cerca la soluzione all'esterno della circonferenza $r = r_0$, la dipendenza da r della soluzione può contemplare solo esponenti negativi, in modo da evitare che la soluzione diverga all'infinito. La più generale combinazione generale delle sole soluzioni accettabili per l'esterno del cerchio è quindi del tipo:

$$\varphi(r, \theta) = a_0 \log r + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n r^{-|n|} e^{in\theta} \quad (5.8)$$

I coefficienti k_n , funzioni del parametro intero n , possono essere calcolati utilizzando l'informazione della condizione al contorno:

$$g(\theta) = \varphi(r_0, \theta) = a_0 \log r_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n r_0^{-|n|} e^{in\theta}$$

che costituisce un sistema di infinite equazioni nelle infinite incognite k_n . In quanto serie di Fourier, essa può essere invertita per esprimere i coefficienti in funzione della condizione al contorno:

$$k_n r_0^{-|n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(\theta) - a_0 \log r_0) e^{-in\theta} d\theta$$

I coefficienti k_n , inseriti nell'espressione (5.80) della soluzione, permettono quindi di valutarla in forma chiusa.

Si noti la dipendenza della soluzione generale (5.8) dal raggio secondo la potenza $r^{-|n|}$: il decadimento con la distanza dall'origine è molto rapido, e già i primissimi termini della sommatoria descrivono molto bene la soluzione.

Il problema interno Nel risolvere il problema all'interno del cerchio, è necessario considerare solo i termini in cui la distanza r ha esponente positivo, in modo da evitare singolarità nell'origine. Oltre a ciò, esiste una ulteriore asimmetria fra problemi interno ed esterno, dovuta al termine di grado zero. Nel caso esterno, come abbiamo visto, questo termine non è incompatibile con la soluzione: se $\varphi \sim \log r$ allora la sua derivata è $\sim 1/r$ ed il comportamento all'infinito della soluzione (che deve avere derivate che tendono a zero) è ancora accettabile. Il medesimo termine è invece certamente singolare nel caso interno e non può essere considerato nella più generale fra le soluzioni accettabili.

5.2.2 Cerchio: condizioni di Neumann

L'asimmetria fra problema interno ed esterno al cerchio diventa evidente quando si considera un problema con condizioni di Neumann:

$$\varphi_r(r_0, \theta) = g(\theta).$$

Il problema interno Nel problema interno il termine logaritmico non è accettabile. La sostituzione della condizione al contorno

$$g(\theta) = \varphi_r(r_0, \theta)$$

nella derivata normale della soluzione (5.8) permette di risalire ai coefficienti k_n secondo la relazione:

$$g(\theta) = \varphi_r(r_0, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n |n| r_0^{|n|-1} e^{in\theta}$$

Da questa condizione si risale all'espressione dei coefficienti invertendo la serie di Fourier:

$$k_n |n| r_0^{|n|-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Il coefficiente k_0 resta indeterminato, (ovvero la soluzione si determina a meno di un coefficiente k_0 arbitrario) solo se la condizione al contorno è assegnata in modo che l'integrale della derivata normale è nullo al contorno. In caso contrario, il problema è mal posto e non ammette soluzione. Questo risultato è di validità generale. Indipendentemente dalla geometria circolare, nella soluzione del problema interno con condizioni di Neumann, occorre quindi verificare che sia rispettata la condizione di compatibilità integrale integrale:

$$\oint \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, dc = 0 \quad (5.9)$$

Il problema esterno Nel problema di Neumann esterno, invece, c'è un grado di libertà in più, offerto dal termine logaritmico. Infatti nella soluzione generale (5.8) il termine $a_0 \log r$ è accettabile, per cui la condizione al contorno diviene:

$$g(\theta) = \varphi_r(r_0, \theta) = \frac{a_0}{r_0} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -k_n |n| r_0^{-|n|-1} e^{in\theta}$$

ed il coefficiente a_0 si determina mediante l'integrale della condizione g assegnata sul contorno, che può essere anche diverso da zero.

Notiamo che, nel problema tipico dell'Aerodinamica, in cui la condizione di non penetrazione richiede che φ_r sia identicamente nulla sul contorno, la condizione integrale (5.9) risulta sempre verificata.

5.2.3 Spicchio infinito: condizioni di Dirichlet

Se l'equazione di Laplace deve essere risolta, sempre in coordinate polari, con condizioni al contorno di Dirichlet assegnate sui lati di uno spicchio infinito del piano, delimitato da due semiasse di inclinazione θ_1 e θ_2 , le condizioni al contorno sono del tipo:

$$\varphi_1(r, \theta_1) = g_1(r); \quad \varphi_2(r, \theta_2) = g_2(r).$$

All'interno della soluzione generale (5.6), occorre scegliere, in questo caso particolare, solo quei termini che permettano di imporre la condizione al contorno su tutti i due raggi, quindi anche dove $r \rightarrow \infty$. Si considerano quindi solo termini del tipo $r^{ia} e^{\pm a\theta}$, con a parametro reale. La più generale combinazione lineare di soluzioni accettabili per la soluzione nello spicchio infinito è data da:

$$\varphi(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbb{C}_1(a) e^{-a\theta} + \mathbb{C}_2(a) e^{+a\theta} \right] r^{ia} da$$

I coefficienti $\mathbb{C}_1(a)$ e $\mathbb{C}_2(a)$ possono essere calcolati utilizzando le informazioni delle condizioni al contorno, che è utile scrivere con la sostituzione $r^{ia} = e^{ia \log r} = e^{iat}$:

$$g_1(r) = \varphi(r, \theta_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{C}_1(a)e^{-a\theta_1} + \mathbb{C}_2(a)e^{+a\theta_1}] e^{iat} da$$

$$g_2(r) = \varphi(r, \theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{C}_1(a)e^{-a\theta_2} + \mathbb{C}_2(a)e^{+a\theta_2}] e^{iat} da$$

Tali relazioni costituiscono due trasformate di Fourier, che possono essere invertite per ottenere un sistema di due equazioni nelle due incognite $\mathbb{C}_1(a)$ e $\mathbb{C}_2(a)$:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_1(a)e^{-a\theta_1} + \mathbb{C}_2(a)e^{+a\theta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)e^{-iat} dt \\ \mathbb{C}_1(a)e^{-a\theta_2} + \mathbb{C}_2(a)e^{+a\theta_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t)e^{-iat} dt \end{cases}$$

Risolto tale sistema, la conoscenza dei coefficienti permette di valutare la soluzione in forma chiusa.

5.3 Sovrapposizione di correnti elementari

Il significato fisico, e la rilevanza per l'Aerodinamica, delle soluzioni dell'equazione di Laplace individuate con il metodo di separazione delle variabili diventa evidente se si considerano le soluzioni di ordine più basso. Consideriamo allora alcune semplici soluzioni elementari nel caso bidimensionale.

La corrente uniforme È immediato scrivere il potenziale e la funzione di corrente di un moto uniforme con velocità asintotica \mathbf{V}_∞ , che abbia componenti cartesiane u_∞ e v_∞ rispetto a due assi x ed y :

$$\varphi(x, y) = u_\infty x + v_\infty y \tag{5.10a}$$

$$\psi(x, y) = -v_\infty x + u_\infty y \tag{5.10b}$$

In queste espressioni ritroviamo compaiono i termini zero $F_0(x)$ e $G_0(y)$ delle soluzioni (5.1) per l'equazione di Laplace in coordinate cartesiane.

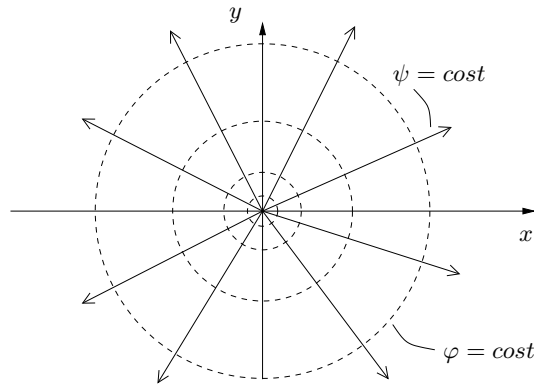


Figura 5.1 Linee di corrente (continue) ed equipotenziali (tratteggiate) per una sorgente puntiforme posta nell'origine degli assi.

La sorgente Il termine zero $F_0(r)$, dato dalla (5.5b), della soluzione generale in coordinate polari, chiamato anche termine di *monopolo* per analogia con il campo elettrico, rappresenta la funzione potenziale di una sorgente puntiforme posta nell'origine degli assi. Una sorgente puntiforme può essere pensata come la sezione di un condotto cilindrico, dotato di una parete uniformemente porosa attraverso cui fuoriesce una certa portata q , nel limite di raggio del condotto che tende a zero.

La costante b_0 nella (5.5b) è indeterminata, mentre il coefficiente moltiplicativo a_0 è legata alla portata in massa q emessa dalla sorgente (quando $q < 0$ si ha un pozzo). Si ha quindi:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{2\pi} \log r \quad (5.11a)$$

mentre la funzione di corrente è data da:

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{2\pi} \theta \quad (5.11b)$$

in cui si riconosce il termine zero $G_0(\theta)$ dato dalla (5.5a).

Il calcolo delle componenti di velocità radiale V_r e circonferenziale V_θ è immediato; grazie alle relazioni equivalenti alle (4.5) scritte in coordinate polari si ha:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi r}; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Come si vede dalla figura 5.1, la funzione φ ha simmetria circolare e le linee equipotenziali sono quindi circonferenze con centro nell'origine degli assi, mentre le linee di corrente sono raggi che escono dall'origine, con una velocità radiale che decresce in maniera inversamente proporzionale alla distanza dalla sorgente.

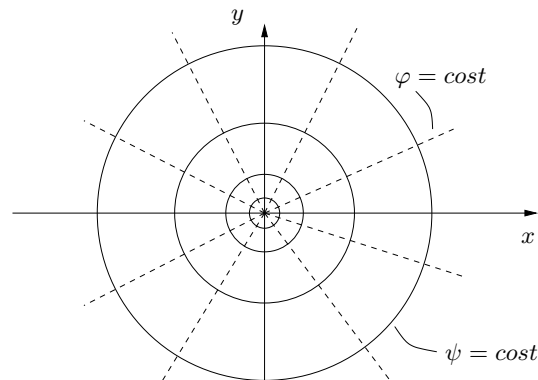


Figura 5.2 Linee di corrente (continue) ed equipotenziali (tratteggiate) per un vortice puntiforme posto nell'origine degli assi.

Il vortice Il vortice puntiforme rappresenta il campo di moto duale di quello della sorgente, e si ottiene scambiando fra loro il potenziale (5.11a) e la funzione di corrente (5.11b), ovvero

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad (5.12a)$$

La costante Γ rappresenta la circolazione del vortice, per il quale la funzione di corrente è

$$\psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r \quad (5.12b)$$

Le componenti di velocità sono:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Come si vede dalla figura 5.2, le linee di corrente sono dunque delle circonferenze, su cui la velocità circonferenziale decresce in maniera inversamente proporzionale alla distanza dal vortice.

Il potenziale del vortice contiene la funzione $G_0(\theta)$, mentre la sua funzione di corrente contiene $F_0(r)$.

La doppietta La soluzione per $n = 1$ della (5.8), chiamata anche termine di *dipolo* per analogia con il campo elettrico, nell'Aerodinamica prende solitamente il nome di doppietta (figura 5.3). Essa consiste nella sovrapposizione di una sorgente e di un pozzo di eguale intensità q , posti ad una distanza d che viene fatta tendere a zero in modo che il prodotto qd si mantenga finito. Denominata intensità μ della doppietta la quantità qd , si ottiene per il potenziale in coordinate

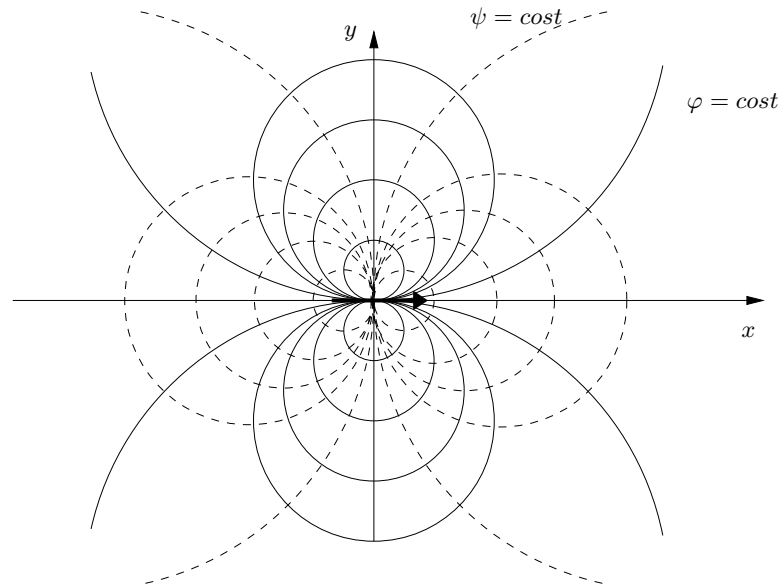


Figura 5.3 Linee di corrente (continue) e linee equipotenziali (tratteggiate) per una doppietta posta nell'origine degli assi, e diretta nel verso positivo dell'asse x .

polari l'espressione:

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r} \quad (5.13a)$$

mentre la funzione di corrente è

$$\psi(r, \theta) = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \quad (5.13b)$$

5.3.1 Applicazione: cilindro indefinito

Le semplici soluzioni ora ottenute possono essere variamente combinate per ottenere altre soluzioni. Un esempio classico è quello del campo di moto corrispondente ad una corrente uniforme \mathbf{V}_∞ sommato a quello di una doppietta orientata nel verso negativo dell'asse x .

Prendendo l'asse x parallelo a \mathbf{V}_∞ , e scegliendo l'origine coincidente con la doppietta, la soluzione corrispondente al moto composto si ottiene semplicemente sommando le due soluzioni elementari. Sommando per esempio le due funzioni di corrente (5.10b) e (5.13b) si ha

$$\psi = V_\infty y - \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}$$

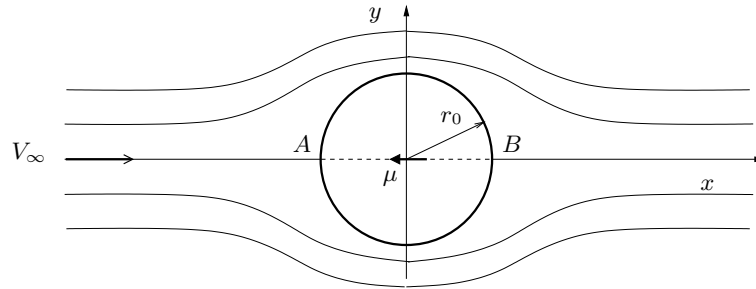


Figura 5.4 Campo di moto all'esterno di un cerchio come sovrapposizione di corrente uniforme e doppietta.

Esprimendo la funzione di corrente in coordinate polari, si ottiene:

$$\psi(r, \theta) = V_\infty \sin \theta \left(r - \frac{\mu}{2\pi r V_\infty} \right) \quad (5.14)$$

La linea di corrente $\psi = 0$ si ottiene quando $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$, ed è quindi costituita dall'intero asse x . Si ha inoltre $\psi = 0$ quando $\mu/2\pi r = V_\infty r$, ovvero quando la distanza dall'origine assume il particolare valore

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi V_\infty}} = r_0$$

Riferendoci alla figura 5.4, si vede facilmente che il campo di moto che abbiamo appena costruito sovrapponendo due soluzioni elementari note corrisponde al campo di moto all'esterno di un cilindro di sezione circolare con raggio r_0 , indefinitamente allungato nella direzione del suo asse. I due punti indicati in figura con A e B sono punti di ristagno, in cui la velocità si annulla.

La forza aerodinamica è nulla Il campo di moto è naturalmente simmetrico rispetto all'asse x , e quindi non c'è nessuna componente della forza aerodinamica in direzione y . Ma il campo di moto è simmetrico anche rispetto all'asse y , cioè davanti e dietro al cerchio. Questo implica immediatamente che anche la componente resistiva della forza aerodinamica è nulla. Un risultato di questo tipo, che abbiamo ricavato ora in un caso molto particolare, è invece di validità generale, e ne tratteremo diffusamente in §4.6.1.

È facile verificare che la componente radiale di velocità

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

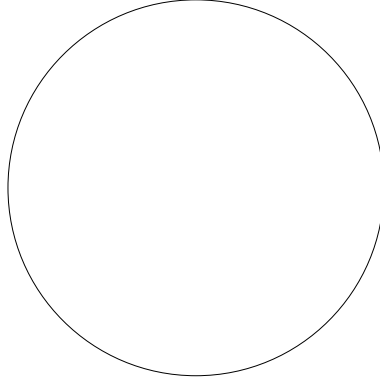


Figura 5.5 Diagramma polare del coefficiente di pressione per un cilindro indefinito investito da una corrente uniforme. DA COMPLETARE

si annulla identicamente sul cerchio, mentre la componente tangente vale

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

che sul cerchio diventa semplicemente $-2V_\infty \sin\theta$. Da questa velocità si risale all'andamento del coefficiente di pressione sul cilindro

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}$$

grazie al teorema di Bernoulli nella forma

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

ottenendo

$$c_p(\theta) = 1 - 4\sin^2\theta$$

L'andamento del coefficiente di pressione sul cilindro al variare dell'angolo θ è mostrato schematicamente in figura 5.5. Il c_p è effettivamente simmetrico rispetto all'asse verticale, in quanto $\sin^2\theta = \sin^2(\pi - \theta)$. Integrando il coefficiente di pressione su tutto il contorno del corpo ne segue quindi che la forza aerodinamica è identicamente nulla. Naturalmente questo risultato non è in accordo con l'esperienza, e l'andamento del c_p , mentre risulta abbastanza accurato per quanto riguarda la parte anteriore, è significativamente diverso da quello nella parte posteriore, che peraltro dipende in maniera abbastanza sensibile dal numero di Reynolds della corrente.

5.3.2 Applicazione: cilindro indefinito con circolazione

Sempre procedendo per sovrapposizione di soluzioni elementari, vediamo che cosa si ottiene sommando alla soluzione precedente (5.14) una ulteriore singolarità nell'origine, in particolare un vortice puntiforme di intensità Γ (rotante in senso orario), per il quale la funzione di corrente è data, a meno del segno, dalla (5.12b). Si ottiene

$$\psi(r, \theta) = V_\infty \sin \theta \left(r - \frac{\mu}{2\pi r V_\infty} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log r. \quad (5.15)$$

Questa nuova ψ soddisfa ancora le condizioni al contorno del problema precedente: è infatti costante sul cerchio di raggio r_0 e la velocità radiale sul cerchio è sempre nulla, in quanto tale è la velocità radiale indotta da un vortice puntiforme. Il campo di moto però è differente, ed in particolare i punti di ristagno non sono più nelle posizioni A e B della figura 5.4. Per determinarne la nuova posizione, osserviamo che sul cerchio la V_θ ora è

$$V_\theta = -2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

e si annulla, insieme al modulo V della velocità, nelle posizioni angolari θ per cui

$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_\infty}$$

Quando $\Gamma < 4\pi r_0 V_\infty$, questa relazione fornisce due posizioni angolari, che identificano due punti di ristagno A' e B' (nel terzo e quarto quadrante per il segno di Γ). L'intero campo di moto, ben visualizzabile con le linee di corrente, mostra come l'effetto del vortice è quello di rompere la simmetria rispetto all'asse x .

Quando $\Gamma = 4\pi r_0 V_\infty$, i due punti di ristagno coincidono nel punto sul cerchio con $\theta = -\pi/2$. Quando poi l'intensità del vortice assume valori ancora superiori, il punto di ristagno non può più stare sul cerchio, e si sposta lungo l'asse y , in una posizione angolare data da

$$r = r_0 \left[\frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_\infty} \right)^2 - 1} \right]$$

Osserviamo ancora una volta che, in presenza di un dominio biconnesso quale quello bidimensionale per un problema esterno, la soluzione del problema di Laplace è indeterminata. Infatti per qualsiasi valore di Γ la soluzione ora trovata soddisfa le condizioni al contorno di non penetrazione sul cilindro di raggio $r = r_0$ e quindi rappresenta un moto irrotazionale di un fluido non viscoso ed incomprimibile.

5.4 Principio delle immagini

Osservando l'espressione (5.7) della soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate polari, si osserva che, a parte il termine logaritmico, in tutti i termini della sommatoria gli esponenti n compaiono sia con il segno positivo che con quello negativo. Questo suggerisce che, se una particolare soluzione dell'equazione di Laplace ha una dipendenza dal raggio del tipo r^n , la medesima funzione in cui r^n sia cambiato in r^{-n} costituisce una ulteriore possibile soluzione della stessa equazione, cioè sia una soluzione di un problema diverso retto dalla medesima equazione.

Si può effettivamente verificare che, data una certa soluzione $\varphi(r, \theta)$ del problema di Laplace all'interno del cerchio unitario, allora la funzione $\varphi'(r, \theta) = \varphi(1/r, \theta)$ è una soluzione accettabile per il problema esterno. Infatti basta operare il cambio di variabile $r' = 1/r$ per vedere che l'equazione di Laplace si trasforma in se stessa. Ponendo

$$r' = \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial r} = -r'^2 \frac{\partial}{\partial r'}$$

e sostituendo nella (5.4), si ottiene infatti

$$-r' \frac{\partial}{\partial r'} \left(-r' \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

che è ancora l'equazione di Laplace.

Questa osservazione fornisce allora un ulteriore strumento per costruire soluzioni elementari dell'equazione. Limitiamoci per ora al caso bidimensionale, e consideriamo la funzione

$$\varphi(r, \theta) = \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$$

Essa è soluzione dell'equazione di Laplace, in quanto è una funzione del tipo (5.5b) in un sistema di coordinate con l'origine nel punto \mathbf{r}_0 di coordinate cartesiane (x_0, y_0) . In coordinate cartesiane, la stessa soluzione si scrive come

$$\varphi(x, y) = \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Operiamo ora la sostituzione $r' = 1/r$. Con le relazioni:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & x' &= \frac{1}{r} \cos \theta = \frac{x}{r^2} \\ y &= r \sin \theta; & y' &= \frac{1}{r} \sin \theta = \frac{y}{r^2} \end{aligned}$$

si ottiene una nuova funzione, anch'essa soluzione dell'equazione di Laplace:

$$\varphi' = \log \sqrt{\left(\frac{x}{r^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{y}{r^2} - y_0\right)^2}.$$

La funzione φ' presenta una singolarità nel punto $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0/r_0^2$ che si dice anche *immagine* di \mathbf{r}_0 , in quanto le posizioni dei due punti sono legate dalla medesima relazione che fornisce la posizione delle immagini per uno specchio sferico.

Tale nuova soluzione può essere utilmente combinata con altre soluzioni dell'equazione in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare è facile verificare che, sul cerchio unitario, le due soluzioni φ e φ' assumono lo stesso valore. Quindi, la funzione:

$$\varphi_D = \varphi - \varphi'$$

è anch'essa una soluzione dell'equazione di Laplace grazie alla linearità, ed è identicamente nulla sul cerchio unitario, cioè soddisfa sulla circonferenza una condizione al contorno di Dirichlet omogenea. Al contrario, la funzione:

$$\varphi_N = \varphi + \varphi'$$

è una ulteriore soluzione che non è nulla sul cerchio, ma che ivi ha derivata normale nulla. Infatti tale derivata risulta:

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi'}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi'}{\partial r'} \left(-\frac{1}{r^2} \right)$$

e si annulla identicamente sul cerchio unitario.

Il principio delle immagini in tre dimensioni Il principio delle immagini conserva la sua validità anche nel caso tridimensionale, ma la sua formulazione presenta una lieve differenza rispetto al caso bidimensionale. La soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche per il problema interno ad una sfera di raggio unitario è del tipo:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} r^{|n|} f_{nm}(\theta, \phi)$$

mentre l'analogia soluzione per il problema esterno è:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} B_{nm} r^{-|n|-1} g_{nm}(\theta, \phi)$$

Se quindi $\varphi(r, \theta, \phi)$ è una particolare soluzione dell'equazione di Laplace, lo sarà anche la sua immagine $\varphi'(r, \theta, \phi)$, definita come:

$$\varphi'(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{1}{r}, \theta, \phi\right)$$

Sul contorno della sfera φ e φ' assumono lo stesso valore, per cui la loro differenza soddisfa automaticamente la condizione di Dirichlet omogenea sulla sfera stessa.

5.4.1 Applicazione: cilindro indefinito

Una semplice applicazione del metodo delle immagini nel caso bidimensionale è il calcolo del potenziale cinetico per un cilindro indefinito a sezione circolare investito da una corrente uniforme. Allineato l'asse x con la corrente asintotica, il potenziale per questa semplice corrente uniforme, secondo la (5.10a), è

$$\varphi(x, y) = V_\infty x = V_\infty r \cos \theta.$$

Anche l'immagine di φ rispetto al cerchio unitario, cioè:

$$\varphi'(x, y) = V_\infty \frac{1}{r} \cos \theta = V_\infty \frac{x}{r^2}$$

è una soluzione dell'equazione di Laplace. La somma delle due soluzioni, ovvero la funzione:

$$\varphi + \varphi' = V_\infty r \cos \theta + V_\infty \frac{1}{r} \cos \theta = V_\infty x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.16)$$

è anch'essa una soluzione dell'equazione di Laplace, ed è facile verificare che essa descrive il moto di un fluido non viscoso e incomprimibile in moto irrotazionale attorno ad un cilindro indefinito di sezione circolare di raggio unitario. Si noti come la soluzione contenga esattamente i termini per $n = \pm 1$ della soluzione generale (5.8). Ovviamente tale soluzione è identica a quella ricavata per sovrapposizione di correnti elementari, descritta in §5.3.1 con la funzione di corrente.

5.5 Metodo della funzione di Green

Un ulteriore metodo di soluzione dell'equazione di Laplace, di grande interesse teorico e, da quando esistono i calcolatori anche numerico, valido nel caso sia bidimensionale sia tridimensionale, è quello basato sulla funzione di Green.

Consideriamo per maggiore generalità l'equazione di Poisson, che è una equazione di Laplace non omogenea, ovvero con un termine noto g non nullo:

$$\nabla^2 \varphi = g(\mathbf{r})$$

L'idea di base del metodo è che, se il problema è lineare, anche la soluzione deve potersi esprimere, in generale, come una funzione lineare sia del termine noto g che delle condizioni al contorno. Quindi il potenziale in un generico punto \mathbf{r}_0 interno ad un volume \mathcal{V} deve potersi scrivere come:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) g(\mathbf{r}) d\mathcal{V} + \text{contributo condizioni al contorno}$$

dove la funzione \mathcal{G} che compare nell'integrale di convoluzione è per ora del tutto indeterminata.

Un'integrazione per parti Iniziamo con l'integrare l'equazione di Poisson nel volume \mathcal{V} , dopo averla moltiplicata per \mathcal{G} :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G} \nabla^2 \varphi \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G} g \, d\mathcal{V} \quad (5.17)$$

La funzione φ può ora essere messa in evidenza con una integrazione per parti (che in un formalismo vettoriale equivale ad applicare il teorema della divergenza), spostando gli operatori di derivazione applicati a φ sulla \mathcal{G} . Sfruttando quindi l'identità:

$$\mathcal{G} \nabla^2 \varphi = \mathcal{G} \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (\mathcal{G} \nabla \varphi) - \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \varphi$$

ed applicando il teorema della divergenza, si può riscrivere il primo membro della (5.17) come:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G} \nabla^2 \varphi \, d\mathcal{V} = \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot (\mathcal{G} \nabla \varphi) \, d\mathcal{S} - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{V}$$

cioè in una forma in cui compaiono solo derivate prime di φ , ed un termine aggiuntivo da calcolarsi solo sul contorno. Si può ripetere ora il ragionamento, sfruttando la relazione:

$$\nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (\varphi \nabla \mathcal{G}) - \varphi \nabla \cdot \nabla \mathcal{G}$$

per arrivare a:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G} g \, d\mathcal{V} = \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot (\mathcal{G} \nabla \varphi - \varphi \nabla \mathcal{G}) \, d\mathcal{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \varphi \nabla^2 \mathcal{G} \, d\mathcal{V} \quad (5.18)$$

La scelta di \mathcal{G} Questo risultato è valido a prescindere dalla funzione \mathcal{G} . Esiste però una particolare scelta di \mathcal{G} che permette di rendere la formula (5.18) esplicita rispetto alla soluzione φ dell'equazione di Poisson. Si può infatti scegliere \mathcal{G} in modo che il coefficiente di φ nell'ultimo integrale della (5.18) si riduca ad una funzione δ di Dirac, ovvero una \mathcal{G} tale che:

$$\nabla^2 \mathcal{G} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (5.19)$$

In questo modo si ha che

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varphi \nabla^2 \mathcal{G} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \varphi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \, d\mathcal{V} = \varphi(\mathbf{r}_0).$$

La soluzione $\varphi(\mathbf{r}_0)$ dell'equazione di Poisson in un qualsiasi punto \mathbf{r}_0 interno al volume \mathcal{V} è allora

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G} g \, d\mathcal{V} - \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot (\mathcal{G} \nabla \varphi - \varphi \nabla \mathcal{G}) \, d\mathcal{S}.$$

Con scrittura più estesa la soluzione si scrive come

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \oint_{\partial\mathcal{V}} \left(\varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial\mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial n} - \mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \right) dS + \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) g(\mathbf{r}) dV \quad (5.20)$$

Utilità della formula di Green Il problema di Laplace ha condizioni al contorno di tipo Dirichlet, oppure di tipo Neumann. Per una data funzione di Green, uno dei due addendi dell'integrale di contorno è quindi nullo (se le condizioni sono omogenee) o comunque noto (se le condizioni sono inomogenee). Quando il contorno è di forma semplice e descrivibile analiticamente, è possibile selezionare fra le infinite funzioni di Green una particolare \mathcal{G} che sia identicamente nulla sul contorno stesso quando le condizioni al contorno sono di tipo Dirichlet, oppure che abbia derivata normale nulla sul contorno quando le condizioni sono di tipo Neumann. Questo permette di eliminare l'addendo incognito, e di risolvere il problema di Laplace in forma chiusa.

Quando invece la funzione di Green definita dalla (5.19) non è calcolabile analiticamente, la formula di Green (5.20) è comunque ancora utile, in quanto esprime la soluzione attraverso un integrale esteso solo al contorno del dominio di integrazione: il ricorso al calcolo numerico permette anche in questo caso di risolvere vantaggiosamente molti problemi applicativi interessanti.

5.5.1 Funzione di Green di spazio libero

Esaminiamo ora la ricerca di funzioni di Green per diverse geometrie. Il caso più semplice è quello in cui non c'è un contorno. Si parla in questo caso di funzione di Green di spazio infinito, o spazio libero.

Per risolvere l'equazione (5.19) e determinare così \mathcal{G} , si ricorre a proprietà di simmetria. Notiamo anzitutto che l'equazione non dipende dall'origine degli assi, e quindi si può risolvere semplicemente l'equazione $\nabla^2\mathcal{G} = \delta(\mathbf{r})$, traslando poi il risultato in \mathbf{r}_0 . Notiamo ancora che, essendo $\delta(\mathbf{r})$ nulla dappertutto tranne che nell'origine, l'equazione (5.19) si riduce all'equazione di Laplace dappertutto tranne che nell'origine, dove ci si aspetta una soluzione singolare. Inoltre sia l'operatore laplaciano sia la funzione δ sono invarianti per rotazione, ovvero godono di simmetria circolare in due dimensioni, e simmetria sferica in tre dimensioni. Anche la soluzione avrà quindi questa simmetria, e può essere cercata, all'interno della soluzione generale (5.7) dell'equazione di Laplace, fra i termini che dipendono solo dal raggio.

Il caso bidimensionale L'unico termine delle (5.7) che non dipende dall'angolo θ è il termine zero $a_0 \log r + b_0$. Per verificare che una funzione di questo tipo, che è certamente singolare nell'origine, soddisfa l'equazione (5.19), è necessario verificare che l'integrale del suo laplaciano, calcolato su una superficie S_ϵ di raggio massimo ϵ che contenga l'origine, ha valore unitario al tendere a zero di ϵ .

Grazie al teorema della divergenza l'integrale di superficie del laplaciano $\nabla \cdot \nabla$ si trasforma in un integrale esteso al solo contorno $\partial\mathcal{S}_\epsilon$ di $\mathbf{n} \cdot \nabla$. Scegliendo poi per comodità un contorno di integrazione circolare di raggio ϵ centrato nell'origine, si ha:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \nabla (a_0 \log r + b_0) \, d\mathcal{C} = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{\epsilon} \epsilon \, d\theta = a_0 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a_0$$

Basta quindi scegliere $a_0 = 1/2\pi$ perché l'integrale abbia valore unitario, come richiesto dalla definizione della funzione δ di Dirac. La funzione di Green di spazio libero per il caso bidimensionale, riportando l'origine in un punto generico \mathbf{r}_0 , è dunque:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + b_0. \quad (5.21)$$

Essa è determinata a meno della costante additiva b_0 , che come sempre non crea problemi in quanto sono significative solo le derivate del potenziale.

Il caso tridimensionale Il caso tridimensionale è analogo a quello bidimensionale. L'equazione di Laplace in coordinate sferiche per una funzione $F(r)$ che dipende dalla sola r diviene, per $K = 0$

$$(r^2 F')' = 0$$

che può essere integrata una prima volta, arrivando a $F' = a_0/r^2$. Integrando nuovamente, si ottiene per la soluzione elementare $F_0(r)$ l'espressione $F_0(r) = -a_0/r + b_0$.

Per trovare ora la funzione di Green, occorre ancora determinare le costanti in modo che l'integrale del laplaciano di tale funzione, esteso ad un volumetto infinitesimo \mathcal{V}_ϵ che comprenda l'origine, abbia valore unitario. Grazie al teorema della divergenza questo integrale si trasforma in un integrale esteso al solo contorno $\partial\mathcal{V}_\epsilon$. Scegliendo poi per comodità come contorno di integrazione la superficie di una sfera centrata nell'origine e di raggio ϵ , questo integrale risulta:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \nabla \left(-\frac{a_0}{r} + b_0 \right) \, d\mathcal{S} = \int_0^{4\pi} \frac{a_0}{\epsilon^2} \epsilon^2 \, d\Omega = 4\pi a_0$$

in cui $r^2 \, d\Omega$ è l'elemento superficiale sulla sfera, e l'angolo solido va integrato da 0 a 4π .

Basta quindi scegliere $a_0 = 1/4\pi$ perché l'integrale abbia valore unitario. La costante b_0 resta invece indeterminata, come nel caso bidimensionale. Dal momento però che in tre dimensioni il potenziale è convergente all'infinito, si può scegliere $b_0 = 0$, ottenendo in questo modo una funzione di Green che si annulla all'infinito.

La funzione di Green di spazio libero per il caso tridimensionale è dunque nel caso generale:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (5.22)$$

5.5.2 Applicazione: cilindro indefinito

In due dimensioni esistono svariati tipi di contorno per i quali la funzione di Green è determinabile analiticamente, e permette quindi di scrivere la soluzione in forma chiusa. Uno dei casi più significativi è quello della geometria circolare.

Supponiamo allora di cercare la soluzione dell'equazione di Laplace in un punto \mathbf{x}_0 interno al cerchio di raggio unitario. La funzione di Green che soddisfa la (5.19) può essere calcolata con il principio delle immagini, come illustrato in §5.4, a partire dalla \mathcal{G} di spazio libero (5.21). Naturalmente la \mathcal{G} necessaria per scrivere la soluzione in forma chiusa dipende dal tipo di condizioni al contorno per l'equazione di Laplace.

Condizioni di Dirichlet Se interessa risolvere un problema con condizioni di Dirichlet, in cui la condizione al contorno è del tipo $\varphi(1, \theta) = g(\theta)$, come abbiamo discusso in §5.5 l'obiettivo è quello di trovare una \mathcal{G} identicamente nulla sul cerchio. In questo modo si annulla il primo addendo della formula di Green (5.20), che contiene la derivata normale della soluzione, incognita; l'altro addendo invece è calcolabile, in quanto contiene φ sul contorno (noto dalla condizione al contorno) e la derivata di \mathcal{G} valutata sul contorno (che è calcolabile conoscendo analiticamente \mathcal{G}). Occorre allora sottrarre alla funzione di Green di spazio libero (5.21) la sua immagine, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ & - \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{\left(\frac{x}{r^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{y}{r^2} - y_0\right)^2} \end{aligned}$$

Ora si può calcolare la derivata di \mathcal{G} rispetto ad r , che sul cerchio unitario vale

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} = \frac{1}{\pi} \frac{1 - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta}{1 + x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 \cos \theta - 2y_0 \sin \theta}$$

e questo permette di scrivere in forma chiusa la soluzione del problema all'interno del cerchio come:

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} g(\theta) d\theta$$

Condizioni di Neumann Un procedimento analogo permette di risolvere in forma chiusa anche problemi con condizione di Neumann. Naturalmente occorre questa volta determinare una \mathcal{G} che abbia derivata normale identicamente nulla sul contorno. Il metodo delle immagini consente di costruire tale funzione sommando, invece che sottrarre, alla \mathcal{G} di spazio libero la sua immagine.

In tre dimensioni, grazie alla validità del principio delle immagini discusso in §5.4, la soluzione in forma chiusa si scrive in maniera analoga per la geometria sferica.

5.5.3 Andamento del potenziale all'infinito: caso 2d

La formula di Green permette di determinare il comportamento delle soluzioni dell'equazione di Laplace all'infinito, anche senza conoscere il dettaglio delle soluzioni stesse. Questo importante risultato è stato utilizzato in §4.6, quando dimostrando il teorema di Kutta-Joukowski abbiamo potuto trascurare certi termini conoscendone il loro comportamento asintotico all'infinito.

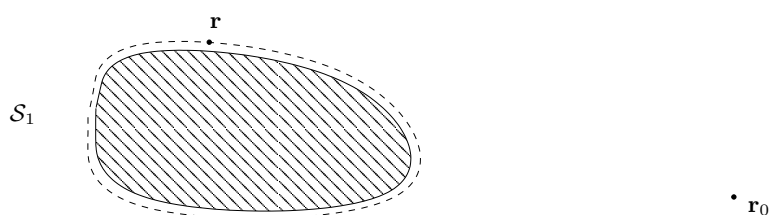


Figura 5.6 Calcolo dell'andamento di $\varphi(\mathbf{r}_0)$ quando $r_0 \gg r$.

Limitiamoci per ora alle due dimensioni. Consideriamo (figura 5.6) un corpo di contorno S_1 immerso in un fluido, ed un punto \mathbf{r}_0 nel fluido, e studiamo per cominciare l'andamento all'infinito (cioè per $r_0 \rightarrow \infty$) del secondo addendo della formula di Green, in cui \mathcal{G} sia la funzione di Green di spazio libero data dalla (5.21). Dobbiamo quindi stabilire per $r_0 \rightarrow \infty$ il comportamento della funzione

$$\varphi_a(\mathbf{r}_0) = \oint_{S_1} \log |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} dc$$

in cui il punto \mathbf{r} si muove sul contorno S_1 del corpo, mentre \mathbf{r}_0 è all'interno del fluido.

Corpo di estensione finita Facciamo l'ipotesi che $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}|$. Questo equivale a ritenere che il contorno del corpo abbia estensione finita. Indichiamo con $\hat{\mathbf{r}}_0$ il versore della direzione di \mathbf{r}_0 , ponendo

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \hat{\mathbf{r}}_0.$$

Calcoleremo l'andamento all'infinito della funzione $\varphi_a(\mathbf{r}_0)$ mediante sviluppi in serie di Taylor rispetto a r/r_0 . Iniziamo con lo scrivere l'argomento del logaritmo come:

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = r_0 \sqrt{\left(\hat{\mathbf{r}}_0 - \frac{\mathbf{r}}{r_0}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{r}}_0 - \frac{\mathbf{r}}{r_0}\right)} = r_0 \left(1 - 2 \frac{\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0} + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{1/2}$$

e facciamo uso dello sviluppo binomiale

$$(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + \dots$$

La quantità $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|$ diviene

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = r_0 \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_0^2} + \dots \right).$$

Adesso occorre ricordare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione logaritmo

$$\log(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \dots$$

per scrivere

$$\begin{aligned} \log|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| &= \log r_0 + \log \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_0^2} + \dots \right) = \\ &= \log r_0 + \left[-\frac{\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0} + \frac{a_1}{r_0^2} + \frac{a_2}{r_0^3} + \dots \right]. \end{aligned}$$

In questa espressione a_1, a_2 , etc sono dei coefficienti che non dipendono da r_0 . Di conseguenza molto lontano dal corpo la funzione $\varphi_a(\mathbf{r}_0)$ ha un andamento con r_0 del tipo

$$\varphi_a(\mathbf{r}_0) \sim b_0 \log r_0 + \frac{b_1}{r_0} + \frac{b_2}{r_0^2} + \dots$$

in cui b_0, b_1, b_2 , etc sono opportuni coefficienti che non dipendono da r_0 .

Per quanto riguarda l'altro addendo φ_b della formula di Green, si ha:

$$\varphi_b(\mathbf{r}_0) = \oint_{S_1} \varphi \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} dc \sim \frac{\hat{\mathbf{r}}_0}{r_0} \cdot \oint_{S_1} \varphi \mathbf{n} dc$$

Quindi anche questo addendo, che pure dipende dalla direzione del versore $\hat{\mathbf{r}}_0$, è infinitesimo come r_0^{-1} .

Sviluppo asintotico del potenziale Complessivamente quindi il potenziale, che è stato implicitamente supposto funzione ad un sol valore per poter applicare la formula di Green, molto lontano dal corpo di estensione finita è approssimato dalla seguente serie:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) \sim c_0 \log r_0 + \frac{c_1}{r_0} + \frac{c_2}{r_0^2} + \dots \quad (5.23)$$

Si può vedere che i coefficienti c_0, c_1, c_2 , etc che compaiono in questa espressione sono calcolabili come integrali di φ e $\nabla\varphi$ sul contorno S_1 del corpo. Inoltre

il primo coefficiente c_0 è proporzionale al flusso netto di massa attraverso \mathcal{S}_1 , così che a grande distanza il corpo, indipendentemente dalla sua forma, determina un potenziale dominato dal contributo di una sorgente puntiforme di intensità pari al flusso netto di massa attraverso \mathcal{S}_1 . Il coefficiente c_0 è quindi nullo se il corpo è un corpo solido. In questo caso, a grande distanza dal corpo il contributo dominante al potenziale è di ordine r_0^{-1} , e corrisponde ad una doppietta di sorgenti posta nell'origine. (Notiamo che nel caso del cilindro circolare in moto uniforme, già trattato in §5.3.1 e §5.4.1, questo è l'unico contributo non nullo).

Sviluppo asintotico della velocità È semplice risalire dallo sviluppo asintotico della funzione potenziale a quello del suo gradiente, che rappresenta la velocità. Se φ è approssimato, molto lontano da \mathcal{S}_1 , dalla serie (5.23), la relativa velocità decresce con r_0 secondo la:

$$v(r_0) \sim \frac{c_0}{r_0} - \frac{c_1}{r_0^2} + \dots$$

cioè il termine predominante di velocità ha modulo che diminuisce con r_0^{-1} . Questo risultato fondamentale è stato utilizzato in §4.6.

Flussi ciclici in una regione biconnessa Il caso (di notevole interesse) in cui la funzione potenziale non è a un sol valore richiede una trattazione lievemente diversa. Infatti ad una funzione φ polidroma non può essere applicata la formula di Green. Si ottiene un potenziale monodromo considerando però la differenza fra due soluzioni polidrome con la stessa costante ciclica. Nel caso particolare di regione biconnessa, una funzione potenziale polidroma è:

$$\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta.$$

Di conseguenza nel caso ciclico il comportamento asintotico di φ è descritto ancora dalla serie (5.23), ma con un ulteriore termine lineare in θ , cioè:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) \sim \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + c_0 \log r_0 + \frac{c_1}{r_0} + \frac{c_2}{r_0^2} + \dots$$

A grande distanza un corpo di questo tipo presenta quindi un contributo aggiuntivo; confrontandolo con la (5.12a) si riconosce che esso rappresenta il potenziale di un vortice puntiforme posto nell'origine e di intensità Γ .

Il termine aggiuntivo produce un contributo anche nello sviluppo della velocità. Il nuovo contributo però ha solo la componente radiale, che si annulla come r_0^{-1} . Dal punto di vista del comportamento asintotico di v , quindi, poco cambia rispetto al caso precedente.

5.5.4 Andamento del potenziale all'infinito: caso 3d

Il caso tridimensionale, fatte le opportune modifiche, si tratta con lo stesso ragionamento, e conduce a simili risultati. Manca, naturalmente, la distinzione fra caso ciclico e caso aciclico, in quanto il dominio esterno ad un'ala in tre dimensioni è un dominio monoconnesso.

Considerando la funzione di Green di spazio libero (5.22) tridimensionale, sotto l'ipotesi di corpo di estensione finita, si giunge quindi a stabilire che le soluzioni dell'equazione di Laplace si comportano all'infinito come

$$\varphi(\mathbf{r}_0) \sim \frac{c_0}{r_0} + \frac{c_1}{r_0^2} + \frac{c_2}{r_0^2} + \dots$$

in cui i coefficienti c_0, c_1, c_2 , etc sono calcolabili come integrali di φ e $\nabla\varphi$ sul contorno \mathcal{S}_1 del corpo. La velocità quindi si annulla all'infinito come r_0^{-2} . Inoltre il primo coefficiente c_0 è, anche nel caso tridimensionale, proporzionale al flusso netto di massa attraverso \mathcal{S}_1 , ed è quindi nullo se il corpo è solido. In questo caso, a grande distanza dal corpo il contributo dominante al potenziale è di ordine r_0^{-2} , e corrisponde ad una doppietta di sorgenti posta nell'origine. Il corrispondente contributo alla velocità è di ordine r_0^{-3} .

Corpo di estensione finita L'ipotesi di corpo finito ha però rilevanza diversa nel caso delle tre dimensioni. Infatti dietro ad una superficie alare portante si forma una scia, luogo di discontinuità per il potenziale e tale che anche lungo la superficie della scia va applicata la formula di Green. I ragionamenti precedenti quindi non consentono di stabilire il comportamento asintotico del potenziale, ma sono validi solamente per il contributo a φ che viene dall'integrale di Green esteso al solo contorno \mathcal{S}_1 . Vedremo in seguito (cfr. Capitolo 8) che in effetti le conclusioni permesse dal comportamento asintotico di φ nelle due dimensioni non si applicano al caso tridimensionale: in tre dimensioni la forza aerodinamica possiede, in generale, anche una componente di resistenza, che si chiama resistenza indotta.

5.5.5 Altre conseguenze della formula di Green

Scegliendo opportuni volumi di integrazione per la formula di Green, è possibile dedurre importanti proprietà generali delle soluzioni dell'equazione di Laplace.

Teorema della media Consideriamo il caso bidimensionale per semplicità, e scriviamo la formula di Green per un cerchio di raggio ρ con centro nell'origine. Utilizzando per $\mathcal{G}(0, \mathbf{r})$ la funzione di Green di spazio libero (5.21), la soluzione nell'origine è

$$\varphi(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(\rho, \theta) \frac{1}{2\pi\rho} \rho \, d\theta - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \log \rho + b_0 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rho \, d\theta$$

Il secondo integrale, calcolato sul contorno e quindi per ρ costante, è uguale a:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \log \rho + b_0\right) \rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\theta$$

e questa quantità è identicamente nulla quando φ è una soluzione dell'equazione di Laplace, come ci garantisce la condizione di compatibilità integrale (5.9).

Risulta quindi:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\rho, \theta) d\theta$$

Grazie ad una semplice traslazione d'assi che porti l'origine in un punto r_0 , il discorso si estende facilmente al valore di φ in un punto generico r_0 : abbiamo dimostrato che il valore $\varphi(r_0)$ di una funzione armonica in un punto r_0 è pari alla media dei valori di φ su una qualsiasi circonferenza che circonda il punto r_0 .

Unicità della soluzione con condizioni di Dirichlet Il teorema della media permette anche di dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet. Infatti si dimostra dapprima che una qualsiasi soluzione φ non può avere massimi o minimi all'interno del campo: se così non fosse, sarebbe possibile circondare il punto di massimo (o minimo) con una circonferenza, sulla quale ora φ avrebbe una media inferiore (o superiore) al valore nel centro. Quindi i massimi e i minimi devono necessariamente trovarsi sul contorno.

Si supponga ora per assurdo che esistano due soluzioni diverse φ_a e φ_b dello stesso problema di Laplace con condizioni di Dirichlet: esse, avendo la stessa condizione al contorno, assumono lo stesso valore sul contorno stesso. Ma, per la linearità dell'equazione di Laplace, anche $\varphi_a - \varphi_b$ è una soluzione, che è identicamente nulla sul contorno. La condizione di massimo porta ad affermare che $\varphi_a - \varphi_b$ è nulla dappertutto, e quindi non possono esistere due soluzioni distinte dello stesso problema di Dirichlet.

5.6 Soluzioni numeriche con la formula di Green

Un'alternativa alla soluzione dell'equazione di Laplace consiste nel risolvere l'equivalente problema di Green. Purtroppo quando si affrontano problemi di interesse pratico, i contorni in gioco sono piuttosto complicati: i profili alari, per esempio, spesso assumono forme non descrivibili per via analitica, e non è quindi possibile calcolare analiticamente quella \mathcal{G} che permette di ottenere la soluzione in forma chiusa.

Anche quando il calcolo diretto della \mathcal{G} non è praticabile, la formula di Green consente però di esprimere la soluzione in funzione di integrali estesi alla sola frontiera del dominio di integrazione. Il recente sviluppo dei calcolatori ha reso interessante questa possibilità anche da un punto di vista pratico: negli ultimi trenta anni hanno avuto grande sviluppo i cosiddetti metodi a pannelli (a loro volta

catalogabili in due grandi classi, i metodi diretti e quelli indiretti). Tutti i metodi numerici basati sulla formula di Green sono inoltre utilizzabili senza difficoltà particolari sia in due che in tre dimensioni.

Prima di descrivere sinteticamente i metodi a pannelli, accenniamo in breve a due difficoltà che, almeno apparentemente, impediscono l'applicazione immediata della formula di Green al problema aerodinamico del calcolo del campo di moto all'esterno di un profilo alare in grado di produrre portanza.

5.6.1 L'infinito nel problema esterno

Un primo ostacolo nell'applicazione della formula di Green a problemi di tipo aerodinamico consiste nel fatto che, per come è stata ricavata in §5.5, l'identità di Green (5.20) vale solo fino a che il punto r_0 è *interno* al dominio di integrazione. Al contrario, il problema tipico dell'Aerodinamica riguarda il calcolo del campo di moto all'esterno di un corpo solido, con condizioni al contorno assegnate sul corpo e all'infinito.

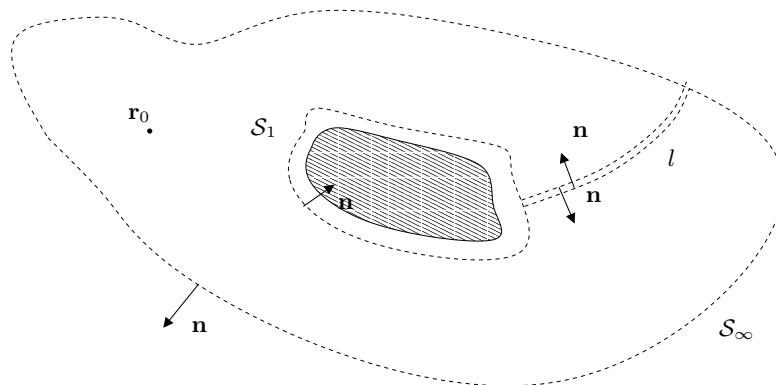


Figura 5.7 Dominio di integrazione per poter applicare la formula di Green ad un problema esterno.

È facile però ricondursi ad un problema interno, applicando la formula di Green al contorno illustrato in figura 5.7, composto da un contorno chiuso S_1 infinitamente prossimo al corpo, da un secondo contorno chiuso S_∞ tracciato molto lontano dal corpo (per esempio una circonferenza di raggio che tende all'infinito), e da un tratto l , di forma arbitraria, che unisce i due contorni chiusi. L'integrale di contorno che compare nella (5.20) andrebbe scritto per tutti questi tre contributi. Il tratto l però viene percorso due volte in senso opposto, e quindi i suoi contributi si annullano a vicenda. (Si presti attenzione all'orientazione delle normali, che devono essere sempre uscenti dalla parte del dominio occupato dal fluido).

L'integrale calcolato su S_∞ non è in generale nullo. Ciò richiede infatti che φ tenda a zero all'infinito insieme alle sue derivate, mentre la condizione al con-

torno all'infinito tipica del problema aerodinamico è di velocità costante e nota all'infinito; il potenziale dal canto suo può tendere ad una costante, o anche (come abbiamo visto in §5.5.3 per un problema bidimensionale in presenza di flusso di massa attraverso la superficie del corpo) diventare con il logaritmo della distanza. Si può però definire una nuova funzione incognita, detta potenziale di perturbazione, come

$$\varphi_1(\mathbf{r}_0) = \varphi(\mathbf{r}_0) - \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{r}_0. \quad (5.24)$$

Grazie alla linearità dell'equazione di Laplace, è del tutto equivalente calcolare φ e calcolare φ_1 . Ma φ_1 si annulla all'infinito con le sue derivate, e quindi non dà contributo all'integrale calcolato su \mathcal{S}_∞ . Questo permette di utilizzare la formula di Green integrando esclusivamente sul contorno del corpo:

$$\varphi_1(\mathbf{r}_0) = \oint_{\mathcal{S}_1} \left(\varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\mathcal{S}.$$

Si tenga presente che la normale è entrante nel corpo, e che la funzione φ_1 deve ora soddisfare sul corpo una condizione di Neumann non omogenea:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}.$$

Una interpretazione alternativa Una diversa possibilità per interpretare lo stesso risultato consiste nell'utilizzare ancora l'intero potenziale φ come funzione incognita, e quindi scrivere la formula di Green anche su \mathcal{S}_∞ . Grazie alla condizione al contorno all'infinito, sappiamo però che all'infinito l'effetto del corpo diventa trascurabile, e quindi l'integrale su \mathcal{S}_∞ risulta:

$$\oint_{\mathcal{S}_\infty} \left(\varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\mathcal{S} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{r}_0$$

che è la soluzione esatta della corrente indisturbata. L'intero potenziale $\varphi(\mathbf{r}_0)$ è allora dato da

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \oint_{\mathcal{S}_1} \left(\varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\mathcal{S} + \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{r}_0.$$

5.6.2 Scia dietro ad un corpo portante

Il calcolo del moto di un fluido intorno ad un profilo alare presenta una ulteriore difficoltà, costituita dalla scia che si forma dietro di esso. Nel caso (di evidente interesse pratico) in cui il profilo produce una componente portante della forza aerodinamica, nella scia, supposta di spessore infinitesimo, è concentrata la vorticità senza la quale l'intero flusso irrotazionale darebbe luogo a una forza nulla. Il dominio di integrazione deve escludere la superficie \mathcal{S}_s che rappresenta la scia, e la formula di Green va scritta per l'intero contorno costituito, oltre che da \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_∞ ,

anche da \mathcal{S}_s . Questo tratto di contorno viene ancora percorso due volte in senso opposto, come il tratto l discusso in precedenza e rappresentato nella figura 5.7, ma il potenziale in questo caso non è continuo dai due lati. Sappiamo infatti per quanto detto nel Capitolo 4 che il potenziale in generale può essere discontinuo dai due lati della scia, ed il salto $\Delta\varphi$ evolve secondo l'equazione (4.9), mentre la sua derivata normale è continua. I contributi dei due lati quindi non si elidono del tutto, nonostante che le normali siano punto per punto eguali ed opposte. In generale quindi la parte \mathcal{S}_s di contorno deve essere tenuta in conto, e la formula di Green diviene:

$$\varphi_1(\mathbf{r}_0) = \oint_{\mathcal{S}_1} \left(\varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}_s} \Delta\varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} d\mathcal{S} \quad (5.25)$$

a cui si arriva dalla formula di Green ricordando che la quantità $\mathcal{G}\varphi_n$ è continua attraverso la scia.

La presenza della quantità $\Delta\varphi$, che evolve secondo la relazione (4.9), nell'integrale esteso alla scia introduce effetti dinamici nel sistema. In generale correnti di questo tipo hanno evoluzione temporale e memoria della storia passata. Per un certo istante, comunque, il problema non è diverso da quelli illustrati in precedenza, in quanto la storia passata determina completamente sia la geometria di \mathcal{S}_s sia la distribuzione su di essa del salto $\Delta\varphi$.

Il caso bidimensionale stazionario Il problema aerodinamico nel caso bidimensionale e stazionario permette tuttavia una importante semplificazione. Abbiamo visto in §4.5.1 che in questo caso la condizione al contorno (4.9) sulla scia diviene semplicemente $\Delta\varphi = \text{cost}$ lungo la linea di corrente costituita dalla scia. Grazie alla sovrapposizione degli effetti, si può allora sfruttare la soluzione elementare (5.5a) dell'equazione di Laplace, già utilizzata in §5.3, per costruire il potenziale di un vortice, sfruttandola per ottenere una funzione continua attraverso la scia. Questa soluzione presenta infatti una discontinuità costante e pari a 2π sulla scia. Si può allora definire un nuovo potenziale di perturbazione nel modo seguente:

$$\varphi_2(\mathbf{r}_0) = \varphi(\mathbf{r}_0) - \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\theta.$$

La nuova funzione φ_2 , oltre ad avere un comportamento decrescente all'infinito come il potenziale di perturbazione φ_1 definito dalla (5.24), è anche continua sulla scia e permette ancora l'uso della formula di Green estesa al solo contorno \mathcal{S}_1 .

5.6.3 Sovrapposizione di singolarità virtuali

Si è visto in §5.4.1, trattando la soluzione analitica del flusso intorno ad un cilindro indefinito investito da corrente uniforme, come la combinazione lineare di due opportune soluzioni dotate di singolarità è in grado di generare una soluzione

dell'equazione di Laplace che soddisfa la condizione di non penetrazione sul contorno del cilindro. Per un contorno di forma qualsiasi, si può generalizzare questa osservazione facendo ricorso alla formula di Green.

Consideriamo per semplicità il caso bidimensionale, in cui la funzione di Green di spazio libero è data dalla (5.21), che coincide con il potenziale di una sorgente, come discusso in §5.3. Con riferimento alla formula di Green (5.20) (e supponendo nullo il termine di volume), osserviamo anzitutto che il potenziale in un punto generico \mathbf{r}_0 può essere pensato come la somma di due contributi corrispondenti ai due addendi dell'integrale di Green. Un primo contributo a $\varphi(\mathbf{r}_0)$ viene dall'integrale:

$$\varphi_s(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \log|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \, dc$$

a cui si può dare la seguente interpretazione fisica. Come ci suggerisce la soluzione (5.11a), $1/2\pi \log|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ è il potenziale nel punto \mathbf{r} dovuto ad una sorgente di intensità unitaria posta nel punto \mathbf{r}_0 , e rappresenta allo stesso modo il potenziale nel punto \mathbf{r}_0 di una sorgente unitaria posta in \mathbf{r} . $\varphi_s(\mathbf{r}_0)$ rappresenta quindi il potenziale nel punto \mathbf{r}_0 dovuto ad una distribuzione, sull'intera superficie del corpo, di sorgenti di intensità per unità di lunghezza pari a $\partial\varphi(\mathbf{r})/\partial n$.

Analogamente il secondo addendo

$$\varphi_d(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \oint \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial \log|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{\partial n} \, dc$$

si interpreta come il potenziale nel punto \mathbf{r}_0 dovuto ad una distribuzione di doppie di intensità per unità di lunghezza pari a $\varphi(\mathbf{r})$.

Nel caso di corpo portante, la relazione (5.25) mostra come sia presente un termine aggiuntivo

$$\iint_{S_s} \Delta\varphi \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n} \, dS$$

interpretabile come uno strato di doppie, distribuite questa volta sulla superficie della scia, e di intensità per unità di lunghezza pari a $\Delta\varphi$.

La formula di Green garantisce quindi che la corrente attorno ad un corpo può essere sempre costruita con una opportuna distribuzione sul contorno del corpo stesso di singolarità, come sorgenti e doppie. Se il corpo produce portanza, occorre distribuire anche uno strato di doppie sulla superficie della scia. Dal momento che uno strato di doppie è equivalente ad uno strato vorticoso, si vede qui con chiarezza che siamo riusciti a costruire una formulazione a potenziale che però contempla la presenza di uno strato vorticoso, per quanto di spessore infinitesimo, all'interno del campo di moto.

5.7 Metodi inversi (metodo di Hess & Smith)

Un corpo qualsiasi può essere rappresentato combinando linearmente le soluzioni elementari corrispondenti alla corrente indisturbata e ad una distribuzione opportuna di singolarità (in generale sorgenti e doppiette).

Descriviamo nel seguito una delle numerose varianti di questa rappresentazione, dovuta in origine ad Hess & Smith (1964), che ha rappresentato la nascita dei metodi a pannelli. Questa formulazione, che è capace di trattare corpi portanti, non si inquadra immediatamente nel quadro appena descritto, in quanto è basata sull'ipotesi di assumere $\varphi_d = 0$ e di descrivere l'intero effetto portante con una distribuzione di vortici sul contorno del corpo. La corrente si rappresenta quindi sovrapponendo al potenziale della corrente asintotica solamente sorgenti distribuite sul contorno del corpo e vortici. Il potenziale in un punto \mathbf{r}_0 del campo di moto è allora dato da tre contributi:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \varphi_\infty + \varphi_s + \varphi_v$$

Naturalmente occorre saper determinare la corretta distribuzione di singolarità, tale che i contributi φ_s e φ_v siano tali da permettere al potenziale totale φ di soddisfare la condizione al contorno di non penetrazione sul profilo.

Il potenziale φ_∞ è noto. Se il profilo è investito da una corrente indisturbata \mathbf{V}_∞ ad incidenza α , risulta infatti

$$\varphi_\infty(x_0, y_0) = V_\infty (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)$$

Introduciamo una densità di sorgenti $q(s)$, per ora incognita, che sia funzione di un'ascissa curvilinea s che descrive il profilo. Il potenziale in \mathbf{r}_0 dovuto alla distribuzione di sorgenti è:

$$\varphi_s(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \oint q(s) \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| ds$$

Per quanto riguarda i vortici, sia $\gamma(s)$ l'intensità per unità di lunghezza in funzione dell'ascissa curvilinea s , di modo che il potenziale in \mathbf{r}_0 dovuto alla distribuzione di vortici si possa descrivere come:

$$\varphi_v(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \oint \gamma(s) \theta ds$$

Discretizziamo ora il profilo, scomponendolo in N pannelli rettilinei (da qui il nome di *metodi a pannelli*). Supponiamo inoltre l'intensità delle sorgenti $q(s)$ costante su ogni pannello, e l'intensità dei vortici costante su tutto il corpo e pari a γ . Il potenziale nella generica posizione \mathbf{r}_0 del campo di moto diviene, passando al discreto:

$$\varphi(x_0, y_0) = V_\infty (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\text{pann. } j} [q_j \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \gamma \theta] ds$$

Se i pannelli sono rettilinei, e le q_j sono costanti su ogni pannello (o comunque variano secondo una legge, lineare, quadratica o altro, analiticamente nota), gli integrali estesi ai singoli pannelli si possono calcolare analiticamente.

La condizione di Kutta Per determinare le intensità incognite delle singolarità, occorre imporre la condizione al contorno di non penetrazione. Si possono usare come punti di controllo i punti di mezzo di ogni pannello: questo permette la scrittura di N equazioni, del tipo $\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0$. Le incognite sono però $N + 1$: infatti oltre alle N intensità q_j si deve determinare anche l'intensità del vortice γ . La relazione mancante si ottiene imponendo l'ulteriore condizione (indipendente) che la velocità al bordo di uscita sia regolare. Se la numerazione dei pannelli inizia e finisce dal bordo di uscita, questo si traduce nell'equazione aggiuntiva:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{t}_1 = \mathbf{V}_N \cdot \mathbf{t}_N$$

che chiude il problema. Ci siamo dunque ricondotti alla semplice soluzione di un sistema lineare di ordine $N + 1$. Questa condizione aggiuntiva si chiama condizione di Kutta.

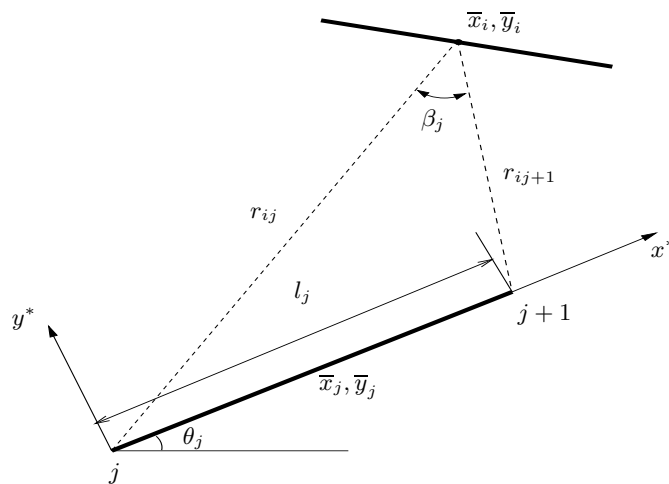


Figura 5.8 Pannello j -simo visto dal punto di controllo (punto mediano) del pannello i -simo, di coordinate \bar{x}_i e \bar{y}_i .

La velocità nel punto di controllo (o punto mediano) del generico pannello i -simo, scomposta nelle sue componenti orizzontale e verticale, è

$$u_i = V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{s ij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{v ij}$$

$$v_i = V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{vij}$$

In queste relazioni, la quantità, per esempio, u_{sij} ha il significato di componente orizzontale della velocità prodotta nel punto di controllo del pannello i da una distribuzione di sorgenti unitaria posta sul pannello j . Queste quantità si dicono anche coefficienti di influenza, in quanto rappresentano l'influenza delle singolarità poste su un certo pannello sul potenziale nel punto di controllo di un altro pannello. I coefficienti di influenza dipendono solo dalla geometria del problema (e dalla discretizzazione) e possono essere calcolati una volta per tutte.

Derivando il potenziale (5.11a) di una sorgente, scritto per intensità unitaria e in coordinate cartesiane x ed y , si ottengono le componenti x ed y della velocità prodotta da una sorgente unitaria posta nell'origine degli assi:

$$u_s = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v_s = \frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Il calcolo dei coefficienti di influenza risulta più agevole se, per ogni pannello, tali velocità si scrivono secondo due coordinate x^* ed y^* allineate con il pannello stesso, e legate alle componenti secondo gli assi x, y dalle relazioni

$$\begin{aligned} u_j &= u_j^* \cos \theta_j - v_j^* \sin \theta_j \\ v_j &= u_j^* \sin \theta_j + v_j^* \cos \theta_j \end{aligned}$$

in cui θ_j è l'angolo di inclinazione del pannello j -simo rispetto all'asse x .

Se il punto mediano del pannello i ha coordinate (x^*, y^*) nel sistema di riferimento locale del pannello j , mentre t è una ascissa sul pannello j , si può calcolare:

$$\begin{aligned} u_{sij}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{x^* - t}{(x^* - t)^2 + y^{*2}} dt = -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x^* - t)^2 + y^{*2}} \Big|_{t=0}^{t=l_j} \\ v_{sij}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - t)^2 + y^{*2}} dt = -\frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{x^* - t}{y^*} \Big|_{t=0}^{t=l_j} \end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} u_{sij}^* &= -\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}}; & v_{sij}^* &= \frac{\beta_{ij}}{2\pi} \\ u_{vij}^* &= -\frac{\beta_{ij}}{2\pi}; & v_{vij}^* &= -\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \end{aligned}$$

in cui i simboli fanno riferimento alla figura 5.8. Si noti come nelle espressioni dei coefficienti di influenza compaiano esclusivamente quantità geometriche. Si noti infine che $u_{sii}^* = 0$ per motivi di simmetria, mentre $v_{sii}^* = 1/2$.

Grazie alle condizioni al contorno scritte nei punti di controllo, ed alla ulteriore equazione che deriva dalla condizione di Kutta, è possibile assemblare la matrice dei coefficienti ed il termine noto di un sistema lineare di $N + 1$ equazioni in $N + 1$ incognite, la cui soluzione fornisce le N densità di sorgenti incognite sui pannelli e l'intensità costante del vortice γ :

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} q_j + A_{iN+1} \gamma = b_i \quad i = 1 \dots N$$

$$\sum_{j=1}^N A_{N+1j} q_j + A_{N+1N+1} \gamma = b_{N+1}$$

Per risalire da questi risultati alle caratteristiche aerodinamiche del profilo, dopo la soluzione del sistema lineare occorre ancora calcolare nel punto di controllo di ogni pannello le componenti tangenti di velocità:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{t}_i &= V_\infty \cos(\theta_i - \alpha) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \log \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right] + \\ &+ \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \log \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \end{aligned}$$

Nel punto di controllo di ogni pannello, il coefficiente di pressione si può scrivere facilmente in funzione della velocità tangente al pannello stesso, con:

$$c_p(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 1 - \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{t}_i)^2}{V_\infty^2}$$

e questo permette il calcolo per integrazione lungo il contorno delle azioni aerodinamiche. Notiamo che ripetere il calcolo ad incidenze diverse richiede la soluzione del medesimo sistema lineare con un nuovo termine noto: l'incidenza non compare nella matrice dei coefficienti.

5.8 Metodi diretti (metodo di Morino)

La formula di Green può essere usata anche per determinare il potenziale φ sul contorno del corpo, utilizzando direttamente φ come funzione incognita. In questo caso si parla di metodi diretti, in quanto la funzione incognita è direttamente il potenziale. Lo sviluppo dei metodi diretti è dovuto a Morino (1973).

Il valore del potenziale sul contorno spesso è l'unica quantità che interessa conoscere, in quanto esso consente di determinare i carichi aerodinamici; se poi

interessa valutare altre quantità all'interno del campo di moto, una volta nota sul corpo la derivata normale del potenziale (dalle condizioni al contorno) ed il potenziale stesso (dalla soluzione), basta una ulteriore applicazione della formula di Green per calcolare il potenziale in ogni punto del campo di moto.

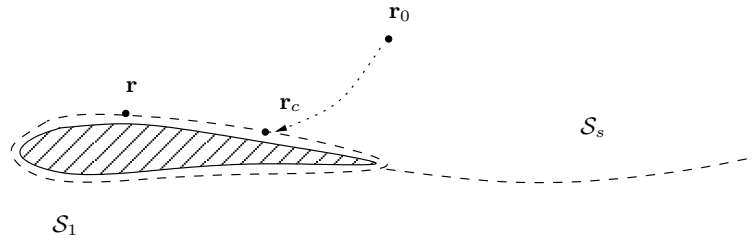


Figura 5.9 Metodo di Morino: il punto r_0 tende al punto r_c sul contorno del corpo.

Utilizzando la funzione di Green di spazio libero (5.21) per le due dimensioni o (5.22) per le tre dimensioni, questa equazione integrale può essere risolta per conoscere il potenziale di perturbazione in tutti i punti r_c del contorno. L'operazione va però condotta con qualche cautela, perché gli integrali diventano singolari quando $r = r_c$, ed occorre effettuare un passaggio al limite.

Problemi non portanti Iniziamo a considerare un problema, bi- o tridimensionale, in cui il corpo immerso nel fluido non produce portanza. Considerando la relazione di Green (5.20) e facendo tendere il punto r_0 ad un punto r_c posto sul contorno del corpo (come mostra la figura 5.9), essa si trasforma in una equazione integrale per l'incognita φ sul corpo. Scrivendo le equazioni in termini di potenziale di perturbazione (per cui non occorre calcolare l'integrale di Green sul contorno all'infinito), si ha

$$\varphi_1(\mathbf{r}_c) = \oint_{S_1} \left(\varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dc. \quad (5.26)$$

Consideriamo ora il secondo addendo di questo integrale. Il suo secondo addendo, per semplicità nel caso bidimensionale, è

$$-\frac{1}{2\pi} \oint \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c| \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{r})}{\partial n} dc$$

e non pone problemi di singolarità, in quanto contiene una singolarità di tipo logaritmico e quindi integrabile. Il primo addendo contiene invece una singolarità di tipo $1/r$, e quindi non integrabile. Si osserva però che, dell'integrale esteso a tutto il contorno, solo la parte in cui $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c$ è singolare. In questa parte, inoltre, si

può supporre che il potenziale sia costante e pari al valore $\varphi_1(\mathbf{r}_c)$. Diventa quindi lecito portare la costante $\varphi_1(\mathbf{r}_c)$ fuori dal segno di integrale. Immaginiamo, come mostrato in figura 5.10, di aggirare la singolarità in \mathbf{r}_c con una semicirconferenza, centrata proprio in \mathbf{r}_c e di raggio ϵ . Detta θ_0 la pendenza del contorno in corrispondenza del punto \mathbf{r}_c , si ha

$$\frac{1}{2\pi} \oint \varphi_1(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} d\mathbf{c} = \frac{1}{2\pi} \varphi_1(\mathbf{r}_c) \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \frac{1}{\epsilon} \epsilon d\theta = \frac{1}{2} \varphi_1(\mathbf{r}_c)$$

La parte singolare dell'intero integrale risulta quindi uguale a $\varphi_1(\mathbf{r}_c)/2$, e può essere esplicitamente tenuta in conto, valutando poi l'integrale su tutta \mathcal{S}_1 ma per $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_c$, quindi senza singolarità.

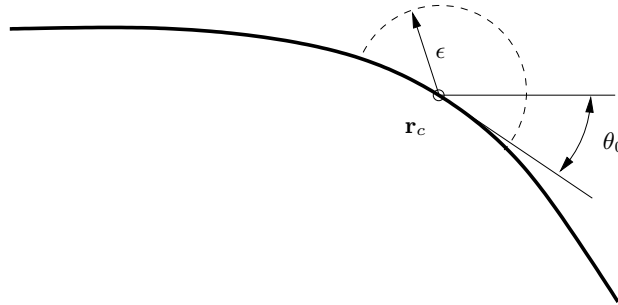


Figura 5.10 La singolarità dell'integrale di contorno quando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c$ si rimuove analiticamente grazie all'integrazione lungo una semicirconferenza di raggio ϵ e centrata in \mathbf{r}_c .

Problemi portanti Nel caso di corpi, come profili e ali, che sono capaci di produrre portanza, la formula di Green va estesa anche sulla parte di contorno \mathcal{S}_s che rappresenta la scia. Nella relazione (5.26) per $\varphi(\mathbf{r}_c)$ è presente un ulteriore integrale

$$\int_{\mathcal{S}_s} \left(\varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\mathbf{c} = \varphi_{1,s}.$$

Anch'esso è composto da due addendi, il secondo dei quali è identicamente nullo. Infatti le normali sulla scia sono eguali ed opposte sul lato superiore ed inferiore, mentre la funzione integranda $\mathcal{G}\varphi_{1,n}$ è continua: infatti la funzione di Green è certamente continua, mentre la continuità della derivata normale di φ (e quindi anche di φ_1) è stata discussa in §4.5.1. Resta quindi un unico contributo a $\varphi_{1,s}$, che scriviamo esplicitamente sui due lati \mathcal{S}^+ e \mathcal{S}^- della scia:

$$\int_{\mathcal{S}_s} \varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} d\mathbf{c} = \int_{\mathcal{S}_s^+} \varphi_1^+ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} d\mathbf{c} + \int_{\mathcal{S}_s^-} \varphi_1^- \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} d\mathbf{c}$$

Abbiamo già ricordato che la funzione di Green è continua attraverso la scia. Le normali hanno orientamento opposto dai due lati di \mathcal{S}_s , e quindi risulta:

$$\varphi_{1,s}(\mathbf{r}_c) = \int_{\mathcal{S}_s^+} (\varphi_1^+ - \varphi_1^-) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dc$$

Il potenziale φ è in generale discontinuo sulla scia, ma nel caso particolare di problema bidimensionale e stazionario sappiamo che il salto di potenziale $\Delta\varphi$ resta semplicemente costante lungo la scia, ed uguale al salto di potenziale al bordo di uscita. Quindi in questo caso particolare il contributo della scia diviene semplicemente:

$$\varphi_{1,s}(\mathbf{r}_c) = \Delta\varphi \oint_{\mathcal{S}_s} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dc$$

Dopo aver escluso il punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c$ dal cammino \mathcal{S}_1 di integrazione, l'intera formula di Green (5.26) si scrive dunque

$$\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_c)}{2} = \oint_{\mathcal{S}_1} \left(\varphi_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dc + \Delta\varphi \int_{\mathcal{S}_s} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dc \quad (5.27)$$

La pannellizzazione Da questo punto, il metodo non è molto diverso dai metodi a singolarità virtuali presentati nel paragrafo precedente. Anche in questo caso si discretizza il contorno (corpo e scia) con N pannelli, si sceglie una particolare dipendenza funzionale dell'incognita su ogni pannello e si valuta l'equazione (5.27) nei punti di controllo.

L'ipotesi più semplice consiste nel considerare costante il potenziale su ogni pannello, anche se risultati migliori si ottengono ipotizzando una distribuzione lineare del potenziale su ogni pannello, cioè:

$$\varphi_1 = \varphi_j + (\varphi_{j+1} - \varphi_j) * t/l_j$$

in cui t è una coordinata tangente al pannello j -simo, mentre φ_j e φ_{j+1} sono i valori del potenziale agli estremi del pannello stesso.

Le incognite sono comunque gli N valori del potenziale φ_j , e le equazioni sono esattamente N . Limitandoci per semplicità al caso di potenziale costante sui pannelli, la quantità $\Delta\varphi = \Gamma$ è pari a $\varphi_N - \varphi_1$. L'equazione per il generico pannello i -simo è:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N \varphi_j \int_{\text{pann.}j} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dc - \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \int_{\text{pann.}j} \mathcal{G} dc + (\varphi_N - \varphi_1) \int_{\mathcal{S}_s} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dc$$

in cui, come nel caso dei metodi a singolarità virtuali, gli integrali possono essere calcolati analiticamente una volta per tutte, e dipendono solamente dalla geometria e dalla discretizzazione.

La scrittura dell'equazione precedente in forma discreta per ogni pannello permette l'assemblaggio della matrice dei coefficienti e del termine noto di un sistema lineare di ordine N . Una volta risolto, questo sistema fornisce il valore del potenziale nel punto di controllo di ogni pannello. Per il calcolo delle caratteristiche aerodinamiche del corpo attraverso il coefficiente di pressione, la componente tangente della velocità può essere calcolata, dopo aver determinato la soluzione, derivando il potenziale in direzione tangente ad ogni pannello. Senza perdere accuratezza quando la discretizzazione è ragionevole, si può anche valutarla direttamente, nei punti nodali di ogni pannello, mediante la semplice relazione:

$$V_i = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{d}$$

in cui d rappresenta la distanza fra due punti di controllo adiacenti.

