4

Moto irrotazionale ed equazione di Laplace

L'analisi della dinamica della vorticità ha permesso di stabilire che il moto di un fluido non viscoso, incomprimibile oppure comprimibile isoentropico, sotto l'azione di forze di volume irrotazionali, che abbia inizio dalla quiete oppure da condizioni uniformi all'infinito, è sempre irrotazionale in tutta la parte dello spazio raggiungibile da fluido che proviene dall'infinito. Data l'importanza dei casi pratici che coinvolgono condizioni uniformi all'infinito o fluido in quiete all'infinito, lo studio dei moti irrotazionali costituisce una parte rilevante dell'Aerodinamica.
Una corrente insieme irrotazionale e solenoidale è completamente descritta dall'equazione di Laplace per il potenziale cinetico, del quale si discutono le condizioni di unicità. L'ipotesi di considerare solo corpi dotati di bordo di uscita aguzzo (corpi aerodinamici) consente di chiudere il problema.

Indice del capitolo

4.1 Flusso irrotazionale e solenoidale

Vogliamo determinare il campo di velocità indotto dal moto uniforme di un corpo immerso in un fluido in quiete. Ci limitiamo per ora a considerare il fluido come non viscoso ed incomprimibile.

Poniamoci in un sistema di riferimento solidale con il corpo, così che per un problema stazionario la velocità è funzione solo della posizione $\mathbf{x}$, ed assume all'infinito un valore costante $\mathbf{V}_\infty$.. All'infinito, di conseguenza, il vettore vorticità è identicamente nullo. Come abbiamo ampiamente discusso in precedenza, $\boldsymbol{\omega}$ deve allora restare identicamente nullo, in forza della equazione (3.5), in tutti i punti del campo di moto che siano riconducibili ad un punto all'infinito mediante linee di corrente (cioè lungo linee che siano traiettorie di una particella di fluido).

Le condizioni di irrotazionalità e incomprimibilità (che implicano un atto di moto senza espansioni né rotazioni) determinano il campo di moto, mediante la risoluzione del seguente sistema, composto da quattro equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Consideriamo un cammino chiuso l all'interno del fluido, e calcoliamo la circolazione di $\mathbf{V}$ attorno a tale cammino. Se $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = 0$ in tutti i punti del fluido, per il teorema di Stokes (3.10) risulta sempre

$$\oint_l \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c = 0$$

per qualsiasi cammino l che sia riducibile e che sia contenuto nel fluido.

Se P_1 e P_2 sono due punti che giacciono in una regione connessa del fluido, e se l_1 ed l_2 sono due cammini che uniscono i due punti in modo tale che, insieme, formino un cammino chiuso riducibile, dalla relazione precedente segue immediatamente che

$$\int_{l_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c = \int_{l_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c$$

4.1.1 Il potenziale cinetico

È allora possibile definire una funzione scalare φ, detta potenziale cinetico o potenziale di velocità, che dipende dalla posizione del punto P_2, tale che

$$\varphi(P_2) = \varphi(P_1) + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c \tag{4.2}$$

La posizione del punto P_1 non ha importanza, in quanto della funzione φ ci interessa solamente il gradiente, che è funzione solo di P_2. Detta $\mathbf{x}$ la posizione di P_2 si ha:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \tag{4.3}$$

La velocità ottenuta come gradiente di φ soddisfa identicamente la richiesta di irrotazionalità del campo di moto, come garantito dalla relazione (B.6).

L'equazione di Laplace Sostituendo l'espressione (4.3) per $\mathbf{V}$ nel sistema (4.1), si vede che le quattro equazioni scalari si riducono ad un'unica equazione scalare, l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{4.4}$$

nell'unica incognita scalare costituita dalla funzione potenziale φ.

Questa equazione, che va naturalmente dotata di opportune condizioni al contorno, è una equazione *lineare*, che si incontra in molti ambiti della Fisica Matematica. Osserviamo che, grazie alla richiesta che il campo di velocità sia contemporaneamente irrotazionale e solenoidale, le equazioni del moto, che sono non lineari, si sono trasformate in una sola equazione scalare lineare, che non dipende esplicitamente dal tempo.

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a derivate parziali e di tipo ellittico, per la quale esistono numerosi risultati. È nota per esempio l'importante proprietà che le sue soluzioni (che si dicono anche funzioni armoniche) sono ovunque funzioni continue insieme alle loro derivate, tranne che eventualemente su alcuni punti del contorno.

Le caratteristiche delle soluzioni dell'equazione di Laplace dipendono però dalla topologia del dominio spaziale entro cui essa deve essere risolta. Per questo motivo consideriamo nel seguito prima le regioni semplicemente connesse, e successivamente quelle connesse con molteplicità 2. Osserviamo anche che in Aerodinamica i dominî biconnessi sono altrettanto importanti di quelli monoconnessi, e che le caratteristiche delle soluzioni dell'equazioni di Laplace in dominî biconnessi sono alla base della teoria della portanza.

4.1.2 La funzione di corrente

Si può vedere facilmente che il problema di Laplace, formulato sinora in termini della funzione potenziale φ, può essere formulato equivalentemente anche per la funzione di corrente ψ. La funzione di corrente si può introdurre a partire dal suo significato fisico, che è quello di portata attraverso una superficie. Nel caso bidimensionale, se P_1 e P_2 sono due punti che giacciono in una regione connessa del fluido, ed l è una curva (aperta) che li unisce, la funzione ψ ha il significato di portata volumetrica (per unità di apertura), ovvero di flusso che attraversa la curva l:

$$\psi(P_2) = \psi(P_1) + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}c$$

Così come il potenziale, anche la funzione di corrente è definita a meno di una costante arbitraria $\psi(P_1)$, che non ci interessa in quanto saremo interessati sempre alle differenze fra i valori di ψ in punti diversi.

Si può mostrare semplicemente (utilizzando il teorema della divergenza) che il valore $\psi(\mathbf{x})$ dipende dalla posizione $\mathbf{x}$ del punto P_2 ma non dal percorso l che unisce P_1 a P_2 se il fluido è incomprimibile. Così come la funzione potenziale, che esiste se il moto è irrotazionale, soddisfa l'equazione di Laplace solo quando il fluido è incomprimibile, allo stesso modo la funzione di corrente esiste sotto la condizione di moto incomprimibile e se il moto è anche irrotazionale soddisfa l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2\psi = 0$$

Legame fra φ, ψ e componenti di velocità. La funzione potenziale cinetico e la funzione di corrente sono legate fra di loro e con le componenti u e v del vettore velocità secondo le relazioni:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4.5}$$

Le linee $\varphi = cost$ (linee equipotenziali) e $\psi = cost$ (linee di corrente) costituiscono un sistema di curve ortogonali. Proprietà analoghe sono caratteristiche delle componenti u e v della velocità; grazie alle condizioni di incomprimibilità e irrotazionalità, infatti, valgono le relazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Naturalmente anche u e v sono soluzioni dell'equazione di Laplace, e le linee $u = cost$ e $v = cost$ formano un sistema di curve ortogonali.

4.2 Regioni semplicemente connesse

Una regione dello spazio si dice semplicemente connessa (oppure connessa con molteplicità uno) quando ogni coppia di cammini che uniscono due punti restando sempre all'interno del fluido formano una curva chiusa riducibile. Il caso di interesse aerodinamico di un'ala tridimensionale immersa in una corrente uniforme è caratterizzato da questo tipo di topologia[1].

Se la regione dello spazio in cui il moto è irrotazionale è semplicemente connessa, ne segue immediatamente che il potenziale è una funzione *ad un sol valore* (monodroma) della posizione, definita a meno di una ininfluente costante additiva.

4.2.1 Condizioni di unicità per $\nabla\varphi$

È utile stabilire quali condizioni garantiscono una soluzione unica dell'equazione di Laplace. In particolare, dal momento che φ è definito a meno di una costante arbitraria, cerchiamo quali condizioni garantiscono l'unicità del gradiente di φ.

[1] Questa affermazione è valida per le ali di tipo convenzionale. Un'ala tipo quella del prandtlplano anche in tre dimensioni è caratterizzata da un dominio connesso con molteplicità due.

Come primo passo, osserviamo che per la (B.7) unita alla condizione di incomprimibilità si ha

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi + \varphi \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$$

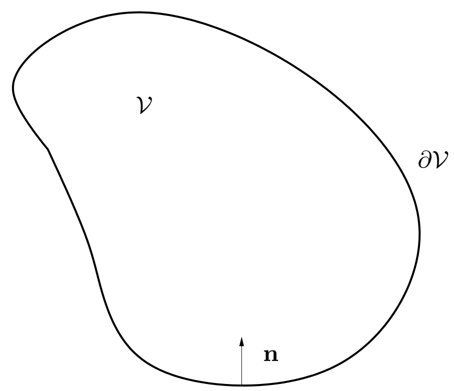

Figura 4.1 Problema interno ad un dominio $\mathcal{V}$ semplicemente connesso

Consideriamo ora un volume $\mathcal{V}$ occupato dal fluido (figura 4.1), e calcoliamo

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, \mathrm{d}\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi \mathbf{V}) \, \mathrm{d}\mathcal{V}$$

In un dominio semplicemente connesso, sia φ che $\mathbf{V}$, e quindi anche il loro prodotto, sono funzioni monodrome della posizione $\mathbf{x}$. È quindi lecito riscrivere l'integrale precendente, facendo uso del teorema della divergenza, come un integrale esteso al solo contorno $\partial\mathcal{V}$ del volume:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, \mathrm{d}\mathcal{V} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \varphi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.6}$$

in cui $\mathbf{n}$ è la normale al contorno $\partial\mathcal{V}$ rivolta verso il fluido.

Da questa relazione si ricava immediatamente il risultato notevole che se $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ in tutti i punti del contorno, allora in tutti i punti del volume $\mathcal{V}$ è $\mathbf{V} = 0$. L'unico moto irrotazionale di un fluido non viscoso e incomprimibile in una regione semplicemente connessa sul contorno della quale la componente normale della velocità sia nulla è il moto con velocità ovunque nulla.

Questa osservazione suggerisce inoltre che siano i valori di $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ prescritti al contorno a determinare la soluzione. Per verificarlo, basta considerare due soluzioni φ_a e φ_b dell'equazione di Laplace, con i rispettivi gradienti $\mathbf{V}_a = \boldsymbol{\nabla}\varphi_a$

e $\mathbf{V}_b = \boldsymbol{\nabla}\varphi_b$. Per la linearità, anche la differenza $\varphi_a - \varphi_b$ è una soluzione, per la quale la relazione (4.6) diviene

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b) \cdot (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b)\ \mathrm{d}\mathcal{V} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} (\varphi_a - \varphi_b)\,(\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}$$

Quindi l'unicità della soluzione, cioè $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b$ in tutto il volume, è garantita quando $\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{n}$ su $\partial\mathcal{V}$, oppure quando $\varphi_a = \varphi_b$ su $\mathcal{V}$. L'unicità inoltre è garantita qualndo le due soluzioni hanno lo stesso valore del potenziale in alcune parti del contorno, e lo stesso valore per la derivata normale del potenziale sulle parti rimanenti.

L'infinito Una dimostrazione simile a quella appena sviluppata, relativa ad un problema interno, va condotta per il caso esterno in cui un corpo è immerso in un'estensione infinita di fluido. Per questo motivo è necessario conoscere il comportamento di φ all'infinito, cosa che faremo nel seguito. Ci limitiamo dunque in questa sede ad esporre il risultato che, anche nel problema esterno, la condizione di velocità normale imposta sul solo contorno interno (il contorno del corpo) è sufficiente per determinare univocamente la soluzione.

Laplace e problemi dinamici A seguito delle condizioni di unicità ora ricavate, l'intero campo di moto irrotazionale di un fluido non viscoso ed incomprimibile è completamente determinato dalla distribuzione sul contorno della componente normale della velocità.

Se il contorno rappresenta la superificie di un corpo rigido che si muove all'interno di un fluido altrimenti in quiete, l'intero campo di moto dipende dal valore istantaneo della velocità del corpo (e, naturalmente, dalla sua geometria). Il valore istantaneo dell'accelerazione, e la storia precedente del flusso, non hanno invece alcuna influenza. Ciò significa che il campo di moto si adatta in maniera istantanea ad un cambiamento delle condizioni al contorno (per esempio, un'accelerazione del corpo).

In effetti l'equazione di Laplace (4.4) non contiene derivate rispetto al tempo. Ciò non significa che non si possono ricondurre allo schema matematico dell'equazione di Laplace i problemi evolutivi, ma indica solo il fatto che la soluzione si adatta istantaneamente alla modifica delle condizioni al contorno.

4.3 Regioni biconnesse

Una regione dello spazio si dice connessa con molteplicità due quando non tutti i cammini che uniscono due punti del dominio rimandendo sempre all'interno del fluido sono riducibili. Questo implica immediatamente che la condizione di irrotazionalità non è più sufficiente per garantire l'esistenza di una funzione potenziale monodroma: il potenziale come definito dalla (4.2) esiste, ma è in generale una funzione polidroma (a più valori).

Il caso di regione biconnessa riveste grande importanza nella nostra trattazione, perché vi ricade il moto bidimensionale di un fluido attorno ad un corpo solido in esso immerso.

La circolazione di $\mathbf{V}$ attorno a quei cammini che siano riducibili è ancora nulla, ma quella calcolata lungo cammini non riducibili in generale non è nulla, anche se non cambia per tutti i circuiti dello stesso tipo. Se chiamiamo Γ questo valore costante della circolazione, si ha

$$\oint_l \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c = \Gamma$$

per quei cammini l che non sono riducibili e circondano una volta la lacuna.

La costante Γ si chiama *costante ciclica*. Infatti per i cammini che non sono riducibili e circondano la lacuna n volte, la circolazine della velocità è pari a $n\Gamma$, dove l'intero n si intende dotato di segno, dipendendo dal verso di percorrenza di l. Se definiamo come valore principale del potenziale il valore

$$\varphi^*(P) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c$$

quando l'integrale viene calcolato lungo un cammino che non circonda la lacuna, il valore del potenziale in un punto è uguale al suo valor principale a meno di multipli interi della costante ciclica

$$\varphi(P) = \varphi^*(P) \pm n\Gamma$$

Vale la pena di notare che la polidromia di φ non costituisce un problema, dal momento che siamo interessati al suo gradiente: la derivata della costante $\pm n\Gamma$ è nulla.

4.3.1 Condizioni di unicità per $\boldsymbol{\nabla}\varphi$

Per ricavare in §4.2.1 le condizioni sotto cui $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ è univocamente determinato in un dominio semplicemente connesso, abbiamo fatto uso del teorema della divergenza, che richiede fra l'altro la monodromia delle funzioni integrande. Il ragionamento può essere immediatamente utilizzato per un dominio biconnesso solo nel caso particolare in cui sia $\Gamma = 0$, per il quale il potenziale è effettivamente ad un sol valore.

Per trovare le condizioni di unicità nel caso generale in cui $\Gamma \neq 0$, un ragionamento molto veloce è il seguente. Supponiamo che φ_a e φ_b siano due soluzioni dell'equazione di Laplace dotate della stessa costante ciclica Γ. Allora per la linearità $\varphi_a - \varphi_b$ è un'ulteriore soluzione, dotata di costante ciclica nulla. Ad essa dunque si applicano immediatamente i risultati di §4.2.1. Ne segue che in un dominio biconnesso la soluzione è univocamente determinata dalla componente normale della velocità sul contorno, se si conosce il valore della costante ciclica.

Per poter applicare il teorema della divergenza e ricavare quindi le condizioni di unicità, un dominio biconnesso deve essere reso monoconnesso mediante

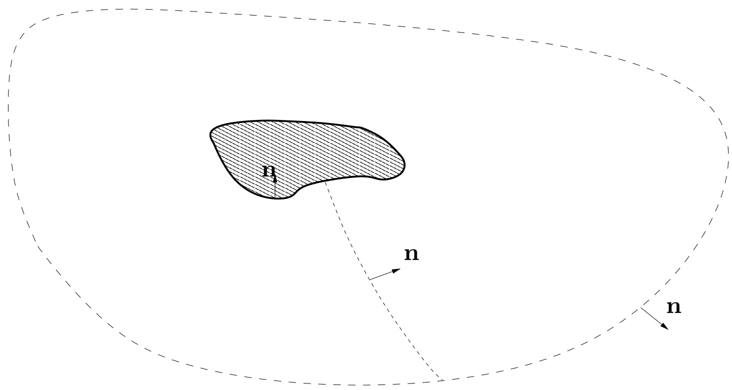

Figura 4.2 Un dominio biconnesso può essere reso monoconnesso mediante l'introduzione di un taglio t: tutti i cammini chiusi *interni* al dominio sono ora riducibili.

l'introduzione di un taglio o barriera, mostrato schematicamente in figura 4.2. La barriera, che ha unicamente significato topologico, non permette di considerare cammini sempre contenuti nel fluido che la attraversino, ed in questo modo il potenziale torna ad essere una funzione monodroma. Il prezzo da pagare per questa operazione consiste nell'accettare che il potenziale possa presentare una discontinuità attraverso la linea del taglio: infatti i due punti A e A' indicati in figura sono dal punto di vista topologico agli estremi opposti della regione, ed assumono valori non legati fra loro.

Con riferimento alla geometria riportata nella figura 4.2, la relazione (4.6) per un dominio biconnesso mediante l'introduzione di una barriera si riscrive:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathcal{S} = \oint_{l_\infty} \varphi\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c - \oint_{l_1} \varphi\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c + \int_t \varphi^-\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c - \int_t \varphi^+\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c$$

in cui φ^+ e φ^- sono i valori del potenziale dai due lati della barriera. Dato che

$$\varphi^- - \varphi^+ = \int_A^{A'} \mathbf{V}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}c = \Gamma$$

si ottiene l'espressione finale

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\,\mathrm{d}\mathcal{S} = \oint_{l_\infty} \varphi\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c - \oint_{l_1} \varphi\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c + \Gamma\int_t \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}c$$

che conferma il risultato ricavato in precedenza: la soluzione è determinata univocamente quando si conosce il valore della componente normale sul contorno unitamente al valore della costante ciclica.

Ciò equivale a dire che la soluzione *non* è determinata in modo univoco se non si conosce Γ, cosa che di norma accade in quanto la costante ciclica, legata alla circolazione attorno al corpo, si può ricavare solo a partire da informazioni di tipo viscoso.

4.4 Corpi tozzi e corpi aerodinamici

Se il corpo ha forma generica e senza spigoli, ovvero è un corpo *tozzo* (figura 4.3), dietro di esso si forma una scia, la cui dimensione nel senso normale alla direzione del moto non è trascurabile, essendo confrontabile con la lunghezza del corpo stesso. All'interno della scia, sono presenti zone di ricircolazione del flusso, in cui la vorticità non è nulla. In effetti le conseguenze del teorema di Kelvin non si applicano ai punti contenuti all'inbterno della scia, dai quali non è possibile ricondursi all'infinito seguendo la traiettoria di una particella di fluido (la scia prende talvolta il nome di regione di acqua morta).

Le geometrie di tipo *aerodinamico*, a cui in particolare appartengono i profili alari, sono invece caratterizzate da una dimensione longitudinale prevalente rispetto allo spessore, e soprattutto da un bordo di uscita aguzzo. Quando un corpo aerodinamico viene investito dalla corrente secondo angoli di incidenza non troppo elevati, la scia resta relativamente sottile e si stacca dal corpo proprio in corrispondenza del bordo di uscita.

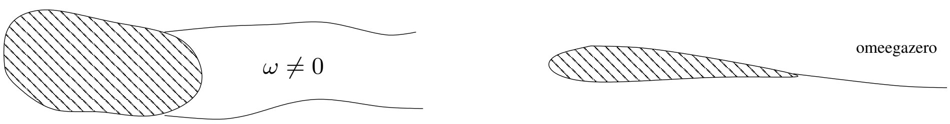

Figura 4.3 Corpo tozzo (a sinistra) con scia vorticosa di dimensioni non trascurabili, e corpo aerodinamico (a destra) con scia sottile che si stacca dal bordo di uscita aguzzo.

Come vedremo meglio nel prossimo paragrafo, per il flusso intorno ad un corpo di forma aerodinamica, l'ipotesi di moto irrotazionale in gran parte del campo di moto è ragionevole. Grazie ad essa è possibile semplificare significativamente la formulazione matematica del problema, ritenendo che sia $\boldsymbol{\omega} = 0$ ovunque, tranne che all'interno della scia. Inoltre la scia si distacca dal bordo di uscita aguzzo del profilo, e resta sottile; essa può quindi essere approssimata con una linea, il cui punto di distacco dal profilo è conosciuto.

Riusciremo quindi a descrivere una corrente che contiene anche della vorticità (per quanto concentrata in una linea sottile) attraverso l'equazione di Laplace, che come abbiamo visto descrive matematicamente solo campi di moto irrotazionali.

4.4.1 Avvio impulsivo di un profilo

DA SCRIVERE.
PENSARE ALLE FIGURE

4.5 Condizioni al contorno per l'equazione di Laplace

Stabiliamo allora quali sono le condizioni al contorno necessarie per determinare univocamente la soluzione nel caso di corpo aerodinamico, nel quale l'informazione mancante relativa alla costante ciclica viene fornita dalla geometria, che impone il distacco dellla scia dal bordo di uscita.

Se il profilo è in quiete ed investito da una corrente uniforme, all'infinito la velocità è nota e pari a $\mathbf{V}_\infty$, per cui la condizione al contorno è:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi(\infty) = \mathbf{V}_\infty$$

Sul contorno del corpo si impone la condizione di non penetrazione, che in termini di potenziale è

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{n} = 0$$

che costituisce una condizione di Neumann omogenea per φ.

Quando invece il sistema di riferimento è fisso invece che solidale con il corpo, le due condizioni precedenti divengono:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi(\infty) = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}$$

La parte non banale consiste nel trovare condizioni al contorno opportune da imporre sulla scia. Questo problema viene esaminato nel paragrafo che segue.

4.5.1 La scia

Perché il problema di Laplace sia posto correttamente, occorre specificare una condizione al contorno per la funzione potenziale anche sulla parte del contorno costituita dalla scia, e non è immediatamente evidente quale sia la condizione corretta. La forma di questa parte di contorno è inoltre a priori incognita, e deve quindi essere ricavata come parte della soluzione stessa: l'unica informazione disponibile consiste nel conoscere - ma solo per il caso di corpi di tipo aerodinamico - il punto di distacco, che deve coincidere con il bordo di uscita aguzzo.

Per completare le condizioni al contorno, è importante ricordare che, in presenza di una discontinuità come la scia, le equazioni del moto in forma differenziale non si possono utilizzare, ma questo non significa che i valori delle variabili fluidodinamiche siano del tutto arbitrari. Esistono infatti dei vincoli a cui le grandezze in gioco devono comunque soddisfare. Essi possono essere ricavati a partire dalle leggi di conservazione, che sono ancora applicabili anche a cavallo di una discontinuità, purché se ne usi la formulazione integrale.

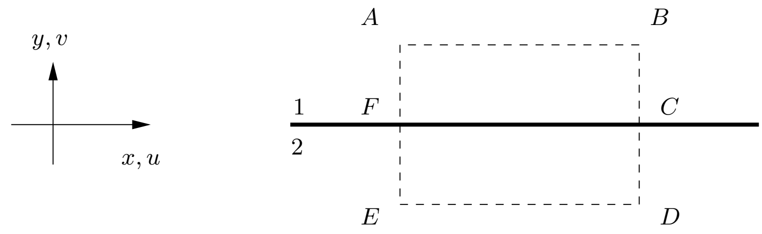

Figura 4.4 Percorso di integrazione per l'applicazione delle relazioni di conservazione in forma integrale a cavallo della scia.

La conservazione della massa Consideriamo allora l'equazione di conservazione della massa nella forma integrale (2.5d), e limitiamoci per semplicità alle due dimensioni. Dal momento che il contorno di integrazione è arbitrario, si può scegliere un rettangolo con due lati paralleli alla scia e due lati ortogonali ad essa. Con riferimento alla figura 4.4, indicando con i pedici 1 e 2 le grandezze ai due lati della scia, la conservazione della massa, lungo il percorso ABCDEF indicato in figura, si scrive come

$$\oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}c = \int_A^B v_1 \, \mathrm{d}x + \int_B^C u_1 \, \mathrm{d}y + \int_C^D u_2 \, \mathrm{d}y + \int_D^E -v_2 \, \mathrm{d}x +$$
$$\int_E^F -u_2 \, \mathrm{d}y + \int_F^A -u_1 \, \mathrm{d}y = 0$$

Facendo ora tendere a zero la lunghezza dei segmenti AE e BD, dal momento che il percorso di integrazione è arbitrario, l'equazione integrale non perde validità. Tutti gli addendi che contengono la componente u danno ora un contributo nullo. Prendendo anche il segmento AB abbastanza corto da poter ritenere costanti le velocità v_1 e v_2, restano solo i due contributi:

$$|B - A| v_1 - |E - D| v_2 = 0$$

Segue immediatamente che deve essere $v_1 = v_2$. Il potenziale, che è definito da entrambi i lati della discontinuità ma in generale è discontinuo, è quindi soggetto al vincolo di avere derivata normale continua:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_1 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_2 \tag{4.7a}$$

Questo risultato è di validità generale. Ogni volta che, in presenza di discontinuità, riusciamo ad applicare delle leggi di conservazione scritte in forma integrale per una certa variabile di stato, troviamo il risultato che la variabile stessa può essere discontinua, ma il suo flusso in direzione normale alla discontinuità deve essere continuo dai due lati della discontinuità stessa.

Nel caso particolare della scia per un flusso stazionario, la discontinuità è anche una linea di corrente; la derivata normale del potenziale, oltre che costante attraverso la discontinuità, deve essere pure nulla.

La conservazione della quantità di moto Una ulteriore condizione può essere fatta discendere dall'equazione integrale di conservazione per la quantità di moto (2.6d). La continuità della componente del flusso di quantità di moto in direzione normale alla scia si scrive

$$(\rho \mathbf{V}\mathbf{V} + p\, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}|_1 = (\rho \mathbf{V}\mathbf{V} + p\, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}|_2$$

Ne segue che, dovendo essere la componente normale di $\mathbf{V}$ continua per le (4.7a), a cavallo della scia stessa anche la pressione deve essere continua:

$$p_1 = p_2 \tag{4.7b}$$

Sulla parte di contorno costituita dalla scia si devono quindi imporre le condizioni (4.7a-b). La condizione di continuità della pressione attraverso la scia può essere utilmente riscritta in termini di velocità e quindi di potenziale. Lo strumento per operare questo passaggio è il teorema di Bernoulli. Esprimiamo la pressione dai due lati della scia utilizzando il teorema nella forma generale instazionaria (2.14):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\varphi_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi_1}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi_2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \tag{4.8}$$

Questa relazione può anche riscriversi come:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi_1 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_2) \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi_1 - \boldsymbol{\nabla}\varphi_2)}{2} = 0$$

Sulla scia non è definita una velocità macroscopica. Possiamo però definire la velocità $\mathbf{V}_s$ *sulla scia* come media delle velocità macroscopiche dai due lati della discontinuità, ovvero

$$\mathbf{V}_s = \frac{\boldsymbol{\nabla}\varphi_1 + \boldsymbol{\nabla}\varphi_2}{2}$$

Se inoltre utilizziamo il simbolo $\Delta\varphi$ per rappresentare il salto di potenziale attraverso la scia, cioè:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi + \mathbf{V}_s \cdot \boldsymbol{\nabla}\Delta\varphi = 0$$

Definendo un operatore di significato assai prossimo a quello della derivata materiale

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

possiamo scrivere in definitiva una condizione di trasporto lagrangiano del salto di potenziale $\Delta\varphi$ ad opera della velocità media sulla scia, condizione che è valida per tutta la scia

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\Delta\varphi = 0 \tag{4.9}$$

Nel caso particolare di moto stazionario, questa condizione afferma semplicemente che il salto di potenziale $\Delta\varphi$ si mantiene costante per una particella trasportata da una velocità pari a $\mathbf{V}_s$, cioè è costante sulla scia.

Osserviamo come questa condizione al contorno è l'unica in cui compaia la dinamica del sistema. Come abbiamo già avuto modo di osservare al termine di §4.2.1, la presenza di una dinamica non è completamente esclusa dall'equazione di Laplace: una dipendenza dal tempo può esistere nelle condizioni al contorno, ma la corrente si adatta istantaneamente alle modifiche introdotte dalla condizione al contorno stessa (che si propagano quindi con velocità infinita; si veda §10.1 per un modello del flusso in cui la velocità di propagazione delle informazioni è finita).

Scia e discontinuità di velocità La linea (in tre dimensioni, la superficie) costituita dalla scia è certamente, in generale, sede di discontinuità per la funzione potenziale. La funzione φ però non ha significato fisico, e a noi interessano solamente i suoi gradienti. In particolare ci interessa stabilire se la velocità sia o meno discontinua attraverso la scia.

Nel caso bidimensionale stazionario, possiamo asserire che la scia non è luogo di alcuna discontinuità delle grandezze fisiche. Le condizioni (4.7a) sono sufficienti a garantirci che è continua non solo la componente della velocità normale alla scia, ma anche la componente parallela, come si può facilmente vedere dalla relazione (4.8), che stabilisce in assenza della derivata temporale la continuità di V^2.

Una vera discontinuità della velocità può invece essere presente nel caso bidimensionale instazionario (perché nella (4.8) la derivata temporale non è nulla), oppure nel caso tridimensionale, in cui, anche se il problema è stazionario, $\mathbf{V}$ ha tre componenti ed il suo modulo non è univocamente fissato da due sole condizioni.

4.6 La forza aerodinamica

La schematizzazione della corrente di un fluido non viscoso e incomprimibile in moto irrotazionale attorno a un corpo solido mediante l'equazione di Laplace consente direttamente di effettuare importanti osservazioni di carattere generale sulla forza aerodinamica $\mathbf{F}_a$ che una corrente uniforme può esercitare sul corpo, all'interno di questo schema fisico-matematico. Indipendentemente dalla geometria del corpo, infatti, il comportamento asintotico del potenziale cinetico φ all'infinito può essere ricavato in maniera generale, ricorrendo solo a proprietà della equazione di Laplace. Questo comportamento viene descritto nel seguito, e più precisamente in §5.5.3, allo scopo di sfruttare per la dimostrazione la formula di Green (ricavata in §5.5). Anticipiamo però in questa sede i principali principali di quella trattazione.

Il comportamento di φ all'infinito Consideriamo allora un corpo, di contorno $\mathcal{S}_1$, immerso in un fluido e dotato di moto relativo rispetto ad esso. Anticipiamo il risultato che verrà dimostrato in §5.5.3, e, detto $\mathbf{r}_0$ un punto molto lontano dal profilo, vediamo quale sia il comportamento asintotico della funzione $\varphi(\mathbf{r}_0)$ quando $\mathbf{r}_0 \to \infty$.

Sotto l'unica ipotesi che il punto $\mathbf{r}_0$ possa allontanarsi indefinitamente dal corpo (che quindi deve essere di estensione finita), si dimostra che il potenziale, semplicemente in quanto soluzione dell'equazione di Laplace, ha un andamento asintotico proporzionale a $\log r_0$ nel caso bidimensionale. Quando poi il moto attorno al corpo è aciclico, cioè la circolazione calcolata su un cammino che circonda il corpo è nulla, allora il termine preponderante del potenziale molto lontano dal corpo è proporzionale a $1/r_0$. Inoltre il comportamento è $\sim 1/r_0$ quando non c'è flusso di massa attraverso il contorno $\mathcal{S}_1$ del corpo: questo si verifica molto spesso (ma non sempre) nei problemi che ci interessano, come vedremo nel seguito.

Per quanto riguarda le tre dimensioni, si arriva a conclusioni simili, che però hanno limiti di validità molto diversi. Infatti si vedrà che, sempre sotto l'ipotesi di corpo finito, quando r_0 è molto grande $\varphi(\mathbf{r}_0) \sim 1/r_0$ e, se il flusso di massa attraverso il contorno del corpo è nullo, il termine preponderante del potenziale diviene $\sim 1/r_0^2$. Nel caso tridimensionale, però, l'ipotesi di "corpo finito" diviene non banale, in quanto essa non è verificata per un corpo di estensione finita che produca portanza: dietro ad un corpo di questo tipo esiste inaffti una scia. Per un corpo tridimensionale e portante, dunque, le conclusioni di §5.5.3 non si applicano, e come si vedrà in dettaglio nel Capitolo 8, i risultati sono molto diversi anche dal punto di vista qualitativo.

Il calcolo della forza Affrontiamo allora il calcolo della forza aerodinamica $\mathbf{F}_a$. Come stabilito in §1.6, la forza aerodinamica è, secondo la formula (1.24), l'integrale del flusso di quantità di moto $\mathbf{J_Q}$ attraverso una superficie $\mathcal{S}_1$ infinitamente prossima al corpo. Nel caso non viscoso, questo equivale ad integrare lungo $\mathcal{S}_1$ gli sforzi normali. Sempre in §1.6 abbiamo anche osservato che, quando il moto è stazionario, la forza aerodinamica è data anche dallo stesso integrale calcolato su un contorno qualsiasi diverso da $\mathcal{S}_1$. Infatti la differenza fra due valori diversi dell'integrale eguaglia la variazione nel tempo della quantità di moto del fluido, che è appunto nulla nel caso stazionario. Consideriamo allora un contorno $\mathcal{S}_\infty$ infinitamente lontano dal corpo, come abbiamo mostrato nella figura 1.3. In regime stazionario la forza aerodinamica è

$$\mathbf{F}_a = -\oiint_{\mathcal{S}_\infty} \mathbf{J_Q} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathcal{S}$$

Questa espressione vale, quando il moto è stazionario, anche per flussi viscosi, purché si utilizzi per il tensore $\mathbf{J_Q}$ l'espressione corrispondente. Ma nella nostra ipotesi di fluido non viscoso si ha

$$\mathbf{F}_a = -\oiint_{\mathcal{S}_\infty} (\rho\mathbf{V}\,\mathbf{V} + p\,\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}. \tag{4.10}$$

Sulla superficie $\mathcal{S}_\infty$, se la scia ha spessore infinitesimo come abbiamo supposto in precedenza, vale ovunque la relazione di Bernoulli (2.13) nella forma stazionaria ed incomprimibile

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2}$$

che permette di esprimere la pressione su $\mathcal{S}_\infty$ come

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(V_\infty^2 - V^2\right).$$

Ora scriviamo la velocità sulla superficie $\mathcal{S}_\infty$ come

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{v}$$

in cui $\mathbf{v}$ è un termine piccolo rispetto a $\mathbf{V}_\infty$. Notiamo che questo non costituisce in alcun modo un'approssimazione: infatti, pur di scegliere la superficie $\mathcal{S}_\infty$ ad una distanza sufficientemente grande dal corpo (il che é permesso quando il corpo è di estensione finita), il modulo di $\mathbf{v}$ può diventare piccolo a piacere rispetto a V_∞.

Sostituiamo ora questa espressione di $\mathbf{V}$ nella (4.10). La forza aerodinamica diviene:

$$\mathbf{F}_a = -\rho \oiint_{\mathcal{S}_\infty} \Big[\mathbf{V}_\infty\mathbf{V}_\infty + \mathbf{v}\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{v} + \\ + \left(\frac{p_\infty}{\rho} - \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right)\mathbf{I}\Big] \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}. \tag{4.11}$$

I termini quadratici Per moti bidimensionali, i termini quadratici nella quantità piccola $\mathbf{v}$ possono essere trascurati nell'espressione della forza aerodinamica. La medesima semplificazione può essere sfruttata nel caso tridimensionale solo quando il corpo non produce portanza.

La giustificazione di questa importante semplificazione, che come vedremo comporta una forza aerodinamica priva della componente di resistenza, sta nel comportamento all'infinito di φ, che verrà stabilito in §5.5.3. Nel caso bidimensionale si ricava infatti, sotto l'ipotesi che il corpo abbia estensione finita, che all'infinito $\varphi \sim \log r$. La velocità (ovvero la differenza con la velocità costante V_∞) è il gradiente di φ, di conseguenza varia con il raggio in maniera proporzionale a $1/r$.

Nell'integrale (4.11) i termini quadratici, proporzionali a $1/r^2$, sono integrati lungo un percorso la cui lunghezza cresce linearmente con r. Il risultato dell'integrale dei termini quadratici è quindi $\sim 1/r$, e può essere trascurato al tendere all'infinito della distanza del contorno $\mathcal{S}_\infty$ dal corpo. Anche nel caso tridimensionale ma non portante, $\varphi \sim 1/r$ e quindi $v \sim 1/r^2$: anche in questo caso l'omissione dei termini quadratici è giustificata.

Se si trascurano dunque i termini quadratici in $\mathbf{v}$, si ottiene per la forza aerodinamica l'espressione:

$$\mathbf{F}_a = -\rho \oiint_{\mathcal{S}_\infty} \left[\mathbf{V}_\infty \mathbf{V}_\infty + \mathbf{v}\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_\infty \mathbf{v} + \left(\frac{p_\infty}{\rho} - \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{v} \right) \mathsf{I} \right] \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathcal{S}.$$

Osserviamo ora che in questa espressione alcuni addendi forniscono sempre un contributo nullo. Il primo addendo è un termine costante $\mathbf{V}_\infty \mathbf{V}_\infty$, che può essere portato fuori dal segno di integrate e resta moltiplicato scalarmente per l'integrale della normale $\mathbf{n}$ lungo il contorno chiuso $\mathcal{S}_\infty$, che è nullo per ragioni geometriche. Per lo stesso motivo è nullo il quarto addendo, ovvero il contributo di p_∞. Il terzo addendo è anch'esso nullo, ma per un motivo diverso: infatti

$$\mathbf{V}_\infty \oiint_{\mathcal{S}_\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathcal{S}$$

è proporzionale al flusso di massa attraverso $\mathcal{S}_\infty$, che deve essere uguale a quello attraverso $\mathcal{S}_1$ e quindi nullo se il corpo è impenetrabile (esistono però casi importanti in cui questo flusso di massa esiste e non può essere trascurato). La forza aerodinamica è quindi data solo dai due rimanenti termini:

$$\mathbf{F}_a = -\rho \oiint_{\mathcal{S}_\infty} \left[(\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}) \, \mathbf{v} - (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{v}) \, \mathbf{n} \right] \, \mathrm{d}\mathcal{S}.$$

Ricordando la formula (B.4) del doppio prodotto vettoriale, si può scrivere l'espressione precedente come:

$$\mathbf{F}_a = \rho \mathbf{V}_\infty \times \left(\oiint_{\mathcal{S}_\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathcal{S} \right).$$

È anche possibile sostiuire sostituire $\mathbf{V}$ al posto di $\mathbf{v}$, in quanto il termine aggiuntivo $-\mathbf{V}_\infty \times \oint \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathcal{S}$ fornisce comunque un contributo nullo:

$$\mathbf{F}_a = \rho \mathbf{V}_\infty \times \left(\oiint_{\mathcal{S}_\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{V} \, \mathrm{d}\mathcal{S} \right). \tag{4.12}$$

Questa espressione della forza aerodinamica mostra chiaramente come la sua direzione è ortogonale a quella del vettore velocità $\mathbf{V}_\infty$. Quindi la resistenza, che è la componente della forza aerodinamica parallela alla direzione di $\mathbf{V}_\infty$, è sempre nulla.

Il teorema di Kutta–Joukowski Nel caso bidimensionale, l'espressione (4.12) può essere ulteriormente semplificata, arrivando ad una relazione scalare. La quantità sotto il segno di integrale infatti è un vettore diretto perpendicolarmente al piano del moto (in cui giacciono sia $\mathbf{n}$ che $\mathbf{V}$) e di modulo pari a $\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}$, in cui $\mathbf{t}$ è il versore tangente al contorno.

Quindi l'integrale nella (4.12) rappresenta, a meno del segno, la circolazione Γ della velocità, che come è noto non dipende dal particolare cammino chiuso lungo cui viene calcolata, purch'e tale cammino circondi il profilo. Il modulo della forza aerodinamica è

$$L = \rho V_\infty \oint \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c = \rho V_\infty \Gamma. \tag{4.13}$$

Questo importante risultato è il teorema di Kutta–Joukowski, che prende il nome dai due scienziati (tedesco il primo, russo il secondo) che all'inizio del secolo scorso vi pervenirono in maniera indipendente.

4.6.1 Il paradosso di D'Alembert

Abbiamo già anticipato come per moti bidimensionali aciclici all'infinito il potenziale φ è asintotico a $1/r$. In questo caso, se il flusso di massa attraverso il contorno del corpo è nullo, anche la forza aerodinamica risulta identicamente nulla. Infatti anche il contributo dei termini lineari in v tende a zero al tendere all'infinito del contorno lontano $\mathcal{S}_\infty$.

Un discorso analogo vale nel caso tridimensionale non portante, in cui il potenziale è $\sim 1/r^2$ e quindi la velocità va a zero come $1/r^3$. Questo risultato prende il nome di paradosso di D'Alembert. Oggi è evidente che gli effetti resistivi, la cui esistenza nelle applicazioni pratiche era nota anche ai tempi di D'Alembert (vissuto nel XVIII secolo), sono legati alla viscosità del fluido. Ma questa ovvietà non era tale sino a non moltissimi anni fa: di qui l'importanza del risultato di Kutta e Joukowski.

Forza aerodinamica e vorticità La formula (4.12) per la forza aerodinamica può essere riscritta come:

$$\mathbf{F}_a = \rho \mathbf{V}_\infty \times \left(\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} \, \mathrm{d}\mathcal{V} \right).$$

In questo modo si mette in evidenza che un'eventuale contributo alla forza aerodinamica è proporzionale all'integrale di volume della vorticità. Di conseguenza, data l'ipotesi di irrotazionalità, la forza può essere determinata solo dalla vorticità presente nella scia, che in questa schematizzazione diviene una funzione δ di Dirac.