3

La dinamica della vorticità

Per comprendere la portata dell'ipotesi di moto irrotazionale, è utile considerare l'equazione che descrive la dinamica della vorticità. Si vede così che il campo di vorticità è calcolabile in forma chiusa quando è noto il campo di velocità. Nel caso di fondamentale interesse pratico in cui all'infinito si hanno condizioni di quiete o di moto uniforme (e quindi la vorticità è nulla), la soluzione in forma chiusa consente in particolare di determinare che il moto rimane irrotazionale in tutti i punti del campo di moto che possono essere raggiunti a partire dall'infinito attraverso una linea di corrente. Questo esclude solo la scia, che peraltro ha dimensioni trascurabili se il corpo immerso nel fluido ha uno spessore molto piccolo rispetto alla dimensione longitudinale e un bordo di uscita aguzzo (corpo aerodinamico).

Indice del capitolo

3.1 L'equazione per la vorticità 35
3.1.1 Il caso incomprimibile 36
3.1.2 Il caso comprimibile e isoentropico 39
3.2 L'equazione di continuità in coordinate lagrangiane 40
3.3 Proprietà integrali della vorticità 41
3.3.1 Il teorema di Kelvin 42
3.3.2 I teoremi di Helmholtz 44

3.1 L'equazione per la vorticità

Nel caso non viscoso, sia per fluido incomprimibile che comprimibile in moto isoentropico, l'equazione di stato presenta la dipendenza da non più di una variabile di stato termodinamico, mentre l'altra è bloccata. In queste ipotesi abbiamo scritto l'equazione di bilancio della quantità di moto nella forma di Crocco (2.12).

Consideriamo ora il rotore della (2.12). Con l'ipotesi addizionale che la forza di massa $\mathbf{f}$ sia irrotazionale (come accade, ad esempio, per la forza di gravità) e ricordando la proprietà (B.6) per cui il rotore di un gradiente è sempre nullo, si ricava immediatamente, invertendo l'ordine delle derivate spaziale e temporale, la seguente equazione per l'evoluzione temporale del vettore vorticità $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = 0$$

La pressione è scomparsa dal bilancio per la quantità di moto, che si è trasformato nel seguente sistema di sei equazioni scalari in sei incognite, costituito dall'equazione per la vorticità, e dalla definizione della vorticità in termini della velocità:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \end{cases} \tag{3.1}$$

Anche se apparentemente più complicato dell'equazione di partenza, il sistema (3.1) ha comunque una struttura utile, in quanto consente di vedere che, se si suppone noto il campo di velocità, l'equazione per la vorticità ammette una soluzione in forma chiusa.

Condizione di equivalenza Bisogna però osservare che il sistema (3.1) non è sempre equivalente all'equazione (2.12) di partenza. Infatti esso è stato ricavato mediante operazioni di derivazione, che come è noto fanno in modo che fra le soluzioni del nuovo sistema, che è di ordine più elevato, esistano anche funzioni che non sono soluzioni dell'equazione iniziale. Perché ci sia equivalenza fra (3.1) e (2.12), occorre che la soluzione di (3.1) permetta comunque di risalire ad una pressione, ovvero deve accadere che la quantità $\partial \mathbf{V}/\partial t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ sia uguale ad un gradiente.

Come è noto dai corsi di Analisi, se il dominio in cui si vogliono risolvere le equazioni (3.1) è monoconnesso, le (3.1) stesse sono sufficienti ad assicurare questa condizione. Se invece il dominio non è monoconnesso, deve anche valere la seguente condizione integrale:

$$\oint \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}c = 0$$

che va imposta su un cammino che circonda ciascuna parte convessa del contorno.

3.1.1 Il caso incomprimibile

L'equazione per la vorticità può essere ulteriormente trasformata, utilizzando un'altra volta l'identità vettoriale (B.4), e tenendo inoltre conto che ora compare la derivata di un prodotto. Il termine $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$ diviene:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = +(\nabla \cdot \mathbf{V})\,\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\,\mathbf{V} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{V} \quad (3.2)$$

In questa espressione, grazie alle proprietà (B.5) di solenoidalità del campo di un rotore, il termine $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$, in quanto divergenza di un rotore, è senz'altro nullo. Se il fluido è anche incomprimibile, anche il fattore $\nabla \cdot \mathbf{V}$ nella (3.2) è nullo, e, ricordando la definizione (2.3) dell'operatore di derivata sostanziale, l'equazione per la vorticità si riduce a:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{V} \quad (3.3)$$

Passaggio in coordinate lagrangiane Questa equazione ha una soluzione in forma chiusa, cui si perviene operando il passaggio a coordinate lagrangiane, la cui convenienza è suggerita dal fatto che la derivata materiale a primo membro è una semplice derivata temporale nel sistema lagrangiano.

Si introduce allora, a fianco della terna $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ del sistema di riferimento fisso, l'ulteriore terna mobile $\boldsymbol{\xi}$ che si muove localmente con la velocità del fluido, definita dall'equazione differenziale (2.1). Una trasformazione di questo tipo consente di scrivere la derivata della componente V_l della velocità rispetto alla direzione x_h secondo la (2.2a), come:

$$\frac{\partial V_l}{\partial x_h} = \frac{\partial V_l}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}$$

in cui gli indici ripetuti sottintendono il segno di sommatoria (convenzione di Einstein).

L'equazione (3.3) viene allora anzitutto scritta per componenti

$$\frac{\mathrm{D}\omega_l}{\mathrm{D}t} = \omega_h \frac{\partial V_l}{\partial x_h} \quad (3.4)$$

e successivamente si passa alle coordinate lagrangiane ξ_i:

$$\frac{\mathrm{D}\omega_l}{\mathrm{D}t} = \omega_h \frac{\partial V_l}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}$$

Per la trasformazione in coordinate lagrangiane (2.1), si ha che $\mathrm{D}x_l/\mathrm{D}t = V_l$. Si può quindi scrivere:

$$\frac{\mathrm{D}\omega_l}{\mathrm{D}t} = \omega_h \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\mathrm{D}x_l}{\mathrm{D}t}\right)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}$$

Poiché la derivata sostanziale è una derivata effettuata a $\boldsymbol{\xi}$ costante, e $\boldsymbol{\xi}$ e t sono quindi variabili indipendenti, al secondo membro è lecito scambiare l'ordine di derivazione fra la derivata sostanziale e la derivata rispetto a ξ_i:

$$\frac{\mathrm{D}\omega_l}{\mathrm{D}t} = \omega_h \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_i}\right)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}$$

Occorre ora scrivere i due membri dell'equazione in maniera simile; a tal fine si moltiplichi ω_l a primo membro per il tensore identità, ovvero

$$\delta_{lh} = \frac{\partial x_l}{\partial x_h} = \frac{\partial x_l}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}$$

Il primo membro diviene dunque

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\delta_{lh}\omega_h\right) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}\omega_h\right)$$

e sviluppando questa derivata sostanziale come derivata di un prodotto, si ottiene per l'intera equazione (3.4) la forma

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_i}\right)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}\omega_h + \frac{\partial x_l}{\partial \xi_i}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}\omega_h\right) = \omega_h\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_i}\right)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}$$

Diviene così evidente che due addendi si elidono. Dal momento che, poi, la matrice jacobiana $\partial x_l/\partial \xi_i$ è certamente non singolare, l'equazione (3.3) per la vorticità si riduce in definitiva all'equazione

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}\omega_h\right) = 0$$

Se ne deduce che la quantità $\partial \xi_i/\partial x_h \omega_h$ è costante nel tempo. Denominata $\omega_i^{(0)}$ tale costante, si può scrivere:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}\omega_h = \omega_i^{(0)}$$

La soluzione in forma chiusa Questa relazione può essere esplicitata rispetto ad ω_h, mediante la moltiplicazione di ambo i membri per l'inversa della matrice jacobiana. Si giunge quindi alla soluzione in forma chiusa:

$$\omega_h = \omega_i^{(0)}\frac{\partial x_h}{\partial \xi_i}$$

in cui $\omega_i^{(0)} = \omega_i(0, \boldsymbol{\xi})$ sono le componenti del vettore vorticità all'istante iniziale. In forma vettoriale si ha:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{3.5}$$

Significato geometrico ed importanza pratica della soluzione La (3.5) è una relazione di notevole importanza. Essa anzitutto costituisce una soluzione in forma chiusa dell'equazione di partenza (3.3), dal momento che non vi compaiono più derivate rispetto al tempo. Essa inoltre assume anche un significato geometrico, in quanto descrive l'evoluzione nel tempo di un vettore infinitesimo $\mathrm{d}\mathbf{x}$ tracciato fra due particelle macroscopiche di fluido. Infatti questa evoluzione è descritta da:

$$\mathrm{d}x_h = \frac{\partial x_h}{\partial \xi_i}\mathrm{d}\xi_i$$

Si può quindi concludere che il vettore vorticità evolve nel tempo esattamente come un segmento materiale infinitesimo trasportato dal fluido. La vorticità non può essere creata o distrutta.

La soluzione (3.5) fornisce l'importante informazione che se $\boldsymbol{\omega}^{(0)} = 0$ all'infinito allora la vorticità resta nulla in tutti i punti del campo di moto raggiungibili dall'infinito tramite una linea di corrente. I classici casi di corpo in moto uniforme in un fluido in quiete o di corpo fermo e investito da una corrente uniforme rappresentano due esempi importanti in cui tale informazione permette di affermare che il moto resta irrotazionale in tutto il campo, fatta eccezione per regioni (quali la scia) che non sono raggiungibili dall'infinito con una linea di corrente.

3.1.2 Il caso comprimibile e isoentropico

Come visto nel paragrafo § 2.3.2, per un fluido comprimibile in moto isoentropico l'equazione di bilancio della quantità di moto si può scrivere in forma analoga a quella del caso incomprimibile, pur di utilizzare, invece della pressione, la funzione scalare P definita dalla relazione (2.9). L'equazione per la vorticità si ricava quindi in maniera identica a quanto visto nel paragrafo precedente. L'unica differenza è che nella formula (3.2) il termine $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}$ non è nullo, e in luogo della (3.3) si ottiene invece l'equazione

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V})\,\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V} \tag{3.6}$$

Osserviamo però che il primo membro può essere riscritto, utilizzando l'equazione di continuità nella forma non conservativa (2.5b), come

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{\omega} = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)$$

Con il semplice cambio di variabile da $\boldsymbol{\omega}$ ad $\boldsymbol{\omega}/\rho$, si può quindi trasformare l'equazione (3.6) in

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{V}$$

che è analoga alla (3.3) valida nel caso incomprimibile. Anche nel caso comprimibile isoentropico, dunque, si arriva ad una soluzione analoga alla (3.5), cioè:

$$\frac{\omega_h}{\rho} = \left(\frac{\omega_i}{\rho}\right)^{(0)} \frac{\partial x_h}{\partial \xi_i}$$

o, in forma vettoriale:

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}^{(0)}}{\rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{3.7}$$

L'interpretazione geometrica di questa relazione è invariata: questa volta però è il vettore $\boldsymbol{\omega}/\rho$ a trasformarsi come il segmento infinitesimo $\mathrm{d}\mathbf{x}$.

3.2 L'equazione di continuità in coordinate lagrangiane

Anche l'equazione di continuità può essere scritta in forma lagrangiana. Il procedimento è simile a quello sviluppato nel paragrafo precedente.

Si parte dall'equazione di bilancio per la massa, scritta nella forma convettiva (2.5c). La divergenza della velocità si esprime in coordinate lagrangiane, e si inverte l'ordine di derivazione, sfruttando ancora una volta il fatto che t e $\boldsymbol{\xi}$ sono variabili indipendenti nella rappresentazione lagrangiana:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$$

Si giunge così all'equazione:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right) = 0$$

Derivata di un determinante Occorre ora utilizzare la formula generale che fornisce la derivata di un determinante rispetto ad un parametro t (il simbolo : indica il doppio prodotto scalare fra due tensori, definito nell'Appendice B):

$$\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^T : \frac{\mathrm{d}\mathsf{A}}{\mathrm{d}t} = |\mathsf{A}|^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathsf{A}| = \mathrm{tr}\left[\mathsf{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathsf{A}}{\mathrm{d}t}\right] \tag{3.8}$$

Questa relazione si dimostra sfruttando la proprietà che il determinante di un prodotto è uguale al prodotto dei determinanti. Allora, dopo aver dato un incremento $\delta\mathsf{A}$ alla matrice A, il determinante della matrice incrementata è:

$$|\mathsf{A} + \delta\mathsf{A}| = \left|\mathsf{A}\left(\mathsf{I} + \mathsf{A}^{-1}\delta\mathsf{A}\right)\right| = |\mathsf{A}|\left|\mathsf{I} + \mathsf{A}^{-1}\delta\mathsf{A}\right|$$

Il secondo fattore è il determinante di una matrice, poco diversa dalla matrice unità, in cui solo i termini diagonali danno contributi lineari nell'incremento. Di conseguenza risulta:

$$|\mathsf{A} + \delta\mathsf{A}| = |\mathsf{A}| \left[1 + \mathrm{tr}\left(\mathsf{A}^{-1}\delta\mathsf{A}\right)\right]$$

e

$$\delta\,|\mathsf{A}| = |\mathsf{A}|\,\mathrm{tr}\left(\mathsf{A}^{-1}\delta\mathsf{A}\right)$$

da cui, sostituendo la derivata all'incremento, si ottiene la formula (3.8).

Significato dell'equazione in coordinate lagrangiane Nel nostro caso, l'elemento A_{ij} della matrice A è dato da $\partial x_i/\partial \xi_j$. Detto $J = |\mathsf{A}|$ il determinante jacobiano della trasformazione, applicando la (3.8) si ottiene:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right) = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t}$$

e quindi, moltiplicando per J l'intera equazione, la si trasforma in:

$$J\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{DJ}{Dt} = 0$$

che non è altro che

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\rho J\right) = 0 \qquad (3.9)$$

La quantità ρJ resta costante nel tempo e pari al valore iniziale, il quale a sua volta è esattamente $\rho^{(0)}$, in quanto per $t = 0$ le terne $\mathbf{x}$ e $\boldsymbol{\xi}$ coincidono, e lo jacobiano è unitario. Il significato fisico della (3.9) si comprende ricordando che lo jacobiano $J = |\partial \mathbf{x}/\partial \boldsymbol{\xi}|$ rappresenta il rapporto fra gli elementi di volume nello spazio $\mathbf{x}$ (al tempo t) e nello spazio $\boldsymbol{\xi}$ (al tempo 0). L'equazione (3.9) descrive quindi l'evoluzione nel tempo del volume infinitesimo, e si limita ad affermare che la densità evolve nel tempo in maniera inversamente proporzionale all'evoluzione del volume.

3.3 Proprietà integrali della vorticità

L'equazione di evoluzione per la vorticità (3.3), e la sua soluzione in forma chiusa (3.5), così come le loro controparti comprimibili, sono relazioni differenziali che valgono solamente per le soluzioni sufficientemente regolari. Esse presentano quindi alcuni limiti di applicabilità, in presenza di situazioni (per esempio la presenza di una scia, oppure l'esistenza di una regione di flusso separato) in cui questi limiti non sono soddisfatti. In questi casi è possibile comunque ricorrere a proprietà integrali del vettore vorticità.

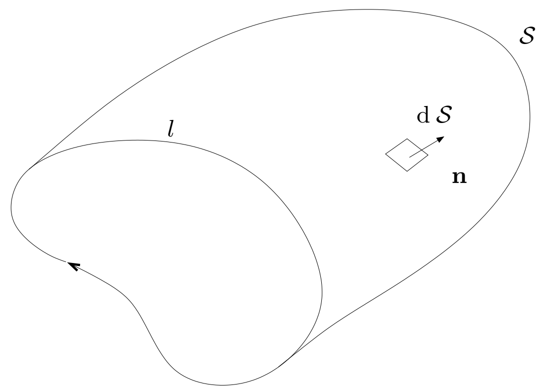

Figura 3.1 Teorema di Stokes: la circolazione di un vettore $\mathbf{V}$ intorno ad un cammino chiuso l eguaglia il flusso del rotore di $\mathbf{V}$ attraverso la superficie $\mathcal{S}$ che ha l come contorno.

Teorema di Stokes Anzitutto, per il solo fatto di essere definito da un operatore rotore, il campo di $\boldsymbol{\omega}$ è solenoidale, e la vorticità soddisfa il teorema di Stokes. Sulla base di considerazioni puramente cinematiche, quindi, si può affermare che:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\mathcal{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}\, \mathrm{d}c \tag{3.10}$$

in cui il secondo membro ha senso anche in presenza di discontinuità. Questa formula afferma che il flusso di vorticità attraverso una superficie $\mathcal{S}$ eguaglia la circolazione della velocità lungo una curva chiusa $\partial\mathcal{S}$ che sia il contorno della superficie stessa, e mette in luce il legame fra la circolazione della velocità ed un integrale della vorticità. (Notiamo che, se il dominio è semplicemente connesso, si può dedurre dal teorema di Stokes che la circolazione è anche nulla, e che esiste una funzione scalare φ continua e a un sol valore di cui $\mathbf{V}$ è il gradiente.)

3.3.1 Il teorema di Kelvin

È possibile mostrare, attraverso un procedimento dovuto a lord Kelvin (1869), che la circolazione della velocità non varia, *quando la si calcoli lungo un cammino che si muove con la velocità del fluido*. Questo equivale a dire che la derivata sostanziale dell'integrale di circolazione è zero:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \oint_l \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}\, \mathrm{d}c = 0 \tag{3.11}$$

Sia il cammino chiuso l di integrazione sia la funzione integranda dipendono, in generale, dal tempo. Il passaggio in coordinate lagrangiane rende però fisso il cammino di integrazione, ed è per questo che dimostreremo nel seguito il teorema di Kelvin utilizzando le coordinate lagrangiane.

Pasaggio in coordinate lagrangiane Consideriamo dunque un contorno l chiuso che si muova con il fluido, per la precisione con la velocità di massa del fluido in ciascun punto che lo compone. Questo contorno è fisso se espresso in coordinate lagrangiane. Calcoliamo dunque:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_l \mathbf{V}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}c = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_l V_i\,\mathrm{d}x_i = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_l V_i\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j$$

Potendo eseguire la derivata sostanziale sotto il segno di integrale, in quanto t e $\boldsymbol{\xi}$ sono variabili indipendenti, si ha:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_l \mathbf{V}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}c = \oint_l \frac{\mathrm{D}V_i}{\mathrm{D}t}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j + \oint_l V_i\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)\mathrm{d}\xi_j \tag{3.12}$$

Nell'ultimo addendo si può invertire l'ordine di derivazione:

$$\oint_l V_i\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)\mathrm{d}\xi_j = \oint_l V_i\frac{\partial V_i}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j = \oint_l \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}\xi_j$$

Questo termine è nullo in quanto integrale di un differenziale esatto lungo la curva chiusa l.

Osserviamo che, sino a questo punto, sono state utilizzate soltanto considerazioni di natura cinematica. Per mostrare che anche il primo addendo è nullo, devono invece entrare in gioco anche le equazioni della fluidodinamica, ed in particolare l'equazione di bilancio della quantità di moto di un fluido ideale, scritta nella forma convettiva (2.6c). Se esiste il potenziale termodinamico P definito dalla relazione (2.9), l'equazione della quantità di moto scritta per componenti, supponendo nulla la forza di volume, è

$$\frac{\mathrm{D}V_i}{\mathrm{D}t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$$

Utilizzando questa formula il primo addendo della (3.12) diviene:

$$\oint_l \frac{\mathrm{D}V_i}{\mathrm{D}t}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j = -\oint_l \frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j = -\oint_l \frac{\partial P}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j$$

Anche questo integrale è nullo in quanto integrale di un differenziale esatto lungo una linea chiusa. Resta così dimostrato, nelle medesime ipotesi che garantiscono l'esistenza del potenziale termodinamico P, il teorema di Kelvin (noto anche come teorema di conservazione della circolazione): in un fluido non viscoso e soggetto a forze di volume irrotazionali la circolazione della velocità, calcolata attorno ad un circuito in moto con la velocità di massa del fluido, rimane costante nel tempo.

3.3.2 I teoremi di Helmholtz

Ulteriori interessanti proprietà integrali del campo di vorticità sono enunciate attraverso i teoremi di Helmholtz sul moto dei vortici. Essi discendono in parte da considerazioni puramente cinematiche, mentre in altra parte fanno ricorso anche alle equazioni del moto, e costituiscono un'elaborazione di quanto già contenuto nel teorema di Kelvin, affermando nel complesso un insieme di regole dinamiche per l'evoluzione del vettore vorticità.

Alcune definizioni Le linee di campo del campo vettoriale di $\boldsymbol{\omega}$ prendono il nome di *linee vorticose*, definite analiticamente dalla relazione differenziale

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t} \, \mathrm{d}c = 0$$

in cui $\mathbf{t} \, \mathrm{d}c$ è un segmento infinitesimo di una linea vorticosa. Le linee vorticose hanno quindi tangente in ogni punto parallela ad $\boldsymbol{\omega}$. Una *superficie vorticosa* si definisce poi immaginando di tracciare una linea arbitraria nel campo di moto, e spiccando da essa le linee vorticose che passano per ciascuno dei suoi punti. Quando questa linea è chiusa, l'operazione genera un *tubo vorticoso*. Quando la sezione del tubo vorticoso tende a zero, siamo in presenza di un *filamento vorticoso*.

Il primo teorema di Helmholtz Il campo di vorticità è per definizione solenoidale, e di conseguenza il flusso di $\boldsymbol{\omega}$ attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo. Conseguenze dirette di questa proprietà puramente cinematica sono le seguenti, che talvolta vengono indicate globalmente con il nome di primo teorema di Helmholtz.

Il flusso di vorticità attraverso calcolato attraverso qualsiasi sezione $\mathcal{S}$ di un tubo vorticoso è costante:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\mathcal{S} = cost$$

Grazie al teorema di Stokes (3.10) che lega la circolazione della velocità attorno ad una linea chiusa l al flusso della vorticità attraverso una superficie aperta che abbia l come contorno, la stessa proprietà si può anche esprimere dicendo che la circolazione della velocità attorno a qualsiasi linea chiusa che circonda un tubo vorticoso è costante. Questo suggerisce l'idea che i tubi vorticosi sono permanenti. Infine, considerando un tubo vorticoso di sezione variabile, la vorticità media in ogni sezione del tubo è inversamente proporzionale all'area della sezione stessa.

Una conseguenza importante di queste affermazioni, che complessivamente asseriscono la conservazione spaziale della vorticità, sta nel fatto che i tubi e i filamenti vorticosi non possono iniziare o terminare all'interno di un fluido. Essi devono o richiudersi su se stessi, oppure terminare all'infinito o su una superficie solida.

Il secondo teorema di Helmholtz Utilizzando il teorema di Kelvin (3.11), non è difficile mostrare che una superficie che ad un dato istante è una superficie vorticosa resta tale per tutti gli istanti successivi. In altre parole, se inizialmente $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ per ogni elemento superficiale $\mathbf{n}\ \mathrm{d}\mathcal{S}$ della superficie, in seguito sarà sempre $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\mathcal{S} = 0$, anche se, in generale, sia $\boldsymbol{\omega}$ sia $\mathbf{n}\ \mathrm{d}\mathcal{S}$ potranno variare. In un fluido non viscoso quindi un tubo vorticoso si muove con il fluido e la sua intensità rimane costante.

Il terzo teorema di Helmholtz Segue dalle considerazioni precedenti che, essendo costante nel tempo la circolazione della velocità calcolata lungo una linea chiusa qualsiasi che circonda un tubo vorticoso, l'intensità del tubo vorticoso è costante nel tempo, indipendentemente dall'evoluzione del tubo vorticoso.