

Forme alternative delle equazioni

In questo capitolo ripresentiamo le diverse forme in cui è comodo porre le equazioni del moto dei fluidi. Particolare attenzione verrà dedicata al caso di fluido non viscoso e non conduttore del calore (equazioni di Eulero), per il rilievo che avrà nel seguito del volume.

Indice del capitolo

2.1	Le diverse formulazioni per le equazioni del moto	23
2.1.1	Le coordinate lagrangiane	24
2.2	Le equazioni di Eulero	25
2.2.1	L'equazione di continuità	26
2.2.2	XXX L'equazione di bilancio della quantità di moto	26
2.2.3	XXX L'equazione di bilancio dell'energia	27
2.3	Casi semplificati	29
2.3.1	Il caso incomprimibile	29
2.3.2	XXX Il caso comprimibile isoentropico	29
2.3.3	La forma di Crocco dell'equazione per la quantità di moto	30
2.4	Le diverse forme del teorema di Bernoulli	31
2.5	Le equazioni di Navier–Stokes	32
2.5.1	Il caso incomprimibile	32
2.6	La forza di gravità	33
2.7	La forma adimensionale delle equazioni	34

2.1 Le diverse formulazioni per le equazioni del moto

Le equazioni del moto dei fluidi possono essere scritte in diverse formulazioni, più o meno equivalenti e più o meno complesse. Il passaggio dall'una all'altra forma è comunque un'operazione puramente matematica, che non comporta ipotesi

fisiche addizionali. Rispetto alla formulazione integrale, utilizzata come punto di partenza nel Capitolo precedente, l'unica richiesta aggiuntiva è la continuità delle funzioni integrande. Esiste anzitutto la forma *conservativa*, che è quella utilizzata finora, dotata della struttura classica in cui la variazione temporale della quantità conservata viene direttamente legata alla divergenza del suo flusso più un eventuale termine di sorgente. Esiste poi una formulazione, detta *non conservativa* oppure *convettiva*, che può essere più semplice e sintetica in alcuni casi e sfrutta l'operatore di derivata materiale. Infine, introducendo un opportuno sistema di riferimento in moto localmente con la velocità del fluido (le coordinate lagrangiane), si possono scrivere le equazioni anche nella forma *lagrangiana*, che verrà descritta nel prossimo Capitolo (limitatamente alle equazioni di bilancio di massa e quantità di moto) e che si presenta in generale più complessa delle equivalenti forme euleriane, ma consente talora considerazioni più immediate.

Quando infine le relazioni differenziali vengono integrate su un volume \mathcal{V} , si ottiene come noto la formulazione *integrale*, che presenta il fondamentale vantaggio di non richiedere la continuità delle funzioni integrande e che quindi può essere applicata anche in presenza di discontinuità. Vale la pena di notare che studiando la dinamica dei fluidi avremo modo di incontrare casi importanti in cui il campo di moto presenta delle discontinuità.

2.1.1 Le coordinate lagrangiane

Le coordinate lagrangiane sono un sistema di riferimento che segue il moto del fluido, e che risulta quindi legato al sistema di riferimento fisso da una relazione che si complica con il trascorrere del tempo. Talvolta è utile scrivere le equazioni del moto dei fluidi rispetto a questo sistema di riferimento, perché in questo modo permettono considerazioni più immediate.

Per la definizione delle coordinate lagrangiane, introduciamo a fianco della terna fissa $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ una ulteriore terna $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ che si muove localmente con la velocità macroscopica del fluido ed è coincidente, al tempo $t = 0$, con la terna \mathbf{x} . La legge di cambiamento di coordinate è data dalla equazione differenziale:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

con la condizione iniziale che per $t = 0$ sia $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$.

La derivata materiale nel sistema lagrangiano In un cambio di coordinate spazio-temporali definito da due trasformazioni generiche $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t')$ e $t = t(\boldsymbol{\xi}, t')$, le derivate spaziali e temporali si trasformano nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x_j}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.2b)$$

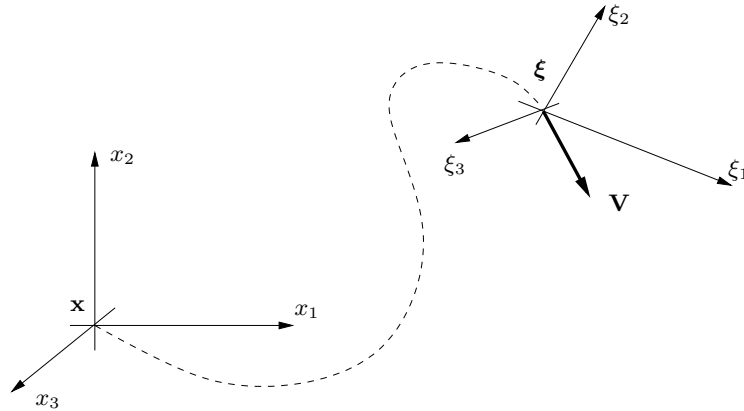


Figura 2.1 La definizione del sistema di coordinate lagrangiane

La trasformazione lagrangiana è definita dalla relazione (2.1), che per componenti si scrive:

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = V_j$$

mentre la coordinata temporale non viene modificata, cioè $t' = t$. La derivata temporale nel sistema ξ diviene quindi

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

e coincide quindi con l'operatore di derivata sostanziale o materiale, definito come

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (2.3)$$

2.2 Le equazioni di Eulero

Le equazioni di bilancio per la massa (1.6), la quantità di moto (1.14) e l'energia (1.16), ricavate nel caso di equilibrio termodinamico locale ed esclusivamente sulla base di considerazioni di simmetria ed invarianza, prendono il nome di equazioni di Eulero, e valgono per ogni tipo di fluido data la generalità delle ipotesi sulle quali sono fondate. Esse costituiscono un sistema di cinque equazioni differenziali in sei incognite, che diventa un sistema chiuso se si conosce anche l'equazione di stato, cioè una relazione funzionale fra le variabili termodinamiche densità, energia interna e pressione.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I}) = \mathbf{F} \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} + p \mathbf{V} \right] = L \quad (2.4c)$$

$$f(\rho, p, e) = 0 \quad (2.4d)$$

2.2.1 L'equazione di continuità

Forma differenziale conservativa La formulazione conservativa dell'equazione di bilancio della massa, come già visto, è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.5a)$$

Forma differenziale convettiva Sviluppando il termine $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$ si giunge alla formulazione non conservativa (detta anche convettiva):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.5b)$$

Essa può ancora essere riscritta utilizzando l'operatore di derivata sostanziale:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.5c)$$

Forma integrale Integrando l'equazione (2.5a) su un volume \mathcal{V} delimitato da un contorno $\partial\mathcal{V}$, e sfruttando il teorema della divergenza, si ottiene la formulazione integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{S} = 0 \quad (2.5d)$$

2.2.2 XXX L'equazione di bilancio della quantità di moto

Forma differenziale conservativa La formulazione conservativa di tale equazione, come già visto, è:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I}) = \mathbf{F} \quad (2.6a)$$

Forma differenziale convettiva Si giunge alla formulazione convettiva trasformando $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V})$ come:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \mathbf{V} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

e sfruttando la relazione (che sconta anche l'equazione di continuità):

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{V} + \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \mathbf{V}$$

Scrivendo infine per semplicità $\nabla \cdot (p \mathbf{I}) = \nabla p$, risulta:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = \mathbf{F} \quad (2.6b)$$

Utilizzando l'operatore di derivata sostanziale, si ha anche:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla p = \mathbf{F} \quad (2.6c)$$

COMMENTO

Forma integrale Integrando l'equazione (2.6a) su un volume \mathcal{V} , delimitato da un contorno $\partial\mathcal{V}$, e sfruttando il teorema della divergenza, si ottiene la forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V} + \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V}\mathbf{V} + p \mathbf{I}) \, d\mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \, d\mathcal{V} \quad (2.6d)$$

2.2.3 XXX L'equazione di bilancio dell'energia

Forma differenziale conservativa La formulazione conservativa dell'equazione di bilancio per l'energia, come già visto, è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} + p \mathbf{V} \right] = L \quad (2.7a)$$

Forma differenziale convettiva Si giunge alla formulazione convettiva riscrivendo l'equazione come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \nabla \cdot (p \mathbf{V}) = L \end{aligned}$$

Il primo ed il terzo addendo sono uguali ed opposti, a seguito dell'equazione di continuità; l'equazione si semplifica quindi come:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \nabla \cdot (p\mathbf{V}) = L$$

Si ottiene una forma ancora più semplice sottraendo alla relazione precedente l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma convettiva (2.6b) moltiplicata scalarmente per \mathbf{V} , cioè:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla p = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}$$

Il risultato è una equazione evolutiva per la sola energia interna e :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla e + \nabla \cdot \mathbf{V} p = L - \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (2.7b)$$

Utilizzando il simbolo di derivata sostanziale, si arriva alla forma più compatta:

$$\rho \frac{De}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} p = L - \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (2.7c)$$

Forma convettiva per l'entropia L'equazione dell'energia può essere ulteriormente semplificata se la scriviamo in termini della variabile termodinamica entropia s invece che per l'energia e . Supponendo nulla per semplicità la forza di volume e quindi il suo lavoro per unità di tempo, la (2.7c) diviene:

$$\rho \frac{De}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} p = 0$$

La divergenza del vettore velocità può essere ricavata dall'equazione di continuità in forma convettiva (2.5c); dividendo inoltre per la densità si ottiene:

$$\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

È noto dalla Termodinamica che

$$Tds = de + pdv$$

in cui v è il volume specifico, ovvero l'inverso della densità, mentre s è l'entropia per unità di massa. Passando dal volume specifico alla densità si ha anche che:

$$Tds = de - p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

L'equazione dell'energia diviene quindi, passando dai differenziali alle derivate sostanziali:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (2.7d)$$

COMMENTO

Forma integrale Integrando l'equazione (2.7a) su un volume \mathcal{V} , delimitato da un contorno $\partial\mathcal{V}$, e sfruttando il teorema della divergenza, si ottiene la forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} + p\mathbf{V} \right] d\mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{V}} L d\mathcal{V} \quad (2.7e)$$

2.3 Casi semplificati

Spesso sono possibili ipotesi semplificative ulteriori rispetto a quella di fluido non viscoso. Nel seguito si descrivono le equazioni nei due casi importanti di fluido incompressibile oppure comprimibile ma in moto isoentropico.

2.3.1 Il caso incompressibile

Se nel moto del fluido si possono trascurare gli effetti della sua comprimibilità, si assume che $d\rho/dp = 0$. L'equazione di stato, che rappresenta un legame fra le variabili termodinamiche di stato, si riduce in questo caso alla semplice asserzione che la densità rimane costante:

$$\rho = \text{cost.}$$

L'equazione dell'energia si disaccoppia dal sistema delle equazioni di Eulero, e le altre equazioni dinamiche costituiscono un sottosistema indipendente, che può essere risolto separatamente. Tenendo quindi conto della condizione di incompressibilità, le equazioni (2.4a) e (2.4b) possono risciversi come:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \end{cases} \quad (2.8)$$

in cui $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\rho$ è una forza per unità di massa.

2.3.2 XXX Il caso comprimibile isoentropico

Se l'entropia è costante, come conseguenza dell'equazione dell'energia nella forma (2.7d), l'equazione di stato nella forma $\rho = \rho(p, s)$ si limita ad affermare che la densità è funzione solo della pressione. Si può allora *definire* un potenziale termodinamico P secondo la relazione:

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p')} dp' \quad (2.9)$$

In questo modo la funzione P coincide con la pressione divisa per la densità nel caso incompressibile, mentre nel caso isoentropico si identifica con l'entalpia.

Grazie alla definizione (2.9) di P , l'equazione per la quantità di moto per un fluido comprimibile in moto isoentropico (e in generale per tutti i casi in cui l'equazione di stato contempra la dipendenza da una sola delle variabili termodinamiche) si può scrivere in maniera identica a quella del sistema (2.8), cioè a quella per fluido incomprimibile, pur di sostituire il termine di pressione $1/\rho \nabla p$ con ∇P . Il sistema delle equazioni diviene allora:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla P = \mathbf{f}. \end{cases} \quad (2.10)$$

COMMENTO

2.3.3 La forma di Crocco dell'equazione per la quantità di moto

Nei due casi particolari di fluido incomprimibile oppure comprimibile ma in moto isoentropico, l'equazione di bilancio per la quantità di moto può essere scritta in una forma particolare che verrà utilizzata nel seguito, e che prende il nome di forma di Crocco.

Ricordando l'identità vettoriale (B.4) per il doppio prodotto vettoriale, e la particolare espressione (B.9) che essa assume quando il secondo operatore è ∇ , si ha che:

$$\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (2.11)$$

L'equazione di bilancio per la quantità di moto del sistema (2.10) può perciò essere posta anche nella forma:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \nabla P = \mathbf{f}$$

Osservando ora che la quantità $(\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}$ rappresenta il gradiente di uno scalare, cioè $\nabla (V^2/2)$, e riunendo tutti i termini sotto l'operatore di gradiente, si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + P \right) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = \mathbf{f}$$

Si introduce ora il vettore vorticità, che è una grandezza derivata definita come rotore del campo di velocità:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto si può scrivere allora, facendo comparire anche la vorticità, nella seguente forma di Crocco:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + P \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{f} \quad (2.12)$$

2.4 Le diverse forme del teorema di Bernoulli

Il fine principale dell'Aerodinamica consiste nel calcolo delle forze e dei momenti che agiscono su un corpo solido in moto relativo rispetto ad una corrente fluida. Già si è visto nel paragrafo §1.6 che tale calcolo si riconduce, nel caso non viscoso, al calcolo dell'integrale degli sforzi normali sul contorno del corpo.

L'equazione di bilancio della quantità di moto, nella forma di Crocco (2.12) in cui supponiamo $\mathbf{f} = 0$, consente sotto opportune ipotesi di mettere in evidenza il legame fra gli sforzi normali (che nel caso non viscoso coincidono con la pressione) e la soluzione del campo cinetico. Questo legame si può considerare un integrale primo del moto.

Il caso stazionario Si faccia l'ipotesi di moto stazionario. Il primo addendo della (2.12) è allora nullo. Moltiplicando scalarmente gli altri due termini per \mathbf{V} , si nota che il prodotto $\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$ è identicamente nullo. L'equazione si riduce quindi alla forma:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{V^2}{2} + P \right) = 0 \quad (2.13)$$

che esprime la costanza del binomio $P + V^2/2$ lungo ogni linea di corrente.

Questa relazione costituisce il classico teorema di Bernoulli, e può essere considerata come un integrale primo delle equazioni del moto. Una volta calcolata la velocità, essa consente immediatamente di risalire alla pressione, e quindi alla forza aerodinamica. Si noti in particolare che, se le linee di corrente provengono dall'infinito a monte, dove la soluzione è nota dalle condizioni all'infinito, allora il binomio $V^2/2 + P$ oltre che costante è da ritenersi noto. Inoltre se le condizioni all'infinito sono di moto uniforme, la costante è la medesima in tutto il campo di moto.

Con identico procedimento, moltiplicando scalarmente la (2.12) per $\boldsymbol{\omega}$ invece che per \mathbf{V} , si ottiene:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \left(\frac{V^2}{2} + P \right) = 0$$

da cui si deduce che il binomio $V^2/2 + P$ è costante anche su linee parallele ad $\boldsymbol{\omega}$, cioè su linee vorticosi.

Il caso stazionario e irrotazionale Se oltre all'ipotesi di stazionarietà si formula anche quella di irrotazionalità ed è $\mathbf{V} = \nabla\varphi$, l'equazione di bilancio della quantità di moto si riduce a

$$\nabla \left(\frac{\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi}{2} + P \right) = 0$$

e quindi il binomio $V^2/2 + P$ è costante *ovunque* nel campo di moto.

Il caso irrotazionale Anche nel caso instazionario, quando il moto è irrotazionale la velocità si può esprimere come gradiente di un potenziale φ . L'equazione (2.12) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \nabla \left(\frac{\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi}{2} + P \right) = 0$$

Invertendo l'ordine di derivazione fra derivate spaziali e temporali, si arriva a scrivere il teorema di Bernoulli nella sua più generale forma instazionaria, nota anche come *equazione della pressione*. In tutto lo spazio risulta:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi}{2} + P = \text{cost} = f(t) \quad (2.14)$$

Questa espressione, in cui f è una grandezza a gradiente nullo e quindi può essere solo una funzione del tempo, costituisce, una volta esplicitata rispetto a P , lo strumento più generale per ricavare (nel caso incomprimibile) la pressione una volta che sia nota la velocità.

2.5 Le equazioni di Navier–Stokes

Le equazioni di bilancio per la massa, quantità di moto ed energia ricavate sotto l'ipotesi di quasi-equilibrio termodinamico prendono il nome di equazioni di Navier–Stokes, e valgono per ogni tipo di fluido data la generalità delle ipotesi sulle quali sono fondate. Esse costituiscono un sistema chiuso di equazioni differenziali, se si conosce anche l'equazione di stato, cioè una relazione funzionale fra le variabili termodinamiche densità, energia interna e pressione.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} + \mathbf{J}_Q^d) = \mathbf{F} \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} + p \mathbf{V} + \mathbf{J}_Q^d \cdot \mathbf{V} + \mathbf{J}_E^d \right] = L \quad (2.15c)$$

in cui i flussi dissipativi \mathbf{J}_Q^d di quantità di moto e \mathbf{J}_E^d di energia sono espressi rispettivamente dalle relazioni (1.18) e (1.20).

2.5.1 Il caso incomprimibile

Nel caso incomprimibile in cui l'equazione di stato si riduce a $\rho = \text{cost}$, le equazioni di Navier–Stokes assumono una forma più semplice. Come nel caso non viscoso, l'equazione dell'energia si disaccoppia dal resto del sistema, mentre l'equazione di continuità si traduce nella condizione cinematica:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Facendo l'ulteriore ipotesi di considerare un fluido a proprietà costanti, l'equazione di bilancio (2.15b) per la quantità di moto diviene:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \left(\mathbf{V} \mathbf{V} + \frac{p}{\rho} \mathbf{I} \right) = \mathbf{F} + \mu \nabla \cdot \left[2 \nabla \mathbf{V}^{(s)} \right]$$

Grazie all'ipotesi di incomprimibilità si ottiene che $\nabla \cdot (\mathbf{V} \mathbf{V})$ è pari a $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$. Inoltre risulta:

$$2 \nabla \cdot \left(\nabla \mathbf{V}^{(s)} \right) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}) = \nabla^2 \mathbf{V}$$

Dividendo per la densità, si giunge così alla formulazione delle equazioni di Navier–Stokes per fluido incomprimibile e a proprietà costanti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{f} \end{cases}$$

2.6 La forza di gravità

Nel caso incomprimibile, in cui si tratta la densità come una costante, spesso la forza \mathbf{F} che compare nel bilancio (2.6a) e (2.15b) della quantità di moto viene omessa. La forza di gravità \mathbf{F}_g è in realtà sempre presente, ma è possibile non scriverla nelle equazioni, grazie al principio di Archimede. Quando il fluido è in quiete, l'equazione per la quantità di moto è semplicemente

$$\nabla p = \mathbf{F}_g = -\rho \mathbf{g}$$

e se la densità è costante l'integrale di questa semplice equazione differenziale, perso un asse z nella direzione opposta a quella individuata dall'accelerazione di gravità, è $p = -\rho g z + p'$, in cui p' sta ad indicare un termine costante. Quando il fluido è in moto, si può usare la *definizione*:

$$p' = p + \rho g z$$

così che $\nabla p' = \nabla p + \rho \mathbf{g}$. Se, dunque, l'equazione viene scritta in modo formalmente identico ma utilizzando la variabile p' invece che la p , il termine di gravità scompare dall'equazione.

Il contributo additivo della forza di gravità (essenzialmente una forza di galleggiamento, per il principio di Archimede) spesso è trascurabile o comunque recuperabile a posteriori. L'unico caso importante in cui la gravità va esplicitamente tenuta in conto è costituito dai fenomeni di convezione, in cui le variazioni di densità dovute alla temperatura giocano un ruolo essenziale.

2.7 La forma adimensionale delle equazioni

Le equazioni di Navier–Stokes possono essere scritte in forma *adimensionale*, allo scopo di diminuire il numero di parametri da cui dipende la soluzione. Indichiamo con un asterisco le variabili dimensionali, e consideriamo l'equazione di bilancio per la quantità di moto, scritta per semplicità nella forma incomprimibile a proprietà costanti e senza il termine di forza per unità di massa:

$$\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{V}^* + \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* = \frac{\mu^*}{\rho^*} \nabla^{*2} \mathbf{V}^*$$

Notiamo anzitutto che il secondo coefficiente di viscosità λ non compare nelle equazioni che regolano il moto di un fluido incomprimibile. Anche nel caso comprimibile però è sufficiente ragionare in termini di un solo coefficiente di viscosità: infatti l'ordine di grandezza dei due coefficienti di viscosità è lo stesso.

Si introducono ora alcune grandezze di riferimento rispetto a cui rendere adimensionali le variabili: una densità ρ_0 , una velocità U_0 ed una lunghezza L_0 . Le variabili dimensionali sono legate a quelle adimensionali dalle seguenti relazioni:

$$\rho^* = \rho_0 \rho; \quad \mathbf{V}^* = U_0 \mathbf{V}; \quad \mathbf{x}^* = L_0 \mathbf{x}$$

Un tempo adimensionale si può inoltre costruire mediante la $t = U_0/L_0 t^*$, mentre la pressione può essere scritta come $p^* = \rho_0 U_0^2 p$.

L'equazione si può così riscrivere introducendo le grandezze di riferimento:

$$\frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{U_0^2}{L_0} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\rho_0 U_0^2}{\rho_0 L_0} \nabla p = \frac{\mu^* U_0}{\rho_0 L_0^2} \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

Dividendo ora entrambi i membri dell'equazione per U_0^2/L_0 , a secondo membro resta in evidenza il gruppo $\mu_0/\rho_0 U_0 L_0$. Definendo numero di Reynolds la quantità adimensionale:

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu^*}$$

l'equazione in forma adimensionale diviene:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V}$$

Ricordiamo ancora una volta che la trascurabilità o meno dei termini viscosi non può essere dedotta dal semplice fatto che il numero adimensionale Re assuma valori elevati. Nell'equazione precedente Re moltiplica le derivate di grado massimo, e la semplice cancellazione dei termini viscosi che contengono le derivate seconde conduce ad un'equazione differenziale di natura diversa da quella viscosa.