

Le leggi del moto dei fluidi

Le equazioni che descrivono il moto dei fluidi vengono ricavate prendendo le mosse da considerazioni di equilibrio meccanico a livello microscopico. Si giunge così alle equazioni di Eulero e di Navier–Stokes unicamente sulla base di proprietà di simmetria ed invarianza rispetto al sistema di riferimento, rendendo evidente la generalità delle equazioni ottenute, che si applicano a semplici gas ma anche a liquidi dalla complessa struttura molecolare.

Indice del capitolo

1.1	I fluidi: descrizione macroscopica e microscopica	1
1.2	Le equazioni di bilancio	3
1.2.1	I flussi	4
1.3	Fluido in equilibrio termodinamico locale	7
1.3.1	Il flusso di massa	9
1.3.2	Il flusso di quantità di moto	11
1.3.3	Il flusso di energia	13
1.4	Fluido in quasi-equilibrio termodinamico	14
1.4.1	Il flusso di quantità di moto	15
1.4.2	Il flusso di energia (cenni)	18
1.5	Le condizioni al contorno	19
1.6	Pressione e sforzi	20
1.7	L'equazione di bilancio dell'entropia (cenni)	22
1.8	L'equazione di bilancio del momento angolare (cenni)	22

1.1 I fluidi: descrizione macroscopica e microscopica

La descrizione di un fluido (in quiete o in moto) da un punto di vista *macroscopico* consiste nella rappresentazione delle proprietà del fluido attraverso funzioni

del punto nello spazio oltre che del tempo. Un fluido, come anche un solido, rappresentato in questo modo è un *continuo*, e le leggi del moto che lo governano, formulate attraverso opportune equazioni differenziali a derivate parziali, costituiscono la *meccanica dei continui*.

La descrizione microscopica Ai fondamenti della descrizione macroscopica c'è, però, la descrizione di un fluido in base alle proprietà meccaniche delle singole molecole che lo compongono: si parla in questo caso di descrizione *microscopica*. La descrizione microscopica è in un certo senso ridondante per la risoluzione di problemi pratici, dato che l'informazione dettagliata sulla posizione e velocità di ogni singola molecola che essa presuppone è allo stesso tempo enormemente complessa da ottenere ed impossibile da specificare come condizione iniziale: se veramente il comportamento dell'aria intorno ad un aereo, o la stabilità di un edificio, dipendessero dalla posizione iniziale di ogni singola molecola il mondo come lo conosciamo non esisterebbe. Ciò vuol dire che dal moto di un gran numero di molecole devono emergere dei comportamenti collettivi che prescindono dalla esatta posizione e velocità di ciascuna molecola, e sono appunto tali comportamenti collettivi che la descrizione macroscopica ha il compito di estrarre. Nondimeno le leggi della meccanica a livello microscopico sono più semplici e quindi più fondamentali, ed è partendo da tali leggi che è possibile formulare correttamente la meccanica dei continui e soprattutto comprenderne i limiti di validità.

I due livelli, macroscopico e microscopico, sono uniti da un legame di tipo *statistico*, o probabilistico, in base al quale si giunge a definire le proprietà macroscopiche attraverso distribuzioni di probabilità delle proprietà meccaniche microscopiche.

All'interno di un sistema costituito da N molecole, una particolare molecola, indicata con il suffisso i , si caratterizza anzitutto mediante la sua massa m_i , ed inoltre con la sua energia potenziale e_i^{pot} , la quale sintetizza, nei limiti della meccanica classica¹, tutte le azioni intermolecolari. La proprietà che a livello molecolare contraddistingue un fluido da un solido è che, mentre le molecole di un solido compiono solo piccole oscillazioni intorno a posizioni fisse, le molecole di un fluido possono cambiare liberamente la propria posizione: le equazioni che secondo la meccanica classica governano il moto delle molecole sono le equazioni di Newton, che descrivono la molecola i -esima mediante la sua posizione \mathbf{x}_i e velocità \mathbf{v}_i (oltre che, in generale, mediante un certo numero di gradi di libertà interni che qui non avremo bisogno di prendere in considerazione).

¹ cioè non quantistica e non relativistica. La considerazione degli effetti quantistici non comporta modifiche in quanto diremo se non a bassissime temperature per i cosiddetti *superfluidi*. Effetti relativistici si possono manifestare ad altissime temperature nella materia stellare considerata come un fluido.

1.2 Le equazioni di bilancio

Per un sistema meccanico isolato qualsiasi, insieme di punti materiali, sono valide le leggi di conservazione delle grandezze meccaniche massa, quantità di moto ed energia. Vi sono dunque cinque integrali primi del moto se si tiene conto del carattere vettoriale della quantità di moto:

$$\sum_{i=1}^N m_i = \mathcal{M}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathcal{Q}$$

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{v_i^2}{2} + e_i^{pot} \right) = \mathcal{E}$$

Ciò comporta che in un sistema non isolato, ma composto da un gran numero di particelle, queste grandezze anche se non più costanti varieranno lentamente, e tanto più lentamente quanto più grande è il numero delle particelle. Questa osservazione è la base per l'identificazione dei parametri macroscopici che caratterizzano il movimento collettivo di un fluido proprio nelle grandezze meccaniche che, se il sistema fosse isolato, sarebbero conservate.

Volume di controllo e medie statistiche Per rendere quantitativa l'analisi occorre identificare in qualche modo parti diverse del fluido. Mentre in un solido questa identificazione è relativamente naturale perché ciascuna parte di un solido è fatta sempre delle stesse molecole, in un fluido le molecole si scambiano continuamente, e l'unica possibilità è quella di identificare a priori un volume (volume di controllo) geometricamente definito, e far riferimento alla massa, energia e quantità di moto delle molecole che, in un dato istante, si trovano nel volume dato; ciò indipendentemente dall'identità delle singole molecole e dal fatto che in istanti diversi si troveranno in volumi diversi.

Occorre inoltre ragionare su quantità medie in senso statistico, in modo da svincolarsi dalla informazione, ridondante ed inaccessibile allo stesso tempo, relativa all'effettiva posizione e velocità di ciascuna molecola. Bisogna quindi immaginare di effettuare un gran numero di esperimenti identici nei vincoli esterni, ma non nella posizione iniziale di ciascuna molecola, e poi di mediare la massa, energia e quantità di moto totali contenute nel volume di controllo ad un dato istante rispetto a tutti questi esperimenti (media di insieme). Le grandezze medie così ottenute hanno l'importante caratteristica di essere additive rispetto al volume: la massa totale media contenuta nell'unione di due volumi è semplicemente la somma delle masse contenute in ciascuno, e lo stesso vale per energia e quantità di moto. Ne consegue che queste grandezze possono essere rappresentate come

integrali, attribuendo ad un volume infinitesimo $d\mathcal{V}$ la massa $d\mathcal{M} = \rho d\mathcal{V}$, l'energia $d\mathcal{E} = E d\mathcal{V}$ e la quantità di moto $d\mathcal{Q} = \mathbf{Q} d\mathcal{V}$, e a qualsiasi volume finito gli integrali di questi infinitesimi sul volume dato.

Le grandezze specifiche per unità di volume densità di massa ρ (detta spesso semplicemente densità), densità di energia E e densità di quantità di moto \mathbf{Q} , considerate come funzioni delle coordinate spaziali e del tempo, insieme costituiscono la descrizione macroscopica continua di un fluido. Sarà nostro obiettivo nel resto di questo capitolo riformulare le leggi della meccanica, che sappiamo già scrivere per un insieme di punti materiali, in termini di queste grandezze.

1.2.1 I flussi

Le grandezze massa, quantità di moto ed energia (a cui a rigore occorrerebbe aggiungere il momento angolare, che però come vedremo in seguito non fornisce informazioni aggiuntive con riguardo ad un volume infinitesimo) costituiscono gli *invarianti meccanici additivi* in quanto grandezze, additive rispetto al volume, che se il volume dato fosse isolato resterebbero costanti. Ciò vuol dire che nel momento in cui la massa, energia o quantità di moto totali contenute in un volume di controllo variano, questa variazione deve essere attribuita ad una interazione con l'esterno, che può avvenire localmente attraverso la superficie del volume dato o per intervento di campi di forza (come la gravità o il campo elettrico) che agiscono a distanza. È possibile rendere tale concetto quantitativo scrivendo delle *equazioni di bilancio*, che collegano le variazioni temporali degli invarianti meccanici additivi contenuti all'interno di un volume \mathcal{V} arbitrario al loro flusso attraverso la superficie $\partial\mathcal{V}$ che delimita il volume stesso, oltre che ad eventuali campi di forza.

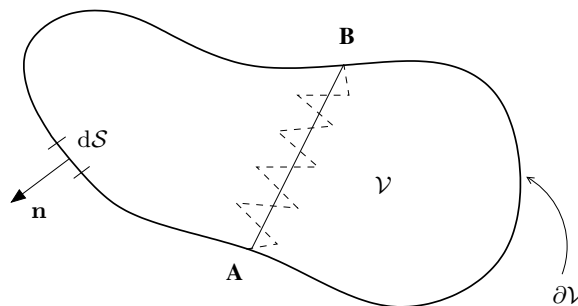


Figura 1.1 Il flusso degli invarianti meccanici additivi fra le due parti del volume \mathcal{V} non deve dipendere dal dettaglio del tratto AB di contorno.

Ora, come mostrato in figura 1.1, si immagini un volume, isolato nel suo complesso e non soggetto a campi di forza, diviso in due parti da una superficie di separazione. Dato che ciascuna delle due parti presa separatamente non è isolata (perché in contatto con l'altra) la sua massa, energia e quantità di moto sono libere di variare, ma perché le grandezze totali siano costanti l'aumento da una parte deve essere compensato da una uguale diminuzione dall'altra. Si configura dunque un *flusso*, associabile alla superficie di separazione, con la proprietà fondamentale, che ne giustifica il nome, che il flusso da una parte all'altra è uguale ed opposto a quello dalla seconda alla prima.

Perché la proprietà fondamentale si conservi indipendentemente dalla scelta della superficie di separazione, il flusso totale di una grandezza additiva deve essere anch'esso additivo, e quindi scrivibile come integrale di superficie di una opportuna *densità di flusso*. (Nel seguito useremo semplicemente la parola flusso per indicare la densità di flusso, chiamando flusso totale il suo integrale. Questa convenzione deve essere tenuta presente nell'eventuale confronto con altri testi.) Il carattere scalare o vettoriale del flusso può esser fatto discendere direttamente dalla necessaria indipendenza dalla orientazione locale della particolare superficie di contorno. Infatti, con riferimento alla figura 1.1, si può immaginare di sostituire il tratto **AB** liscio con quello zigrinato. È evidente che una sostituzione di questo tipo può modificare considerevolmente l'orientazione locale e l'area (o in due dimensioni la lunghezza) del tratto di contorno considerato con una alterazione piccola a piacere della forma e dell'estensione del volume \mathcal{V} .

Flusso di una grandezza scalare Perché il bilancio che stiamo per scrivere non sia influenzato da una sostituzione di questo tipo, il flusso totale di una generica grandezza scalare f attraverso una porzione di contorno come **AB** non deve dipendere dall'effettiva area della superficie ma solo da quella delle sue proiezioni sui piani coordinati. In generale, si può quindi scrivere il flusso totale come

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} (J_{f1} dx_2 dx_3 + J_{f2} dx_1 dx_3 + J_{f3} dx_1 dx_2)$$

Si ricorderà però dai corsi di analisi che i tre elementi di superficie $dx_2 dx_3$, $dx_1 dx_3$ e $dx_1 dx_2$ costituiscono le componenti di un vettore, che ha per modulo l'area della superficie infinitesima dS e per direzione quella della normale \mathbf{n} alla superficie stessa. Ne consegue, per le proprietà del prodotto scalare (vedi Appendice B), che anche (J_{f1}, J_{f2}, J_{f3}) si trasformano da un sistema di riferimento a un altro come le componenti di un vettore o, in breve, che il flusso di una grandezza scalare f è un vettore, che indicheremo come \mathbf{J}_f . Possiamo quindi scrivere il flusso totale come

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} dS$$

cioè come l'integrale del prodotto scalare del vettore flusso \mathbf{J}_f per il vettore $\mathbf{n} dS$ (che ha per componenti le proiezioni della superficie dS sui piani coordinati).

Possiamo in definitiva scrivere l'equazione di bilancio

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} f \, d\mathcal{V} = - \oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S} \quad (1.1)$$

in cui il segno meno viene dalla convenzione, che seguiremo sempre in questo testo, di indicare con \mathbf{n} il versore normale *uscende* dal volume occupato dal fluido (che vuol dire entrante nella parete nel caso di una parete solida). La relazione (1.1) traduce il concetto che l'aumento nell'unità di tempo della grandezza f totale contenuta nel volume di controllo \mathcal{V} deve uguagliare il flusso totale entrante nel volume stesso, uguale ed opposto al flusso totale uscente.

Flusso di una grandezza vettoriale Per trovare il flusso di una grandezza vettoriale come la quantità di moto basta ricordare (Appendice B) che, così come la trasformazione lineare del vettore $\mathbf{n}d\mathcal{S}$ in uno scalare si esprime tramite il prodotto scalare per un vettore, la trasformazione lineare di $\mathbf{n}d\mathcal{S}$ in un vettore si esprime tramite il prodotto scalare per un tensore doppio. Chiamando tale tensore \mathbf{J}_f , l'equazione di bilancio per la grandezza vettoriale \mathbf{f} prende la forma, del tutto analoga alla (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \, d\mathcal{V} = - \oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S} \quad (1.2)$$

Nota: nell'ambito della meccanica dei solidi si giunge tradizionalmente a quest'ultimo risultato, per il solo flusso di quantità di moto che in quel contesto prende il nome di tensore degli sforzi, con l'analisi del cosiddetto tetraedro di Cauchy. Si tratta in effetti di un altro modo di mostrare che il flusso totale deve dipendere dalla superficie $d\mathcal{S}$ solo attraverso le sue proiezioni sui piani coordinati, cioè le componenti del vettore $\mathbf{n} \, d\mathcal{S}$. Come si vede ora tale proprietà è del tutto generale e si applica al flusso di qualsiasi grandezza conservata, inclusi quello di massa ed energia e, in elettromagnetismo, di carica elettrica.

Le equazioni di bilancio in forma differenziale Sotto l'ipotesi che la grandezza fisica f sia rappresentabile con una funzione continua (insieme alle sue derivate) dello spazio e del tempo, l'equazione di bilancio per f può scriversi anche in una forma differenziale, oltre che integrale. Grazie al teorema della divergenza, infatti, l'equazione di bilancio (1.1) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} f \, d\mathcal{V} = - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J}_f \, d\mathcal{V}$$

Perché questa uguaglianza valga per ogni volume di integrazione \mathcal{V} , gli integrali devono essere uguali in ogni punto in un intorno del quale sono uniformemente continui. Quindi deve essere verificata l'equazione in forma differenziale:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$$

Analogamente, l'equazione di bilancio (1.2) per la grandezza fisica vettoriale \mathbf{f} continua richiede che sia verificata l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$$

Le equazioni di bilancio per un fluido Particolarizzando l'equazione di bilancio alla densità di massa, di quantità di moto e di energia di un fluido, si possono scrivere le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\rho = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_Q = \mathbf{F} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_E = L \quad (1.5)$$

Nel bilancio di quantità di moto (1.4) si è anche introdotto il vettore \mathbf{F}_γ , con le dimensioni di una forza per unità di volume, che rappresenta l'aumento di quantità di moto prodotto da eventuali campi di forza presenti. Tipicamente, nel caso della forza di gravità, questo vettore è uguale a $\rho \mathbf{g}$, con \mathbf{g} accelerazione di gravità. Il corrispondente lavoro per unità di volume L compare nel bilancio di energia (1.5). Nel caso della gravità, quest'ultimo è dato da $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{g}$.

Le (1.3), (1.4) e (1.5) costituiscono un sistema di cinque equazioni in un numero molto maggiore di incognite, in quanto i flussi che vi compaiono sono ancora indeterminati. Per essere in grado di ottenere il moto di un fluido come soluzione di queste equazioni abbiamo bisogno di legare, sotto opportune ipotesi, i flussi di massa, quantità di moto ed energia alle rispettive densità.

1.3 Fluido in equilibrio termodinamico locale

Fluido in quiete Un fluido di composizione molecolare definita che sia rimasto isolato ed in stato di *quiete* da un tempo abbastanza lungo per trovarsi in equilibrio termodinamico può essere compiutamente descritto dal punto di vista macroscopico mediante due sole variabili (dette variabili di stato termodinamico). Infatti in questa condizione la massa e l'energia totali sono costanti nel tempo e la quantità di moto è nulla; il sistema delle equazioni di conservazione si riduce quindi a due sole relazioni scalari significative. La distribuzione di probabilità delle proprietà microscopiche dipende solo da queste due grandezze, e così pure tutte le altre grandezze termodinamiche che tramite la distribuzione di probabilità si possono definire (entropia, pressione, temperatura, entalpia, etc). Con opportune trasformazioni si possono esprimere le relazioni termodinamiche in termini di un'altra coppia di variabili di stato (ad esempio pressione e temperatura), ma le variabili indipendenti sono comunque due.

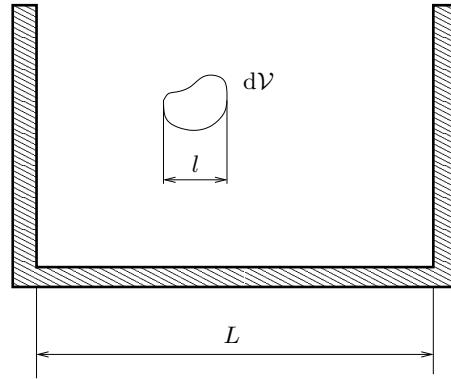


Figura 1.2 L'ipotesi del continuo è applicabile se le due scale l (caratteristica del moto molecolare) e L (caratteristica del moto del fluido) sono nettamente separate fra di loro.

Fluido in moto Quando il fluido non è in quiete, e non si trova quindi in equilibrio termodinamico, si può formulare l'ipotesi che esista almeno un equilibrio termodinamico *locale*. Si immagina cioè (si veda la figura 1.2) di poter suddividere l'intero campo di moto in regioni, di volume dV , caratterizzate da una scala spaziale l sufficientemente piccola per permettere di affermare che la distribuzione di probabilità microscopica, pur variando da un volume all'altro, sia prossima all'equilibrio termodinamico all'interno di ciascuno preso singolarmente. Perché ciò sia lecito occorre che le proprietà macroscopiche del fluido da cui la distribuzione di probabilità dipende (densità di massa, quantità di moto ed energia) varino poco su di una scala di lunghezza l caratteristica per il ristabilimento dell'equilibrio molecolare. Occorre altresì che i tempi caratteristici dell'evoluzione del fluido siano lunghi rispetto a quelli necessari perché la distribuzione statistica di probabilità si riporti all'equilibrio. Quando ciò accade, lo stato del gas è descritto compiutamente dalle quantità ρ , E e \mathbf{Q} (ora non più necessariamente nulla) assegnate come funzioni del punto e del tempo.

L'ipotesi del continuo Il concetto di equilibrio locale comporta quindi l'introduzione di una scala di lunghezza l caratteristica delle interazioni molecolari. Questa schematizzazione (che prende il nome di *ipotesi del continuo*) è applicabile solo quando l è molto inferiore alla scala caratteristica L del moto del fluido. La scala di lunghezza l , indicata come *cammino libero medio*, dipende anch'essa dalle condizioni del fluido e può talvolta assumere valori tanto elevati da diventare confrontabile con L e far perdere quindi validità all'ipotesi del continuo. Ad esempio, ciò si verifica nell'alta atmosfera, dove l'abbassamento della densità rende l via via più grande, o nei micromeccanismi, dove è piccola L . Il rapporto

adimensionale l/L prende il nome di *numero di Knudsen*, e l'ipotesi del continuo si ritiene di solito applicabile quando questo numero è minore di 0.01. Il cammino libero medio l dell'aria (come per tutti i gas) varia in maniera inversamente proporzionale alla densità, e in condizioni ambiente è dell'ordine di 10^{-7} m.

Al di fuori dell'ipotesi del continuo le equazioni che ricaveremo (equazioni di Eulero e di Navier–Stokes) non sono più adatte a descrivere correttamente il moto di un fluido.

In condizioni di equilibrio termodinamico locale tutte le grandezze macroscopiche, e quindi anche i flussi \mathbf{J}_ρ , \mathbf{J}_Q e \mathbf{J}_E , devono dipendere unicamente dai valori puntuali delle grandezze meccaniche conservate ρ , \mathbf{Q} e E . In formule:

$$\mathbf{J}_\rho = \mathbf{J}_\rho(\rho, \mathbf{Q}, E); \quad \mathbf{J}_Q = \mathbf{J}_Q(\rho, \mathbf{Q}, E); \quad \mathbf{J}_E = \mathbf{J}_E(\rho, \mathbf{Q}, E).$$

La forma funzionale di queste dipendenze non può però essere del tutto arbitraria, ma deve rispettare la necessaria invarianza della descrizione matematica di un qualunque sistema fisico rispetto alla scelta del sistema di riferimento.

1.3.1 Il flusso di massa

Come diretta conseguenza della sua definizione microscopica (che qui non abbiamo dato, ma che si riduce a $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$), il flusso di massa che compare nella (1.3) è uguale alla densità di quantità di moto \mathbf{Q} :

$$\mathbf{J}_\rho = \mathbf{Q}$$

D'altra parte è spesso comodo, per la quantità di moto come per le altre proprietà termodinamiche, fare riferimento a grandezze specifiche per unità di massa, che si ottengono semplicemente dividendo per la densità la corrispondente grandezza specifica per unità di volume. La quantità di moto per unità di massa ha le dimensioni di una velocità, ed è quella che si definisce *velocità di massa* \mathbf{V} . Questa ha anche il significato di media della velocità delle singole molecole pesata secondo la loro massa:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{Q}}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Questa definizione consente di scrivere il flusso di massa in funzione della velocità di massa, come $\mathbf{J}_\rho = \rho \mathbf{V}$. L'equazione di bilancio della massa in forma differenziale diviene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.6)$$

Invarianza rispetto a trasformazioni galileane È facile verificare che questa equazione mantiene sempre la stessa forma al variare del sistema di riferimento. Introduciamo un nuovo sistema di assi \mathbf{x}' , definito da una terna di riferimento *inerziale* in moto alla velocità costante \mathbf{V}_0 rispetto alla terna fissa \mathbf{x} . La legge di trasformazione delle coordinate è la seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}_0 t' \\ t = t' \end{cases} \quad (1.7)$$

La legge di trasformazione delle derivate è:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \quad (1.8b)$$

Nella seconda relazione inoltre si può tener conto del risultato della prima, ovvero del fatto che l'operatore gradiente si esprime allo stesso modo nei due sistemi di riferimento, cioè $\nabla = \nabla'$. La derivata temporale $\partial \rho' / \partial t'$ si scrive dunque:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho'$$

La densità è uno scalare che non cambia con il sistema di riferimento, cioè:

$$\rho' = \rho \quad (1.9)$$

L'espressione per $\partial \rho' / \partial t' = \partial \rho / \partial t$ può essere sostituita nell'equazione di conservazione della massa (1.6):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} - \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' = -\nabla \cdot \mathbf{Q}$$

Le velocità delle molecole nei due sistemi di riferimento, come quelle di qualunque sistema meccanico, sono legate dalla relazione

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_0 \quad (1.10)$$

e perciò la legge con cui la densità di quantità di moto \mathbf{Q} varia al variare del sistema di riferimento si ricava immediatamente, a partire dalla sua definizione microscopica, come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i &= \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m'_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_0) = \\ &= \mathbf{Q}' + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m'_i \mathbf{V}_0 = \mathbf{Q}' + \rho' \mathbf{V}_0 \quad (1.11) \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\nabla' \cdot (\mathbf{Q}' + \rho' \mathbf{V}_0) + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho'$$

e grazie al fatto che \mathbf{V}_0 è costante:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\nabla' \cdot \mathbf{Q}' - \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho'$$

da cui, semplificando i due addendi opposti, si ricava infine che:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\nabla' \cdot \mathbf{Q}'$$

Nel sistema \mathbf{x}' dunque l'equazione di bilancio della massa si scrive ancora nella forma (1.6), che è quindi invariante rispetto ad una trasformazione inerziale del sistema di riferimento. In effetti, si potrebbe anche vedere che $\mathbf{J}_\rho = \mathbf{Q}$ è l'unica forma funzionale possibile del flusso di massa che presenta tale proprietà.

1.3.2 Il flusso di quantità di moto

Anche l'invarianza dell'equazione di bilancio per la quantità di moto rispetto al cambiamento di riferimento pone precisi vincoli sulla forma funzionale del tensore $\mathbf{J}_\mathbf{Q}$.

L'equazione di bilancio (1.4) per \mathbf{Q} deve anzitutto essere scritta nel nuovo sistema di coordinate \mathbf{x}' . Tenendo conto delle leggi di cambiamento (1.9) di ρ e (1.11) di \mathbf{Q} , e delle leggi (1.8a) e (1.8b) per la trasformazione delle derivate, l'equazione di bilancio (1.4) assume la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t'} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla') \mathbf{Q}' + \frac{\partial (\rho' \mathbf{V}_0)}{\partial t'} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla') \rho' \mathbf{V}_0 + \nabla' \cdot \mathbf{J}_\mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

Tenendo ora del fatto che \mathbf{V}_0 è costante nell'esplicitare la derivata temporale del prodotto $\rho' \mathbf{V}$, si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t'} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla') \mathbf{Q}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \mathbf{V}_0 - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla') \rho' \mathbf{V}_0 + \nabla' \cdot \mathbf{J}_\mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

La derivata temporale della densità può essere eliminata grazie alla (1.6) scritta nel sistema \mathbf{x}' . Inoltre, per l'identità vettoriale (B.8) e grazie al fatto che \mathbf{V}_0 è costante si ha che, ad esempio:

$$(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla') \mathbf{Q}' = \nabla' \cdot (\mathbf{V}_0 \mathbf{Q}')$$

L'equazione può dunque essere riscritta in una forma analoga a quella di partenza, con una derivata temporale e la divergenza di un tensore doppio:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\mathbf{J}_\mathbf{Q} - \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}' \mathbf{V}_0 - \rho' \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0) = \mathbf{F}$$

La necessità dell'invarianza rispetto al riferimento inerziale prescelto richiede quindi che sia:

$$\mathbf{J}'_{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{Q}} - \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}' \mathbf{V}_0 - \rho' \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0 \quad (1.12)$$

Questa relazione costituisce un preciso vincolo a cui la dipendenza funzionale $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{Q}}(\rho, \mathbf{Q}, E)$ deve soddisfare al variare del sistema di riferimento.

Il vincolo (1.12) deve valere per qualsiasi cambiamento di sistema di riferimento inerziale, e quindi per qualsiasi velocità \mathbf{V}_0 costante. Senza perdere di generalità, ci si può allora porre in quel particolare sistema di riferimento in cui in un dato punto dello spazio $\mathbf{Q}' = 0$, ovvero nel sistema determinato scegliendo, per il punto in esame, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$. La relazione (1.12) assume così la più semplice espressione:

$$\mathbf{J}'_{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{Q}} - \rho \mathbf{V} \mathbf{V}$$

in cui il tensore $\mathbf{J}'_{\mathbf{Q}}$ deve coincidere con la funzione generica $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}(\rho', \mathbf{Q}', E')$ valutata per $\mathbf{Q}' = 0$, ed è quindi effettivamente funzione solo di ρ' ed E' , ovvero due grandezze scalari.

Il procedimento seguito può sollevare qualche perplessità perché si è uguagliata la velocità costante \mathbf{V}_0 alla velocità \mathbf{V} che invece varia nello spazio. Ma è corretto nell'ipotesi di equilibrio locale, che comporta che $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}$ sia una funzione puntuale delle proprietà del fluido anziché dipendere dall'intera distribuzione spaziale come più in generale si dovrebbe assumere. Se $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}$ dipende solo dal valore puntuale di \mathbf{Q} , deve sottostare ai vincoli che si ottengono dalla considerazione di un sistema di riferimento in cui $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$ indipendentemente dal fatto che in punti adiacenti \mathbf{V} e \mathbf{Q} possano variare.

La pressione La funzione tensoriale $\mathbf{J}'_{\mathbf{Q}}(\rho', E')$ inoltre deve restare uguale a se stessa anche dopo una arbitraria rotazione del sistema di riferimento, in quanto i fluidi, a differenza dei solidi, non ammettono alcuna direzione privilegiata. Esiste un unico tensore doppio (a meno della moltiplicazione per un coefficiente scalare) le cui componenti sono invarianti per rotazione del sistema di riferimento: il tensore unità (vedi Appendice B). Ne segue che il tensore $\mathbf{J}'_{\mathbf{Q}}(\rho', E')$ deve necessariamente essere espresso dal prodotto di una funzione scalare delle variabili ρ' ed E' per il tensore unitario \mathbf{I} . Indichiamo con p tale funzione, e la *definiamo* pressione:

$$\mathbf{J}'_{\mathbf{Q}} = p(\rho', E') \mathbf{I} \quad (1.13)$$

Nel caso particolare di fluido in quiete (all'equilibrio termodinamico), la funzione p così definita coincide con la pressione termodinamica e come tale può essere misurata. Nel caso di equilibrio solamente locale, invece, la pressione è per definizione la medesima funzione di ρ' ed E' che si avrebbe all'equilibrio termodinamico. Si può notare che in quiete l'intero tensore flusso di quantità di moto, che come si vedrà coincide con il tensore degli sforzi esercitati su di una parete solida, si riduce al solo termine $p \mathbf{I}$. La pressione coincide quindi con la componente diagonale del tensore degli sforzi, cioè con la forza statica per unità di superficie esercitata in direzione normale ad una parete. In un fluido in movimento, invece,

la forza esercitata su una parete contiene in generale altri contributi oltre a quello della pressione, che dipendono anche dalla velocità.

Tenendo conto esplicitamente dell'espressione trovata per il flusso, l'equazione di bilancio per la quantità di moto in forma differenziale (1.4) diviene:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{1}) = \mathbf{F} \quad (1.14)$$

1.3.3 Il flusso di energia

Anche per ciò che riguarda l'equazione dell'energia, la necessaria invarianza dell'equazione (1.5) rispetto ad un cambiamento di riferimento inerziale e la mancanza di direzioni privilegiate nel fluido permettono di stabilire l'espressione funzionale del flusso di energia \mathbf{J}_E .

La definizione microscopica di energia permette di scrivere il legame fra le energie di un qualunque sistema meccanico in due diversi sistemi di riferimento inerziali come:

$$E = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{v_i^2}{2} + e_i^{pot} \right) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{v_i'^2}{2} + m_i \frac{V_0^2}{2} + m_i \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{V}_0 + e_i^{pot} \right)$$

dove si è tenuto conto del fatto che l'energia potenziale non dipende dal sistema di riferimento. Mettendo in evidenza \mathbf{V}_0 , che è costante, e riconoscendo nelle sommatorie a secondo membro le grandezze specifiche nel sistema \mathbf{x}' , si ottiene:

$$E = E' + \rho' \frac{V_0^2}{2} + \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{V}_0$$

che rappresenta in tutta generalità la legge di cambiamento di riferimento per l'energia. Effettuando questa sostituzione e trasformando le derivate secondo le (1.8a) e (1.8b), l'equazione dell'energia (1.5) si riscrive, ricordando che \mathbf{V}_0 è costante, come:

$$\frac{\partial E'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \frac{V_0^2}{2} + \frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t'} \cdot \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \left[E' + \rho' \frac{V_0^2}{2} + \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{V}_0 \right] + \nabla' \cdot \mathbf{J}_E = L$$

Le due derivate temporali di ρ' e \mathbf{Q}' a primo membro possono essere eliminate grazie alle rispettive equazioni di bilancio scritte nel sistema \mathbf{x}' . Inoltre, sfruttando l'identità (B.7) ed il fatto che \mathbf{V}_0 è costante, si ha ad esempio che:

$$\nabla \cdot (E' \mathbf{V}_0) = \mathbf{V}_0 \cdot \nabla E'$$

L'equazione si scrive dunque nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \left[\mathbf{J}_E - \mathbf{J}'_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{V}_0 - \frac{V_0^2}{2} \mathbf{Q}' \right. \\ \left. - E' \mathbf{V}_0 - (\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{V}_0) \mathbf{V}_0 - \rho' \frac{V_0^2}{2} \mathbf{V}_0 \right] = L_V - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

dove nell'espressione a secondo membro si può riconoscere il lavoro per unità di volume e di tempo L' effettuato dalla forza \mathbf{F} nel nuovo riferimento. Perché l'equazione dell'energia sia invariante rispetto ad un cambio del sistema di riferimento, la quantità fra parentesi deve allora essere uguale al vettore flusso di energia \mathbf{J}'_E nel sistema \mathbf{x}' , e si è così ricavata una regola cui l'espressione di tale vettore deve obbedire al variare del sistema di riferimento. Per determinare la forma funzionale di \mathbf{J}_E , si può ora specializzare il discorso a quel particolare riferimento per cui in un punto dato sia $\mathbf{Q}' = 0$, cioè $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$. Si ha così

$$\mathbf{J}_E = \mathbf{J}'_E(\rho', E') + \mathbf{J}'_Q \cdot \mathbf{V} + E' \mathbf{V} + \rho' \frac{V^2}{2} \mathbf{V} \quad (1.15)$$

Analogamente a quanto fatto per la densità di quantità di moto, è uso introdurre una densità di energia per unità di massa e , definita come

$$e = E'/\rho$$

Questa in effetti nel caso di quiete coincide con la definizione di energia interna comunemente adottata in termodinamica. Inoltre, come abbiamo ottenuto dall'invarianza rispetto a rotazioni del sistema di riferimento, il tensore \mathbf{J}'_Q è semplicemente uguale a $p(\rho, e) \mathbf{I}$, ed il vettore \mathbf{J}'_E deve necessariamente essere nullo perché non esistono vettori invarianti rispetto alla rotazione del sistema di riferimento. (Queste ultime due deduzioni saranno modificate nel caso di quasi-equilibrio preso in esame nel prossimo paragrafo.)

La relazione precedente si riscrive come:

$$\mathbf{J}_E = p(\rho, e) \mathbf{I} \cdot \mathbf{V} + \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V}$$

e, in conclusione, l'equazione dell'energia in forma differenziale diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} + p \mathbf{V} \right] = L \quad (1.16)$$

1.4 Fluido in quasi-equilibrio termodinamico

L'ipotesi di equilibrio locale spesso non è sufficiente. Si è visto come la sua validità si deve valutare in relazione al valore del rapporto l/L fra il libero cammino medio delle molecole ed una scala globale di lunghezza, e ad un analogo rapporto fra tempi caratteristici.

Quanto ricavato sinora tenendo conto delle proprietà *puntuali* del fluido può essere interpretato come il termine zero dello sviluppo in serie di Taylor delle equazioni statistiche valide a livello microscopico rispetto a l/L . Un miglior grado di approssimazione, che consideri anche un piccolo scostamento delle distribuzioni di probabilità dall'equilibrio, si ottiene considerando che i flussi possano

avere una dipendenza non solo puntuale dalle variabili di stato, ma anche estesa ad una regione di dimensione tipica l . In altre parole, si può cercare di tenere in conto anche il primo termine dello sviluppo in serie di potenze di l/L . Ciò comporta una dipendenza funzionale dei flussi anche dalle derivate (gradienti) delle variabili di stato. Questa dipendenza, in quanto primo termine di una serie di Taylor, non può che essere lineare.

Una schematizzazione di questo tipo, a cui daremo il nome di ipotesi del *quasi-equilibrio termodinamico*, è molto generale, ma anch'essa cade in difetto se le variazioni delle variabili di stato su distanze dell'ordine del cammino libero medio l non sono piccole, perché quando ciò accade la dipendenza dei flussi dalle variabili di stato diventa non lineare e coinvolge non solo i gradienti ma anche derivate di ordine più alto, e rapidamente la descrizione macroscopica diventa del tutto impossibile come accade nei gas rarefatti. Modelli in cui si mantiene la descrizione continua ma con una dipendenza dei flussi più complessa che una dipendenza lineare dai soli gradienti trovano applicazione nell'analisi di liquidi contenenti macromolecole o particelle solide in sospensione. Si parla in questo caso di fluidi *non-newtoniani*, per distinguerli da quelli newtoniani in cui vale la dipendenza lineare dei flussi dai gradienti postulata per la prima volta da Newton. In effetti questi liquidi complessi si comportano un po' come gas rarefatti, nel senso che le particelle che essi contengono sono relativamente grandi e distanti una dall'altra e interagiscono su di una scala l più grande del normale.

1.4.1 Il flusso di quantità di moto

Per introdurre una dipendenza lineare dai gradienti degli invarianti meccanici additivi ρ , \mathbf{Q} ed E , si scrive il tensore $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}$ come somma del termine di equilibrio $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^{eq}(\rho, \mathbf{Q}, E)$ ed altri tre termini proporzionali a $\nabla\rho$, $\nabla\mathbf{Q}$ e ∇E tramite opportuni coefficienti che saranno anch'essi funzioni di ρ , \mathbf{Q} ed E . Il primo termine rappresenta il flusso in condizioni di gradienti nulli, e non può che coincidere con l'espressione trovata nel §1.3, mentre i nuovi termini nel loro insieme saranno indicati con $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d$, parte *dissipativa* del flusso di quantità di moto. L'aggettivo si giustifica in quanto si può dimostrare che quando $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d = 0$ la produzione di entropia (detta anche dissipazione) è nulla.

Nella sua forma più generale $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d$ deve dipendere da $\nabla\rho$ e ∇E attraverso due tensori tripli (dotati di 27 componenti), e da $\nabla\mathbf{Q}$ attraverso un tensore quadruplo (dotato di 81 componenti). Tutte le componenti di questi tensori sono funzioni di ρ , \mathbf{Q} ed E . Bisogna però ancora imporre il vincolo (1.12), che determina come si trasforma il flusso di quantità di moto al variare del sistema di riferimento inerziale, e l'ulteriore vincolo derivante dall'invarianza per rotazione.

Perché continui a valere il vincolo (1.12), la forma funzionale di $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d$ deve restare uguale al cambiare del sistema di riferimento e deve contenere solo le due variabili di stato termodinamico ρ ed E' , o equivalentemente ρ ed e . Infatti, si può sempre definire tale tensore nel sistema di riferimento \mathbf{x}' in cui $\mathbf{Q}' = 0$.

Occorre inoltre fare attenzione al fatto che, mentre i gradienti di grandezze scalari non variano con il sistema di riferimento per la (1.8a), il tensore $\nabla\mathbf{Q}$ però

varia. Infatti dalla (1.11) si ha:

$$\nabla Q = \nabla Q' + \nabla(\rho V_0) = \nabla Q' + \nabla \rho V_0$$

∇Q non è quindi la variabile più opportuna per descrivere la dipendenza funzionale di \mathbf{J}_Q^d in maniera indipendente dal sistema di riferimento. D'altra parte, passando a grandezze specifiche per unità di massa, si osserva facilmente che il gradiente della velocità di massa \mathbf{V} è invece indipendente dal sistema di riferimento: infatti $\nabla \mathbf{V} = \nabla(\mathbf{V}' + \mathbf{V}_0) = \nabla \mathbf{V}'$. Esprimeremo quindi \mathbf{J}_Q^d come una combinazione lineare di $\nabla \mathbf{V}$, $\nabla \rho$ e ∇e con coefficienti che sono funzioni di ρ ed e , e tale espressione risulterà identica in qualsiasi sistema inerziale.

Il principio di Curie Resta da imporre l'invarianza per rotazione legata alla isotropia dei fluidi, cioè alla loro proprietà caratteristica di non definire direzioni privilegiate (proprietà che cade in difetto nei cosiddetti *crystalli liquidi*). Questo comporta immediatamente che i due tensori tripli, coefficienti di $\nabla \rho$ e ∇e , siano nulli. Non esistono infatti tensori di ordine dispari le cui componenti siano indipendenti da rotoriflessioni del sistema di riferimento². Il tensore \mathbf{J}_Q^d può quindi dipendere linearmente solamente dal tensore $\nabla \mathbf{V}$, e viceversa il vettore \mathbf{J}_E^d , di cui ci occuperemo nel prossimo paragrafo, può dipendere linearmente solo dai vettori $\nabla \rho$ e ∇e . Questa osservazione prende il nome di *principio di Curie*.

Il fattore di proporzionalità fra \mathbf{J}_Q^d e $\nabla \mathbf{V}$ è in generale un tensore quadruplo, definito da 81 componenti c_{ijhk} . Non tutte queste componenti sono però indipendenti, ancora una volta per la necessaria invarianza per rotazione. Esistono infatti (a meno di una combinazione lineare) solo tre tensori quadrupli con componenti indipendenti dal sistema di riferimento, che si ottengono moltiplicando tra loro due tensori doppi unitari e permutandone gli indici in tutti i modi possibili. Utilizzando la notazione per componenti, ed introducendo il simbolo di Kronecker δ_{ij} che vale 1 quando $i = j$ e 0 quando $i \neq j$, si ha:

$$c_{ijhk} = \alpha \delta_{ij} \delta_{hk} + \beta \delta_{ih} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jh}$$

in cui i tre coefficienti $\alpha = \alpha(\rho, e)$, $\beta = \beta(\rho, e)$ e $\gamma = \gamma(\rho, e)$ sono funzioni dello stato termodinamico del fluido.

Per esplicitare l'azione di ciascuno dei tre termini sul tensore $\nabla \mathbf{V}$, osserviamo che:

$$\sum_{h,k=1}^3 \delta_{ij} \delta_{hk} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} = \delta_{ij} \sum_{h,k=1}^3 \delta_{hk} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} = \delta_{ij} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial V_h}{\partial x_h} = \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I}$$

²Esiste però un tensore triplo invariante per rotazioni pure, lo stesso che permette di definire il prodotto vettore. Fortunatamente i fluidi per la maggior parte non distinguono la destra dalla sinistra, ma la presenza di una direzione di rotazione privilegiata può essere facilmente osservata nelle proprietà ottiche delle soluzioni cosiddette otticamente attive (ad esempio, di alcuni zuccheri). A rigore, a tali soluzioni non si applica il principio di Curie.

$$\sum_{h,k=1}^3 \delta_{ih} \delta_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \nabla \mathbf{V}$$

$$\sum_{h,k=1}^3 \delta_{ik} \delta_{jh} \frac{\partial V_k}{\partial x_h} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = (\nabla \mathbf{V})^T$$

dove il simbolo T indica trasposizione. Di conseguenza risulta:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d = \alpha \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + \beta \nabla \mathbf{V} + \gamma (\nabla \mathbf{V})^T \quad (1.17)$$

Si può ancora ricavare una ulteriore relazione tra i tre coefficienti scalari rimasti liberi, imponendo che il fluido possa raggiungere una condizione di riposo relativo se messo in rotazione rigida con velocità angolare costante. Infatti in questa situazione il fluido deve poter raggiungere l'equilibrio termodinamico. (Si pensi al fluido in quiete all'interno di un contenitore posto in rotazione per un tempo abbastanza lungo). Per far questo, occorre prima di tutto determinare quale forma del tensore $\nabla \mathbf{V}_{rr}$ corrisponde ad una rotazione rigida. Come è noto dalla meccanica, una rotazione rigida con velocità angolare costante $\boldsymbol{\Omega}$ è descritta da:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$$

cioè da un campo di velocità che varia linearmente con le coordinate secondo la matrice di coefficienti:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il tensore gradiente di velocità, le cui componenti sono costanti ed espresse da questa stessa matrice, è evidentemente sempre antisimmetrico, cioè ha $(\nabla \mathbf{V}_{rr})^T = -\nabla \mathbf{V}_{rr}$ e traccia nulla. Sostituendo nella (1.17) si trova che

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Q},rr}^d = \alpha 0 + \beta \nabla \mathbf{V}_{rr} - \gamma \nabla \mathbf{V}_{rr}$$

Perché sia $\mathbf{J}_{\mathbf{Q},rr}^d = 0$ per una qualsiasi rotazione rigida, deve quindi essere necessariamente $\beta = \gamma$. Si trova così tornando al caso generale,

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d = \alpha \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + \beta [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T]$$

da cui si nota che vi sono infine solo due coefficienti scalari liberi e anche che il tensore $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^d$, come $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^{eq}$, è sempre simmetrico (proprietà che per altra via può essere messa in relazione con la conservazione del momento angolare).

La proprietà di dar luogo ad un flusso di quantità di moto in presenza di un gradiente di velocità caratterizza i fluidi *viscosi*, ed i relativi coefficienti prendono il nome di *coefficienti di viscosità*. Per tali coefficienti si usano le lettere greche λ e μ , definendo convenzionalmente il *primo coefficiente di viscosità* come $\mu = -\beta$

ed il *secondo coefficiente di viscosità* come $\lambda = -\alpha - (2/3)\beta$, di modo che la relazione ottenuta si scrive

$$\mathbf{J}_Q^d = -\mu \left(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \right) - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \quad (1.18)$$

Questa definizione è ovviamente equivalente alla precedente, ma ha in più la proprietà che il tensore tra parentesi ha traccia nulla e che per motivi termodinamici (non-negatività della produzione di entropia) si può dimostrare che i coefficienti λ e μ , al contrario di α e β , sono necessariamente non-negativi. Si noti che i coefficienti di viscosità hanno le dimensioni di una forza divisa per il prodotto di una velocità ed una lunghezza, o equivalentemente di una massa divisa per il prodotto di un tempo ed una lunghezza. È spesso utile introdurre anche una viscosità per unità di massa, che si indica con il simbolo $\nu = \mu/\rho$ e prende il nome di *viscosità cinematica*, con le dimensioni di m^2/s . Quando occorra distinguere, il coefficiente μ prende più precisamente il nome di *viscosità dinamica*. Si noti ancora una volta che tutti i coefficienti di viscosità sono funzioni di stato termodinamico. Nella maggior parte dei fluidi di uso comune la viscosità dinamica μ dipende prevalentemente dalla sola temperatura, aumentando con essa nei gas e diminuendo nei liquidi.

L'espressione completa dell'intero tensore \mathbf{J}_Q , nell'ipotesi di quasi-equilibrio termodinamico, è dunque la seguente:

$$\mathbf{J}_Q = \rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} - \mu \left(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \right) - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \quad (1.19)$$

Qualche considerazione sulla definizione di pressione Osserviamo infine che una definizione puramente meccanica di pressione potrebbe essere quella per cui la pressione è uguale ad un terzo della traccia del tensore degli sforzi, definito come il flusso di quantità di moto totale (1.19) depurato del solo termine $\rho \mathbf{V} \mathbf{V}$. Ciò porterebbe a chiamare pressione la grandezza:

$$\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{J}_Q = p - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}$$

che è evidentemente diversa da p , almeno nel caso comprimibile. Questa definizione, pur essendo in principio lecita, comporta come si vede una dipendenza funzionale della pressione dalle variabili di stato che è più complicata, rispetto alla (1.13), e quindi non viene normalmente utilizzata.

1.4.2 Il flusso di energia (cenni)

Nel caso di quasi-equilibrio anche il flusso di energia \mathbf{J}_E si scrive come la somma di una parte all'equilibrio, che coincide con quella precedentemente determinata, ed una parte dissipativa \mathbf{J}_E^d , che è proporzionale ai gradienti delle variabili di stato attraverso due tensori doppi ed un tensore triplo.

Per il principio di Curie il tensore di ordine tre deve essere identicamente nullo ed i due tensori doppi devono essere proporzionali al tensore identità; \mathbf{J}_E può quindi contenere solo termini proporzionali, attraverso un coefficiente scalare, a $\nabla\rho$ e ∇e , o equivalentemente ai gradienti di qualsiasi altra coppia di variabili termodinamiche scelte come indipendenti. Si può inoltre mostrare che la condizione termodinamica che non si abbia diminuzione di entropia riduce i coefficienti liberi ad uno solo, davanti al gradiente della temperatura. Questo coefficiente si indica con $-k$, dove k prende il nome di *coefficiente di conducibilità termica* ed è necessariamente non-negativo:

$$\mathbf{J}_E^d = -k\nabla T \quad (1.20)$$

L'espressione completa del flusso di energia in quasi-equilibrio, ottenuta dalla (1.15) tenendo conto sia di \mathbf{J}_E^d che di \mathbf{J}_Q^d , risulta infine:

$$\mathbf{J}_E = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} + p\mathbf{V} + \mathbf{J}_Q^d \cdot \mathbf{V} - k\nabla T \quad (1.21)$$

1.5 Le condizioni al contorno

Con l'espressione dei flussi trovata nei paragrafi precedenti, e a patto di conoscere le proprietà termodinamiche $p(\rho, e)$, $T(\rho, e)$, $\mu(\rho, e)$, $\lambda(\rho, e)$ e $k(\rho, e)$ caratteristiche del fluido in esame, si è ricondotto il problema del moto di un fluido ad un sistema di cinque equazioni a derivate parziali in cinque incognite. Perché il problema sia completo, occorre ancora specificare per tali equazioni differenziali le condizioni al contorno. Si tratta di una materia complessa, tanto che non esiste se non in situazioni molto schematiche una dimostrazione matematica dell'esistenza ed unicità della soluzione. Si può però affermare che in praticamente tutti i casi di interesse pratico sono necessarie quattro condizioni su di un contorno chiuso (e non cinque come il numero delle incognite potrebbe indurre a pensare). Quando il contorno sia costituito da una parete solida, tre di queste riguardano le tre componenti della velocità, che devono uguagliare la velocità del contorno stesso, mentre la quarta è una condizione di tipo termico, che può riguardare la temperatura, il flusso di calore o una combinazione dei due.

Per i problemi esterni occorre anche assegnare una condizione all'infinito, che nella maggior parte dei casi consiste nel richiedere che la velocità, la pressione e la temperatura assumano un valore costante e noto proprio della corrente all'infinito.

Le condizioni al contorno cambiano quando si considera il problema non viscoso. In effetti il sistema delle equazioni che regge il moto si abbassa di grado, dal momento che le derivate seconde non sono presenti nelle equazioni di Eulero. Occorre in questo caso distinguere tra moto subsonico, con velocità ovunque inferiore alla velocità del suono, e moto supersonico o misto. Limitandoci per ora al moto subsonico, occorre assegnare una sola condizione su di un intero contorno chiuso, più altre tre (due se non si considera l'equazione dell'energia) sulla sola

parte del contorno dove il fluido risulta entrante. Ad una parete solida l'unica condizione permessa consiste nel richiedere che sia nulla la componente normale della velocità (condizione di non penetrazione):

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$$

L'inconsistenza tra questa condizione e quella relativa al caso viscoso (condizione di non slittamento), che impone che siano nulle tutte e tre le componenti della velocità, è all'origine della nascita vicino alla parete di un sottile strato di fluido, detto strato limite, in cui le componenti tangenziali della velocità si portano rapidamente dal valore non nullo previsto dalla teoria non viscosa a quello nullo imposto dalla viscosità. Questo è inoltre uno dei motivi per cui anche viscosità piccole (cioè numeri di Reynolds grandi) producono spesso effetti non trascurabili.

1.6 Pressione e sforzi

Il tensore \mathbf{J}_Q rappresenta una forza per unità di superficie, ed è quindi assimilabile al tensore degli sforzi che si introduce nella Meccanica dei Solidi. Occorre però sottolineare la differenza importante che nei solidi il tensore degli sforzi dipende dalla deformazione, mentre nei fluidi esiste una dipendenza funzionale dalla velocità e dalle sue derivate.

Fino a quando non viene specificata una espressione particolare per il tensore \mathbf{J}_Q , le equazioni di bilancio scritte nelle pagine precedenti sono di validità molto generale. Esse sono ricavate a partire dalla considerazione di un sistema meccanico costituito da N molecole, e quindi l'ipotesi di avere a che fare con un fluido non è necessaria. L'equazione in forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{Q} \, d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{J}_Q \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (1.22)$$

che esprime il bilancio della quantità di moto, vale anche per un volume di controllo che contiene al suo interno non solo una porzione di fluido ma anche un corpo solido. Se si immagina allora (figura 1.3) di restringere il volume \mathcal{V} fino a farlo coincidere con il volume occupato dal corpo solido, la stessa relazione integrale permette di calcolare la variazione temporale della quantità di moto \mathbf{Q}_c del corpo, ovvero la forza aerodinamica \mathbf{F}_a : le proprietà di volume che compaiono nella (1.22) sono infatti quelle del solido. Si ha quindi:

$$\mathbf{F}_a = \frac{d\mathbf{Q}_c}{dt} = \oint_{S_1} \mathbf{J}_Q \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.23)$$

dove si è cambiato segno al flusso in accordo con la convenzione secondo cui \mathbf{n} indica la normale uscente dal fluido verso il solido.

D'altro canto l'integrale di contorno va calcolato sulla frontiera S_1 che è infinitamente prossima al corpo ma giace all'interno del fluido: le proprietà di superficie sono quindi quelle del fluido, e si ottiene il risultato non banale che la

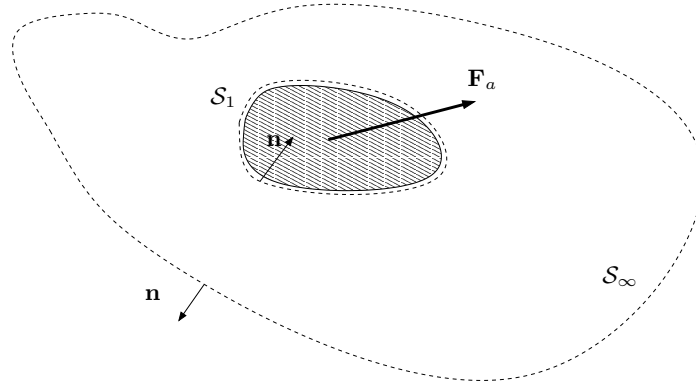


Figura 1.3 Calcolo della forza aerodinamica come flusso totale della quantità di moto lungo un contorno S_1 infinitamente prossimo al corpo; solo nel caso stazionario questo è equivalente al calcolo lungo un contorno S_∞ infinitamente lontano da esso.

forza aerodinamica che agisce su un corpo solido può essere calcolata mediante un integrale di superficie esteso al solo fluido.

Quando il fluido è in equilibrio locale, si può utilizzare per \mathbf{J}_Q l'espressione non viscosa così come compare nella (1.14). Tenendo conto della condizione al contorno per cui, sulla superficie del corpo, deve essere $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, la forza aerodinamica è:

$$\mathbf{F}_a = \iint_{S_1} p \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} p \mathbf{n} \, dS \quad (1.24)$$

Quando invece il fluido è in quasi-equilibrio, è sufficiente utilizzare la corretta espressione di \mathbf{J}_Q per ottenere la forza aerodinamica attraverso l'integrale (1.23). Ovviamente nel problema viscoso non è più vero che p coincide con lo sforzo normale, in quanto esistono dei contributi di non-equilibrio allo sforzo normale stesso: la pressione resta la funzione di stato definita per un fluido in quiete.

Il caso stazionario Una importante semplificazione può essere sfruttata nei problemi stazionari. In questo caso spesso è utile scegliere un volume di integrazione \mathcal{V} molto grande rispetto al volume del corpo, e delimitato dal contorno S_∞ come mostrato nella figura 1.3. In questo modo la quantità di moto \mathbf{Q} di cui l'equazione (1.22) fornisce l'evoluzione temporale è quella totale, cioè la somma della quantità di moto del corpo e di quella del fluido. Ma la variazione della quantità di moto del fluido deve essere nulla se il moto è stazionario: ciò significa che l'integrale effettuato su S_∞ è uguale ed opposto a quello calcolato lungo S_1 . La forza aerodinamica si può quindi calcolare anche con la:

$$\mathbf{F}_a = - \oint_{S_\infty} \mathbf{J}_Q \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Spesso esistono consistenti vantaggi nel determinare la forza aerodinamica mediante un integrale calcolato all'infinito, dove possono essere utilizzate per \mathbf{J}_Q espressioni più semplici.

1.7 L'equazione di bilancio dell'entropia (cenni)

Dalle equazioni fondamentali di bilancio della massa, energia e quantità di moto possono essere derivate altre due relazioni, quella di bilancio dell'entropia considerata in questo paragrafo e quella di bilancio del momento angolare considerata nel prossimo, che hanno una grande utilità pratica e permettono di derivare alcuni vincoli sulla composizione dei flussi dissipativi (come già menzionato) che non sarebbero altrimenti evidenti. Deve però essere chiaro che queste ulteriori relazioni sono conseguenza della precedenti, e non modificano la descrizione della meccanica molecolare del fluido. Un po' come capita per le variabili di stato termodinamico che sono comunque due ma possono essere scelte in più di un modo, può essere più semplice descrivere alcuni problemi utilizzando queste grandezze come fondamentali, ma il numero di variabili indipendenti resta cinque.

1.8 L'equazione di bilancio del momento angolare (cenni)

Moto irrotazionale ed equazione di Laplace

L'analisi della dinamica della vorticità ha permesso di stabilire che il moto di un fluido non viscoso, incomprimibile oppure comprimibile isoentropico, sotto l'azione di forze di volume irrotazionali, che abbia inizio dalla quiete oppure da condizioni uniformi all'infinito, è sempre irrotazionale in tutta la parte dello spazio raggiungibile da fluido che proviene dall'infinito. Data l'importanza dei casi pratici che coinvolgono condizioni uniformi all'infinito o fluido in quiete all'infinito, lo studio dei moti irrotazionali costituisce una parte rilevante dell'Aerodinamica.

Una corrente insieme irrotazionale e solenoidale è completamente descritta dall'equazione di Laplace per il potenziale cinetico, del quale si discutono le condizioni di unicità. L'ipotesi di considerare solo corpi dotati di bordo di uscita aguzzo (corpi aerodinamici) consente di chiudere il problema.

Indice del capitolo

4.1	Flusso irrotazionale e solenoidale	48
4.1.1	Il potenziale cinetico	48
4.1.2	La funzione di corrente	49
4.2	Regioni semplicemente connesse	50
4.2.1	Condizioni di unicità per $\nabla\varphi$	50
4.3	Regioni biconnesse	52
4.3.1	Condizioni di unicità per $\nabla\varphi$	53
4.4	Corpi tozzi e corpi aerodinamici	55
4.4.1	Avvio impulsivo di un profilo	56
4.5	Condizioni al contorno per l'equazione di Laplace	56
4.5.1	La scia	56
4.6	La forza aerodinamica	59
4.6.1	Il paradosso di D'Alembert	63
