B

Vettori e tensori

Le leggi fisiche sono normalmente espresse mediante equazioni. È utile quindi possedere strumenti che permettano di scrivere e manipolare le equazioni senza introdurre inaccettabili dipendenze dei risultati da un cambio nella scelta del sistema di riferimento.

Indice del capitolo

B.1 I vettori

Si chiama *vettore* una qualsiasi grandezza fisica che, al variare del sistema di riferimento, si trasforma come si trasformerebbe un segmento orientato (cioè appunto un vettore, inteso nel tradizionale significato geometrico). Le sue componenti cartesiane si possono esprimere con tre numeri reali, che sono ovviamente diversi in sistemi di riferimento diversi, ma mutano secondo una relazione lineare, esprimibile attraverso una matrice.

B.1.1 Le matrici di rotazione

Una matrice di questo tipo si dice matrice di rotazione, di elementi R_{ij}, e collega le componenti v_i di un vettore $\mathbf{v}$ nel sistema di riferimento $\mathbf{x}$ alle componenti v_i'

di $\mathbf{v}$ nel sistema di riferimento $\mathbf{x}'$, attraverso la relazione:

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{ij} v'_j, \qquad i = 1, 2, 3$$

Una matrice di rotazione non è una matrice qualsiasi, ma gode di particolari proprietà, dette di *ortonormalità*, che discendono dal fatto che la lunghezza di un vettore non può cambiare a seguito di una rotazione, e che costituiscono 6 vincoli a cui le 9 componenti della matrice devono soddisfare (in due dimensioni: 3 vincoli tra 4 componenti). Questo mostra immediatamente, tra l'altro, che in una rotazione tridimensionale esistono 3 gradi di libertà e in una rotazione bidimensionale uno solo.

Tali vincoli si ricavano facilmente imponendo che la lunghezza di qualsiasi vettore si esprima nello stesso modo nei due sistemi di riferimento $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$, cioè risulti $\sum_i v_i v_i = \sum_k v'_k v'_k$. Si ha:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i v_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{ij} v'_j \right) \left(\sum_{k=1}^{3} \mathsf{R}_{ik} v'_k \right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \mathsf{R}_{ij} \mathsf{R}_{ik} v'_j v'_k$$

Perché le lunghezze dei due vettori siano uguali nei diversi sistemi di riferimento, deve dunque essere:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \mathsf{R}_{ij} \mathsf{R}_{ik} = \delta_{jk}} \qquad j, k = 1..3 \tag{B.1a}$$

In questa espressione δ_{jk} è il simbolo di Kronecker, che denota gli elementi della matrice unitaria:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

Al variare degli indici j e k in tutte le combinazioni possibili, la (B.1a) fornisce un insieme di 9 equazioni fra i 9 coefficienti R_{ij}; dato però che le equazioni ottenute con valori scambiati degli indici j e k sono identiche, le relazioni indipendenti si riducono a 6. Si può leggere la (B.1a) anche dicendo che la matrice trasposta di R_{ij} è uguale alla sua matrice inversa; infatti il prodotto di una matrice di rotazione per la sua trasposta è pari alla matrice unitaria. Una matrice con queste proprietà si dice anche ortogonale.

Una relazione analoga, ma con gli indici scambiati, si ricava ancora moltiplicando la (B.1a) a sinistra per una ulteriore matrice di rotazione:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \mathsf{R}_{lj} \mathsf{R}_{ij} \mathsf{R}_{ik} = \sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{lj} \delta_{jk} \qquad l, k = 1, 2, 3$$

e poiché il secondo membro vale R_{lk}, segue che:

$$\sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{lj}\mathsf{R}_{ij} = \delta_{li} \qquad l, i = 1, 2, 3 \tag{B.1b}$$

ovvero anche il prodotto per righe della matrice di rotazione per se stessa eguaglia la matrice unità.

(Nota: a rigore, le matrici definite dalla proprietà (B.1a) oppure (B.1b) si definiscono matrici di rotoriflessione, in quanto comprendono non solo le rotazioni degli assi di riferimento ma anche le riflessioni rispetto ad uno dei piani coordinati. Entrambe sono casi particolari di una classe molto più ampia di trasformazioni geometriche rappresentabili mediante matrici che vanno sotto il nome di "gruppi di simmetria".)

B.1.2 Operazioni invarianti fra vettori

È importante, per quanto ricordato prima, identificare operazioni tra vettori che non dipendano dal sistema di riferimento. Grazie alla linearità della rotazione, tutte le operazioni lineari fra vettori costituiscono un primo insieme di operazioni vettorialmente lecite: ne fanno parte la somma di vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare, e in generale la combinazione lineare di vettori.

Il prodotto vettore Il prodotto vettore fra due vettori è una ulteriore operazione lecita, cioè un'operazione che fornisce un risultato indipendente dalla scelta del sistema di riferimento. Ciò avviene però solo nel sottogruppo delle rotazioni pure (che esclude riflessioni speculari). Questa proprietà, di cui non si darà qui la dimostrazione, si denota talvolta chiamando il risultato di un prodotto vettoriale "pseudovettore".

Il prodotto vettore $\mathbf{a}$ fra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si indica con:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Il prodotto vettore non è commutativo, e si ha:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

Il prodotto scalare Un'altra operazione lecita è costituita dal prodotto scalare fra due vettori. Il prodotto scalare a fra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si indica con:

$$a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

e per componenti è definito come:

$$a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

È facile dimostrare che il prodotto scalare fra due vettori non dipende dal sistema di riferimento. Infatti:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{ij} u'_j \right) \left(\sum_{k=1}^{3} \mathsf{R}_{ik} v'_k \right) .$$

Combinando insieme le matrici di rotazione, e ricordando le proprietà (B.1b) e (B.1a), si ottiene infatti:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \mathsf{R}_{ij} \mathsf{R}_{ik} u'_j v'_k = \sum_{j,k=1}^{3} \delta_{jk} u'_j v'_k = \sum_{k=1}^{3} u'_k v'_k .$$

Esistono inoltre altre operazioni lineari possibili, che però comportano l'introduzione del concetto di tensore.

B.2 I tensori

Una relazione lineare fra una funzione scalare f ed una variabile vettoriale $\mathbf{v}$ deve necessariamente coinvolgere 3 coefficienti. Per quanto detto sopra, perché la relazione sia indipendente dalla scelta del sistema di riferimento, i tre coefficienti devono variare come variano le componenti di un vettore. La relazione quindi deve potersi scrivere nella forma di prodotto scalare del vettore $\mathbf{v}$ per un secondo vettore $\mathbf{c}$ di componenti c_i:

$$f = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}.$$

Infatti, si è appena mostrato che il prodotto scalare è invariante rispetto al cambiamento di sistema di riferimento.

Analogamente, una relazione lineare fra una funzione vettoriale $\mathbf{f}$ ed una variabile vettoriale $\mathbf{v}$ deve coinvolgere 9 coefficienti:

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} \mathsf{c}_{ik} v_k, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{B.2}$$

Perché questa relazione sia indipendente da un cambiamento di sistema di riferimento, i coefficienti c_{ik} devono variare secondo una precisa relazione. Nel generico sistema $\mathbf{x}'$ si ha:

$$\sum_{h=1}^{3} \mathsf{R}_{ih} f'_h = \sum_{k=1}^{3} \mathsf{c}_{ik} \sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{kj} v'_j \qquad i = 1, 2, 3.$$

Moltiplicando a sinistra ambo i membri per R_{il} si ottiene:

$$\sum_{i,h=1}^{3} \mathsf{R}_{il}\mathsf{R}_{ih} f'_h = \sum_{i,k=1}^{3} \mathsf{R}_{il}\mathsf{c}_{ik} \sum_{j=1}^{3} \mathsf{R}_{kj} v'_j \qquad l = 1, 2, 3.$$

Grazie alla relazione (B.1b), il primo membro è semplicemente:

$$\sum_{h=1}^{3} \delta_{lh} f'_h = f'_l \qquad l = 1, 2, 3.$$

Il secondo membro, sempre grazie alla linearità, si può scrivere come:

$$\sum_{i,k,j=1}^{3} \mathsf{R}_{il}\mathsf{c}_{ik}\mathsf{R}_{kj} v'_j \qquad l = 1, 3.$$

Con la posizione:

$$\boxed{\mathsf{c}'_{lj} = \sum_{i,k=1}^{3} \mathsf{R}_{il}\mathsf{c}_{ik}\mathsf{R}_{kj}} \tag{B.3}$$

si ottiene un legame fra le componenti di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{v}$ che assume la stessa forma della relazione (B.2):

$$f'_l = \sum_{j=1}^{3} \mathsf{c}'_{lj} v'_j \qquad l = 1, 3.$$

Si è quindi ottenuta la legge (B.3) con cui devono mutare i 9 coefficienti c_{ij} al variare del sistema di riferimento. Una grandezza definita da nove componenti c_{ij} che variano secondo la relazione (B.3) si definisce tensore doppio, o qualora non sorga ambiguità semplicemente tensore. Si noti la relazione tra tensori e matrici, che è la stessa che esiste tra un vettore e la terna di numeri che ne rappresenta le componenti: un tensore è rappresentato da una matrice in un particolare sistema di riferimento, ma la sua rappresentazione cambia da un sistema di riferimento all'altro. Viceversa, non qualsiasi matrice rappresenta un tensore, ma solo una che soddisfa la (B.3); ad esempio, la matrice di rotazione non è un tensore. L'unico tensore doppio che è rappresentato sempre dalla stessa matrice è il tensore unità, di componenti δ_{ij} in qualunque sistema di riferimento, o suoi multipli.

B.2.1 Operazioni invarianti fra vettori e tensori

Naturalmente le operazioni lineari, come la somma di tensori e il prodotto di un tensore per uno scalare, sono invarianti rispetto ad un cambio di sistema di riferimento.

Il prodotto tensoriale Si può notare, ed è un utile ausilio mnemonico, che la legge (B.3) consiste nell'applicare secondo ciascun indice della matrice rappresentativa di un tensore la stessa trasformazione che si applicherebbe ad un vettore. Da ciò si vede immediatamente che anche il prodotto componente per componente tra due vettori

$$\mathsf{d}_{ij} = u_i v_j$$

si trasforma come un tensore, e quindi *è* un tensore, detto tensore diade: questa operazione si chiama *prodotto tensoriale* (o *diadico*) tra due vettori, e si indica giustapponendo i simboli dei due vettori senza alcun segno:

$$\mathbf{d} = \mathbf{uv}.$$

Per inciso, esistono anche tensori con più di due indici (detti tensori tripli, quadrupli, etc.) che sono rappresentati da 27, 81, etc. componenti che si trasformano applicando successivamente secondo ciascun indice la stessa matrice di rotazione valida per i vettori. Ad esempio, il prodotto componente per componente di due tensori doppi è un tensore quadruplo, come anche lo è la trasformazione lineare di un tensore in un altro (legge di Hooke dell'elasticità o legge di Newton della viscosità).

Il prodotto scalare tensore–vettore Così come la trasformazione lineare di in vettore in uno scalare si rappresenta mediante il prodotto scalare tra due vettori, la trasformazione lineare di un vettore in un altro secondo la (B.2), invariante per costruzione, prende il nome di prodotto scalare tra un tensore ed un vettore, e si indica con:

$$\mathbf{f} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}$$

Si noti che il prodotto tensoriale di due vettori ed il prodotto scalare tensore–vettore non sono commutativi: invertendo l'ordine dei fattori il risultato cambia.

La contrazione Una ulteriore operazione invariante è l'operazione di contrazione di un tensore, ovvero la somma delle componenti diagonali. Come si può facilmente verificare applicando la (B.1a), la contrazione produce uno scalare (detto anche *traccia* della matrice che rappresenta il tensore) indipendente dal sistema di riferimento:

$$a = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{c}_{ii}$$

La trasposizione Anche la trasposizione degli indici di un tensore è un'operazione invariante: infatti, dato che nella (B.3) le due matrici di rotazione che moltiplicano il tensore sono uguali tra loro, anche la rappresentazione del tensore nel riferimento $\mathbf{x}'$ risulta trasposta. Parimenti, la proprietà di un tensore di essere rappresentato da una matrice simmetrica o antisimmetrica si mantiene da un sistema di riferimento all'altro, per cui si può parlare di tensori simmetrici o antisimmetrici.

Il doppio prodotto scalare Infine ricordiamo il doppio prodotto tensoriale, che produce anch'esso uno scalare indipendente dal sistema di riferimento:

$$a = \sum_{i,j=1}^{3} \mathsf{c}_{ij}\mathsf{d}_{ij}$$

Indichiamo il doppio prodotto tensoriale con questo simbolo:

$$a = \mathbf{\mathsf{c}} : \mathbf{\mathsf{d}}$$

B.3 L'operatore ∇

Identità vettoriali

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} \tag{B.4}$$

È noto che l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ (nabla) si può definire come un operatore vettoriale che, applicato ad una funzione scalare φ, fornisce un vettore le cui componenti in ogni direzione esprimono la variazione della funzione φ in quella direzione (gradiente). In coordinate cartesiane, ed indicando con $\mathbf{i}_x$ il versore dell'asse x, si ha:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Generalizzando questa definizione, l'operatore ∇ può essere applicato anche ad un vettore o ad un tensore, da cui può essere separato attraverso un simbolo di prodotto scalare, vettoriale o diadico. Quelle che seguono sono notazioni alternative:

$$\begin{aligned} \nabla &= \text{grad} \\ \nabla\cdot &= \text{div} \\ \nabla\times &= \text{rot} \end{aligned}$$

La notazione vettoriale a primo membro consente però di manipolare le relazioni vettoriali con maggiore semplictà.

L'operatore ∇ applicato ad uno scalare o vettore In questo caso si hanno le note relazioni elencate nel seguito, che possono essere dimostrate singolarmente.

$$\begin{aligned} \text{div}\,(\text{grad}\,\varphi) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla})\,\varphi = \nabla^2\varphi \\ \text{div}\,(\text{rot}\,\mathbf{V}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) = 0 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla})\,\varphi = 0 \tag{B.6}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) - (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2\mathbf{V}$$

In particolare ricordiamo che:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi\mathbf{a}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})\,\varphi + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi \tag{B.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{ab}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b} \tag{B.8}$$

$$\mathbf{a} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b}) = (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b} \tag{B.9}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi + \varphi\nabla^2\varphi \tag{B.10}$$

B.4 Il teorema di Gauss (o della divergenza)

Sia $\mathcal{V}$ un volume delimitato dalla superficie chiusa $\partial\mathcal{V}$, con normale $\mathbf{n}$ uscente ed elemnto di contorno $\mathrm{d}\mathcal{S}$. Il teorema di Gauss generalizzato si scrive nelle seguenti forme per una quantità scalare φ o per quantità vettoriali $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathcal{V} &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \\
\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathcal{V} &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \times \mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \\
\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{V} &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n}\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{S} \\
\iiint_{\mathcal{V}} \nabla^2\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{V} &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{S} \\
\iiint_{\mathcal{V}} \nabla^2\mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathcal{V} &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \\
\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{ab})\;\mathrm{d}\mathcal{V} &= \oint\!\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{ab})\;\mathrm{d}\mathcal{S}
\end{aligned}$$