A

Funzioni di variabile complessa

Le variabili complesse costituiscono un importante strumento per lo studio di problemi aerodinamici sotto l'ipotesi di moto bidimensionale e irrotazionale di un fluido non viscoso, ed in generale di tutti quei fenomeni fisici descritti dall'equazione di Laplace in due dimensioni.

Indice del capitolo

A.1 Richiami di Algebra dei numeri complessi.

Dopo aver introdotto l'unità immaginaria i mediante la relazione:

$$i^2 = -1$$

si definisce numero complesso z ogni combinazione di due numeri reali a e b della forma:

$$z = a + ib$$

Il numero complesso $z^* = a - ib$ è il coniugato del numero complesso z. Il numero reale a costituisce la parte reale di z, che indichiamo con $\Re[z]$, mentre b

ne costituisce la parte immaginaria $\Im[z]$. L'uguaglianza fra due numeri complessi implica l'eguaglinza delle loro parti reali e delle loro parti immaginarie.

Le operazioni di addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione fra numeri complessi si definiscono in analogia con i numeri reali. Si ha:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)}$$

I numeri complessi sono coppie ordinate di numeri reali. In quanto tali, essi possono essere rappresentati anche come punti su un piano (detto piano complesso o di *Gauss* o di *Argand*), oppure come vettori nello stesso piano, e dotati quindi di modulo e argomento.

Teorema di Eulero Il teorema di Eulero afferma che

$$\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$$

La funzione $\mathrm{e}^{i\theta}$ si definisce ponendo $x = i\theta$ nella serie esponenziale

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Notiamo che risulta

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{d}\theta} = i\mathrm{e}^{i\theta}$$

Calcolando ora

$$\frac{\mathrm{d}\,(\cos\theta + i\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

e confrontando le due ultime relazioni si è dimostrato il teorema di Eulero. Esso permette di scrivere un numero complesso $z = x + iy$, oltre che in forma cartesiana, anche nella forma polare

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta}$$

In questa notazione la quantità $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ si chiama modulo di z e si indica con $|z|$. L'angolo θ invece è l'argomento di z e si indica con $\arg z$.

L'argomento di un numero complesso è dunque definito a meno di multipli di 2π, in quanto

$$\mathrm{e}^{i(\theta+2\pi)} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{2\pi i}$$

e

$$\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$$

Notiamo come la moltiplicazione di un numero complesso z per un numero complesso della forma $\mathrm{e}^{i\phi}$, con ϕ reale, equivale alla rotazione di un angolo ϕ del vettore che rappresenta z nel piano di Argand.

A.2 Le funzioni analitiche

Se $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ sono due funzioni delle variabili reali x ed y, la combinazione $\xi + i\eta$ è una funzione della variabile complessa $z = x + iy$, e la indichiamo con $f(z)$.

Ci interessiamo solo a quelle funzioni di variabile complessa che siano anche *analitiche*. Esse costituiscono un importante sottoinsieme delle funzioni di variabile complessa: infatti, come si vedrà in seguito, in quanto funzioni analitiche sono anche funzioni continue e indefinitamente differenziabili e integrabili.

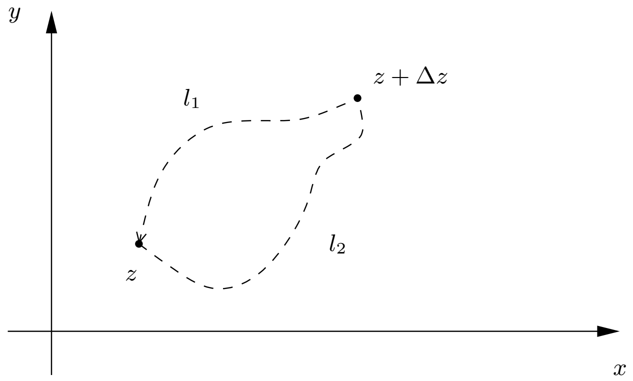

Figura A.1 Il limite necessario per l'esistenza della derivata di una funzione complessa deve esistere ed essere lo stesso indipendentemente da come il punto $z + \Delta z$ tende al punto z.

Per quanto le regole di derivazione non siano formalmente diverse da quelle per le funzioni di variabile reale, è importante ricordare che la condizione di differenziabilità assume in campo complesso un aspetto di particolare significato. Infatti, nella consueta definizione di derivata come limite del rapporto incrementale

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

il limite stesso deve esistere ed essere lo stesso in maniera indipendente da come il punto corrispondente a $z + \Delta z$ si avvicina al punto z. Osservando la figura A.1, il limite deve cioè non dipendere dal fatto che $z + \Delta z \to z$ lungo un certo cammino l_1 oppure lungo un altro cammino l_2. Questa è appunto la condizione di analiticità (o di monogeneità) per la funzione $f(z)$.

Perché una funzione complessa $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ sia differenziabile, occorre quindi che siano anzitutto differenziabili separatamente la sua parte reale $\xi(x, y)$ e la sua parte immaginaria $\eta(x, y)$. Dopo di che, la condizione necessaria e sufficiente perché la funzione $f(z)$ sia analitica è che valga la seguente relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

Riscrivendo la medesima condizione in termini della parte reale ed immaginaria di $f(z)$, si ottengono le cosiddette condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = +\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{A.1a}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{A.1b}$$

Funzioni armoniche e funzioni coniugate Si mostra facilmente che, se le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte e la funzione $f(z)$ è analitica, le sue parti reale ed immaginaria sono entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace, ovvero sono due funzioni armoniche. È sufficiente a questo scopo derivare la condizione di monogeneità (A.1a) rispetto a x e la (A.1b) rispetto ad y per ottenere che

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

Analogamente, derivando la (A.1a) rispetto ad y e la (A.1b) rispetto a x si vede che anche la funzione $\eta(x, y)$ è soluzione dell'equazione di Laplace.

Le due funzioni ξ ed η non sono però funzioni armoniche indipendenti: infatti, assegnata la parte reale $\xi(x, y)$ di $f(z)$, la parte immaginaria $\eta(x, y)$ non è più arbitraria, ma determinata a meno di una costante additiva dalle condizioni di analiticità. Si dice anche che ξ ed η sono funzioni armoniche coniugate. In questo caso i due sistemi di curve che si ottengono per valori costanti di ξ e per valori costanti di η sono costituiti da curve ortogonali, cioè che si intersecano ad angoli retti.

È chiara, a questo punto, la stretta relazione che esiste fra le funzioni analitiche di variabile complessa e le soluzioni al problema del moto bidimensionale ed irrotazionale di un fluido ideale. Le proprietà esibite dalla parte reale ed immaginaria di una funzione analitica sono identiche a quelle del potenziale di velocità e della funzione di corrente di un moto bidimensionale irrotazionale di un fluido ideale, e viceversa. Ad ogni funzione analitica $f(z)$ corrisponde un moto bidimensionale e irrotazionale di un fluido ideale, per il quale la parte reale di f rappresenta il potenziale cinetico, e la parte immaginaria di f la funzione di corrente.

A.3 XXX Alcune funzioni analitiche

Una importante proprietà delle funzioni analitiche è che l'operazione di composizione di funzioni analitiche genera ancora delle funzioni analitiche.

Sono funzioni analitiche in tutto il piano complesso le potenze intere della variabile complessa z e, eccettuando l'origine, anche le potenze intere negative. Questo permette di costruire funzioni razionali fratte, che sono analitiche ovunque tranne nei punti in cui si annulla il loro denominatore.

Un rilievo particolare rivestono le funzioni esponenziale e logaritmica. La funzione esponenziale è:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}$$

cioè il suo modulo è l'esponenziale (reale) della parte reale di z, mentre il suo argomento è la parte immaginaria di z. Il logaritmo anche in campo complesso è la funzione inversa dell'esponenziale:

$$\log z = \log r + iy$$

AGGIUNGERE: funzioni iperboliche e trigonometriche.

A.4 Calcolo integrale

Occorre anzitutto definire l'integrale (di linea) di una funzione di variable complessa. Consideriamo (figura A.2) una linea l tracciata da un punto arbitrario P_0 ad un altro punto P_1, e siano z_0 e z_1 i numeri complessi corrispondenti ai due punti. Suddividendo la linea l in n intervalli $z_i - z_{i-1}$, e definendo come δ l'intervallo di ampiezza massima, ovvero:

$$\delta = \max_{i=1,n} |z_i - z_{i-1}|$$

l'integrale esteso alla linea l della funzione di variabile complessa $f(z)$ si definisce come:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(z_i - z_{i-1})$$

In questa espressione, ξ_i è un punto interno al segmento compreso fra i due punti z_{i-1} e z_i. Il valore dell'integrale così definito dipende, in generale, non solo dagli estremi di integrazione z_0 e z_1, ma anche dal percorso che li unisce, cioè dalla particolare linea l scelta.

È interessante scoprire sotto quali condizioni il valore dell'integrale dipende solo dagli estremi di integrazione, e non dal particolare percorso che li unisce. Dai corsi di Analisi ricordiamo che, se una regione dello spazio è semplicemente connessa ed in quella regione $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono funzioni differenziabili, l'integrale di linea:

$$\int_{P_0(x_0,y_0)}^{P_1(x_1,y_1)} [u\,(x, y)\,\mathrm{d}x + v\,(x, y)\,\mathrm{d}y]$$

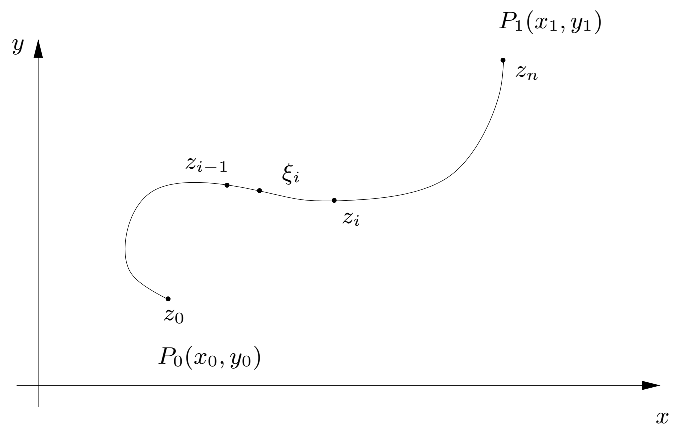

Figura A.2 Definizione dell'integrale di linea in campo complesso.

non dipende dal particolare percorso che unisce P_0 e P_1 se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Questa condizione (oltre al fatto che il dominio è semplicemente connesso) assicura che il differenziale $u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$ è un differenziale esatto.

Applicando ora quanto detto agli integrali di linea

$$\int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} (\xi\,\mathrm{d}x - \eta\,\mathrm{d}y); \qquad \int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} (\eta\,\mathrm{d}x + \xi\,\mathrm{d}y)$$

che rappresentano rispettivamente la parte reale ed immaginaria dell'integrale complesso

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

sotto le ipotesi di regione semplicemente connessa e funzioni ξ ed η differenziabili, si arriva a mostrare che gli integrali sono indipendenti dal percorso se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Ma se queste ultime sono soddisfatte, la funzione $f(z)$ è una funzione analitica.

A.4.1 Il teorema di Cauchy

Se quindi la funzione $f(z)$ è una funzione analitica in tutti i punti di una regione semplicemente connessa, il suo integrale lungo un percorso qualsiasi che unisce due punti interni alla regione restando sempre all'interno della regione stessa non dipende dal particolare percorso, ma solo dagli estremi di integrazione. Inoltre $f(z)\,\mathrm{d}z$ è il differenziale esatto di una funzione primitiva $F(z)$, tale che $F'(z) = f(z)$, e

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} \mathrm{d}[F(z)] = F(z_1) - F(z_0)$$

Se ora consideriamo un integrale calcolato fra due punti coincidenti, cioè lungo un cammino chiuso qualsiasi, si dimostra immediatamente l'importante teorema integrale di Cauchy: se $f(z)$ è una funzione analitica in tutti i punti interni ad una regione *semplicemente connessa*, allora per ogni curva chiusa $\mathcal{C}$ completamente contenuta in quella regione risulta:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{A.2}$$

Vale anche il risultato inverso (noto come teorema di Morera): se è vera la (A.2), allora $f(z)$ è analitica in tutti i punti interni alla regione delimitata dal cammino chiuso $\mathcal{C}$.

A.5 Regioni biconnesse

Sulla base del teorema integrale di Cauchy, si possono derivare risultati importanti per quello che riguarda l'integrazione di funzioni che siano analitiche in regioni molteplicemente connesse. Come si è discusso nel Capitolo 4, una regione biconnessa è tipica del problema aerodinamico bidimensionale in cui un corpo solido si trova immerso in un fluido che si estende sino all'infinito.

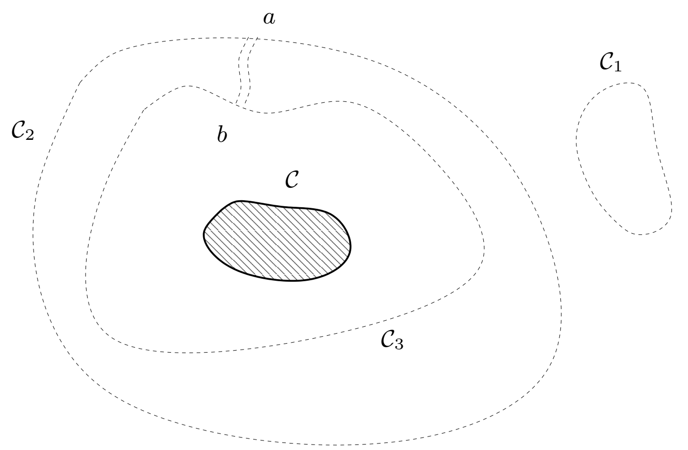

Figura A.3 Possibili cammini chiusi in una regione doppiamente connessa: i cammini $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ sono irriducibili ma fra loro riconciliabili, mentre $\mathcal{C}_1$ è riducibile.

Si consideri per semplicità (Figura A.3) una regione molteplicemente connessa, con molteplicità 2, che consista nell'esterno di una curva chiusa $\mathcal{C}$, ed una funzione $f(z)$ che sia analitica in tutti i punti interni di tale regione. Il percorso chiuso $\mathcal{C}_1$ è un circuito riducibile, la regione racchiusa da un percorso del tipo di $\mathcal{C}_1$ è semplicemente connessa e in tutti i suoi punti la $f(z)$ è analitica; in virtù del teorema di Cauchy (A.2) si può subito affermare che:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Consideriamo ora un percorso *irriducibile* come, ad esempio, il percorso $\mathcal{C}_2$, che non può essere ricondotto con continuità ad un punto a causa della presenza della lacuna $\mathcal{C}$: il teorema di Cauchy non permette di affermare nulla riguardo al valore dell'integrale esteso a questo percorso. Consideriamo però un terzo percorso irriducibile, $\mathcal{C}_3$, che sia *riconciliabile* con $\mathcal{C}_2$, e rendiamo semplicemente connessa la regione fra $\mathcal{C}_2$ ed $\mathcal{C}_3$ mediante una barriera, ovvero una linea che unisca il punto a su $\mathcal{C}_2$ al punto b su $\mathcal{C}_3$. Calcolando l'integrale sul nuovo dominio il cui contorno è ora costituito da $\mathcal{C}_2 + ab - \mathcal{C}_3 + ba$, ed applicando il teorema di Cauchy, si arriva ad affermare che

$$\oint_{\mathcal{C}_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\mathcal{C}_3} f(z)\,\mathrm{d}z$$

cioè il valore dell'integrale, che in generale è diverso da zero, non cambia se calcolato lungo due curve chiuse diverse ma fra loro riconciliabili. Si veda anche §4.3 per analoghe considerazioni sulla funzione potenziale in dominii biconnessi.

Integrale delle potenze intere di z Sempre sulla base del teorema di Cauchy, è possibile analizzare il comportamento della funzione z^n con n intero, cioè valutare il valore dell'integrale:

$$\oint_{\mathcal{C}} z^n\,\mathrm{d}z$$

esteso ad una curva chiusa $\mathcal{C}$ contenuta in una regione semplicemente connessa, al variare dell'esponente n.

Dato che il valore dell'integrale non cambia al cambiare del percorso di integrazione, si pu'øcalcolare l'integrale cercato su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio R. Sulla circonferenza la funzione integranda vale $z^n = R^n \mathrm{e}^{in\theta}$ mentre $\mathrm{d}z = Ri\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Quindi

$$\oint_{\mathcal{C}} z^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} R^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} i\,\mathrm{d}\theta = R^{n+1}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{n+1}\right]_0^{2\pi}$$

e per $n \neq -1$ la quantità fra parentesi quadre, valutata nei due estremi di integrazione, è nulla. Quando invece $n = -1$ si ha

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i$$

Si arriva a concludere che

$$\oint_{\mathcal{C}} z^n \,\mathrm{d}z = 0, \qquad n \geq 0, \quad n < -1$$

per ogni tipo di circuito chiuso, mentre per $n = -1$ si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{C} \text{ non contiene l'origine} \\ 2\pi i & \text{se } \mathcal{C} \text{ contiene l'origine una sola volta} \end{cases}$$

Analoghi risultati possono essere ricavati per la funzione integranda $f(z) = (z - z_0)^n$, che per valori negativi di n presenta una singolarità nel punto z_0 invece che nell'origine $z_0 = 0$.

A.6 La formula integrale di Cauchy

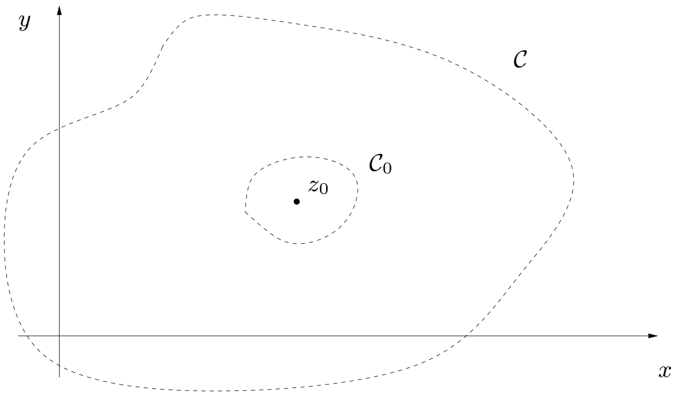

Figura A.4 Formula integrale di Cauchy: l'unico punto z_0 di singolarità della funzione integranda nella regione interna a $\mathcal{C}$ viene escluso mediante un piccolo contorno $\mathcal{C}_0$ che lo contenga.

Consideriamo ora una regione semplicemente connessa, e cerchiamo di stabilire il valore dell'integrale

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z$$

in cui $f(z)$ è una funzione analitica in tutti i punti della regione interna alla curva $\mathcal{C}$, e z_0 è un punto *interno* a $\mathcal{C}$. Per le ipotesi fatte, la funzione

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

è analitica ovunque nella regione interna a $\mathcal{C}$, tranne che nel punto $z = z_0$. Escludiamo questo punto circondandolo con una curva chiusa $\mathcal{C}_0$, come mostrato nella figura A.4. Sappiamo a questo punto, per quanto detto nel paragrafo precedente, che, se $\mathcal{C}_1$ è un'altra curva chiusa contenuta nella regione di analiticità che *non* contiene z_0 al suo interno, risulta

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 0$$

mentre se un percorso $\mathcal{C}_2$ contiene z_0 al suo interno l'integrale può assumere qualsiasi valore, ma risulta comunque che:

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \tag{A.3}$$

dal momento che $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_2$ sono due curve riconciliabili. Riscriviamo il secondo membro della (A.3) nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z =& f(z_0) \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \\ =& 2\pi i f(z_0) + \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Si può mostrare ora che l'integrale a secondo membro nell'espressione precedente è identicamente nullo. Dal momento che il valore di tale integrale è indipendente dal percorso $\mathcal{C}_0$ di integrazione, scegliamo come $\mathcal{C}_0$ una circonferenza di raggio ϵ e centro in z_0, cioè $|z - z_0| = \epsilon$. Assumendo che la quantità $|\zeta(z) - \zeta(z_0)|$ non divenga infinita sulla circonferenza, deve esistere un numero reale k tale che:

$$|\zeta(z) - \zeta(z_0)| \leq k$$

e quindi il valore assoluto dell'integrale può essere limitato dal prodotto della lunghezza della circonferenza moltiplicata per il valore assoluto della funzione integranda

$$\left| \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{\zeta(z) - \zeta(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \right| \leq 2\pi\epsilon\, \frac{k}{\epsilon} = 2\pi k$$

Il numero k, e quindi il valore assoluto dell'integrale, può essere ridotto a piacere riducendo il raggio ϵ del cerchio. Ma l'integrale non dipende da ϵ, esso non può quindi che valere zero. Si arriva in conclusione alla notevole *formula integrale di Cauchy*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \tag{A.4}$$

Essa afferma che i valori di una funzione analitica in ogni punto della regione di analiticità sono determinati dai valori che la funzione stessa assume sulla frontiera del dominio. Il legame con le proprietà delle soluzione dell'equazione di Laplace è evidente, in particolare con il teorema della media descritto in §5.5.5. Si noti che, se il punto z_0 non è interno alla regione delimitata dal cammino chiuso $\mathcal{C}$, ovunque in questa regione la funzione integranda è analitica, e l'integrale è quindi identicamente nullo.

Grazie alla formula integrale di Cauchy si riesce a mostrare che, se esiste la derivata prima di una funzione di variabile complessa, allora esistono anche la derivata seconda e, ricorsivamente, tutte le altre derivate sino all'ordine desiderato. Per la derivata n-sima, vale l'espressione generale:

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)} f}{\mathrm{d}z^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

La formula di Cauchy per l'esterno Esiste un analogo della formula integrale di Cauchy (A.4, che vale per problemi di tipo esterno. La curva $\mathcal{C}$ individua una regione che si estende fino all'infinito, ed il punto z_0 è esterno alla curva $\mathcal{C}$ (cioè interno a questa regione). Si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = f(z_0) - f(\infty)$$

A.7 Le serie di Taylor e di Laurent

Dal momento che la funzione di variabile complessa complessa $f(z) = z^n$, con n intero positivo, è una funzione analitica, anche la serie di potenze $\sum a_n z^n$, in cui gli a_n sono coefficienti complessi, rappresenta una funzione analitica, all'interno del suo cerchio di convergenza. Si può dimostrare che, se $f(z)$ è una funzione analitica in una regione semplicemente connessa, ed i punti z e z_0 sono interni a tale regione, la funzione $f(z)$ può sempre essere espressa in serie di Taylor, ovvero:

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathrm{d}^{(n)} f}{\mathrm{d}z^n} \right) \bigg|_{z_0} (z - z_0)^n = \\ = f(z_0) + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \right) \bigg|_{z_0} (z - z_0) + \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} \right) \bigg|_{z_0} \frac{(z - z_0)^2}{2} + \ldots \end{aligned}$$

All'interno della regione di analiticità, i valori della funzione $f(z)$ in ogni punto sono quindi completamente determinati dai valori della funzione e delle sue derivate nel punto z_0.

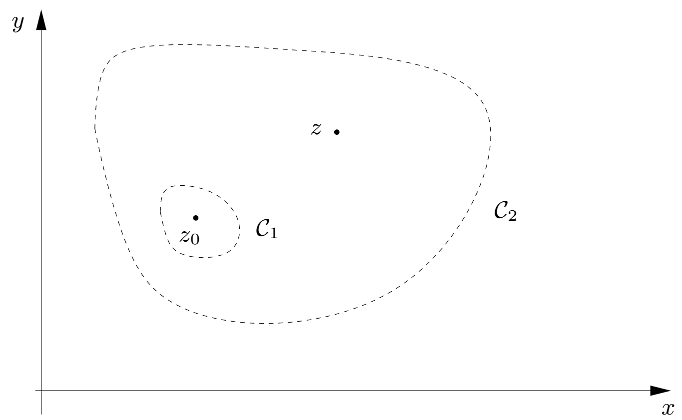

Figura A.5 Espansione in serie di Laurent

Serie di Laurent Con la serie di Taylor, si può espandere una funzione analitica intorno ad un punto regolare giacente in una regione semplicemente connessa. La serie di Laurent permette invece la medesima operazione nel caso in cui la regione sia doppiamente connessa, e si voglia espandere la funzione intorno ad un punto di singolarità che si trova nella regione esclusa. La differenza fra i due tipi di serie consiste quindi essenzialmente nella topologia del dominio di analiticità della funzione.

Consideriamo quindi (figura A.5) la regione compresa fra due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ che contengono entrambe il punto z_0, e supponiamo che la funzione $f(z)$ sia analitica all'interno di tale regione. La serie di Laurent per $f(z)$ è:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

Il coefficiente A_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent si chiama *residuo* della funzione $f(z)$ nel punto di singolarità z_0.

Poli di $f(z)$ A seconda del comportamento della serie di Laurent, è possibile classificare i punti singolari in tre categorie. Quando $A_{-n} = 0$ per ogni n, allora z_0 è un punto regolare, e la serie di Laurent ricade nella serie di Taylor: la funzione $f(z)$ è un polinomio se la serie di Taylor si ferma per n finito, mentre è una funzione trascendente se la serie prosegue sino all'infinito. Quando $A_{-n} = 0$ per $n > N$, si dice che z_0 è un *polo* di ordine N per la funzione $\zeta(z)$. Quando infine i coefficienti A_{-n} sono diversi da zero per ogni n, z_0 si dice un punto di singolarità essenziale.

A.8 Il teorema dei residui

Si consideri una curva chiusa $\mathcal{C}$, ed una funzione $f(z)$ di variabile complessa che sia analitica all'interno di $\mathcal{C}$, eccettuato un unico punto z_0 interno a $\mathcal{C}$. Già sappiamo, grazie al teorema integrale di Cauchy, che l'integrale:

$$\oint_{\mathcal{C}} \zeta(z)\,\mathrm{d}z$$

è nullo per tutti i cammini $\mathcal{C}$ che non contengono z_0 al loro interno, mentre assume lo stesso valore, per ora incognito, per tutti i cammini che lo contengono. Grazie allo sviluppo di Laurent di $f(z)$ intorno al punto singolare z_0, siamo ora in grado di calcolare il valore di tale integrale.

Si consideri infatti una curva $\mathcal{C}_0$ che contenga z_0 al suo interno. La funzione in quanto analitica ammette un'espansione in serie di Laurent intorno al punto z_0, del tipo:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\,(z - z_0)^n$$

e quindi si ottiene:

$$\oint_{\mathcal{C}_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \oint (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi i A_{-1}$$

in quanto tutti gli integrali della sommatoria sono nulli, tranne quello della funzione $(z - z_0)^{-1}$, che vale $2\pi i$ per quanto detto al paragrafo A.5.

Nella sua formulazione generale che considera la presenza di più punti singolari all'interno della regione delimitata da $\mathcal{C}$, il teorema dei residui afferma che l'integrale di una funzione analitica $f(z)$ lungo un contorno $\mathcal{C}$ è uguale a $2\pi i$ volte la somma dei residui della funzione stessa nei punti, interni a $\mathcal{C}$, in cui essa è singolare.

L'utilità di questo fondamentale teorema, che tra l'altro permette il calcolo di alcuni integrali di variabile reale non altrimenti trattabili in maniera semplice, consiste nel fatto che spesso è possibile conoscere il residuo della funzione. Questo accade nel caso di funzione razionale fratta, e di conseguenza nel caso generale, grazie allo sviluppo in serie della funzione di interesse.