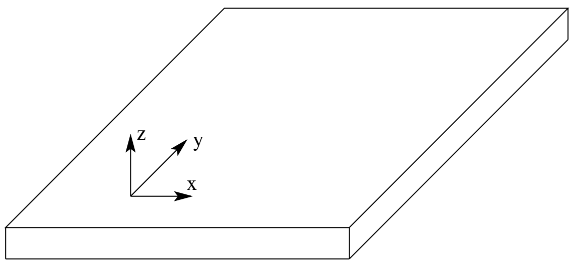
4 ESTENSIONE DEI MODELLI PER ELEMENTI STRUTTURALI

4.1 MODELLI A PIASTRE

Le piastre sono degli elementi strutturali per cui una delle tre dimensioni, lo spessore t, risulta molto minore delle altre due, che invece definiscono il piano caratteristico della piastra. Lo spessore dell'elemento risulta comunque sufficiente a fornire le capacità di sopportare sollecitazioni flessionali significative. In questo caso se gli spostamenti elastici in direzione normale al piano della piastra sono abbastanza piccoli rispetto allo spessore t, i valori degli sforzi normali si annullano in corrispondenza del piano medio della piastra, essendo essi dovuti sostanzialmente alla sola flessione. Se la piastra è molto sottile, e quindi non in grado di resistere significativamente a sollecitazioni flessionali, si ottiene un comportamento che corrisponde a quello di una *membrana*, per cui le gli spostamenti nella direzione normale al piano della piastra sono paragonabili allo spessore t e gli sforzi in corrispondenza del piano medio non sono più nulli. Sono infatti tali sforzi che permettono all'elemento strutturale di equilibrare i carichi applicati attraverso spostamenti trasversali. La rigidezza manifestata dalle membrane è quindi legata alla tensione che in essa si genera, e il problema va quindi trattato in maniera non lineare. Ovviamente un modello completo non lineare di piastra può essere in grado di trattare entrambi i fenomeni in maniera congiunta. Nel modello semplificato che andiamo ora a sviluppare si riterranno poco significative, anche se non nulle, le deformazioni nella direzione perpendicolare al piano caratteristico della piastra. Dal punto di vista energetico tali deformazioni, coniugate allo sforzo trasversale normale, contribuiscono in maniera poco significativa all'energia di deformazione, in considerazione del fatto che per carichi trasversali distribuiti gli sforzi traversali sono abbastanza piccoli. Basti infatti notare che un carico distributo di 1 MPa sarebbe un carico rilevantissimo per la piastra; localmente però essa sarebbe sollecitata a taglio con un carico che non corrisponde neanche all'1% degli sforzi elastici tipici delle comuni leghe leggere a base di alluminio. Data poi l'esiguità dello spessore t, tale carico darà origine a sforzi trasversali altrettanto esigui. Per i casi in cui si sia in presenza di carichi concentrati varranno, ai fini del comportamento globale, considerazioni analoghe a quelle fatte nella teoria delle travi alla De Saint Venant: le soluzioni ottenute con questa teoria varranno oltre una certa distanza di diffusione dal punto di applicazione del carico concentrato. Per la determinazione degli effetti locali non ci si potrà esimere dalla ricerca di soluzioni complete tridimensionali del problema elastico strutturale.

Potremo quindi in generale affermare che lo stato di sforzo nei vari strati della piastra sarà quindi essenzialmente piano. In considerazione della trascurabile incidenza degli sforzi/deformazioni traversali in spessore, si potrà correttamente ritenere lo spessore indeformabile, senza però assumere le relazioni costitutive corrispondenti ad uno stato piano di deformazione.



Il piccolo spessore fa si che le deformazioni dovute alla flessione siano di gran lunga prevalenti rispetto a quelle a taglio che si possono invece trascurare. Anche per questi elementi quindi si può considerare valida l'ipotesi di Kirchhoff o della conservazione delle normali, già utilizzata nel caso delle travi. Tale ipotesi afferma che le sezioni piane normali al piano medio indeformato della piastra, rimangono piane e normali al piano medio anche nella posizione deformata, non è quindi presente ingobbamento dovuto a taglio o torsione.

Introducendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi x e y giacenti nel piano della piastra e z normale a questo, e chiamiamo w lo spostamento verticale. Le ipotesi di comportamento di tipo piastra sopra illustrate ci dicono che i punti del piano medio si muovono solo in direzione normale al piano stesso e gli altri punti subiscono degli spostamenti dovuti alle rotazioni delle sezioni normali al piano medio. Si possono quindi scrivere le seguenti relazioni relative al campo di spostamento tridimensionale nell'intero volume della piastra

$$s_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{4.1a}$$

$$s_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{4.1b}$$

$$s_z = w(x, y). \tag{4.1c}$$

La piastra è soggetta ad uno stato di sforzo piano, per cui $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$ e $\sigma_z = 0$. Passando alle deformazioni, l'ipotesi di Kirchhoff ci dice che gli scorrimenti γ_{xz} e γ_{yz} sono nulli. È facile infatti vedere che, ricordando le relazioni fra spostamenti e deformazioni nel caso di piccoli spostamenti $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(s_{i/k} + s_{k/i}\right)$, le relazioni (4.1) portano a

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{4.2}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{4.3}$$

Le deformazioni in direzione z è trascurabile e non gioca nessun ruolo nella determinazione dell'equilibrio o dell'energia di deformazione, a causa del valore trascurabile dei corrispondenti sforzi σ_z; ε_z è ottenibile a posteriori tenendo conto della legge costitutiva tridimensionale. Si può quindi verificare che per le piastre varranno le seguenti relazioni

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{4.5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{4.6}$$

Per comodità si possono definire i seguenti vettori di sforzo e deformazione

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \; -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \; -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T, \tag{4.7}$$

$$\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \; \varepsilon_y \; \gamma_{xy}\}^T = z\underline{\hat{\varepsilon}}, \tag{4.8}$$

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_x \; \sigma_y \; \tau_{xy}\}^T. \tag{4.9}$$

Nel caso generale di una legge costitutiva ortotropa scriveremo che

$$\sigma_x = E_x\varepsilon_x + E_{xy}\varepsilon_y, \tag{4.10}$$

$$\sigma_y = E_{xy}\varepsilon_x + E_y\varepsilon_y, \tag{4.11}$$

$$\tau_{xy} = G_{xy}\gamma_{xy}, \tag{4.12}$$

che in forma matriciale corrisponde a scrivere

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} E_x & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\varepsilon}. \tag{4.13}$$

Nel caso particolare di un materiale isotropo si ricorda che $E_x = E_y = E/(1-\nu^2)$, $E_{xy} = \nu E_x$ e $G_{xy} = \frac{1}{2}E/(1+\nu)$, e quindi

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\varepsilon}. \tag{4.14}$$

Casi più generali di legami costitutivi che accoppiano tutti i termini dei vettori di sforzo e di deformazione si possono ottenere nel caso di piastre formate da vari strati di materiale composito diversamente orientato.

Definiti i vettori di sforzo e di deformazione e il loro legame, è ora possibile scrivere il termine legato all'energia elastica del Principio dei Lavori Virtuali nella solita forma tridimensionale dell'equazione linearizzata (2.16)da cui poi ricavare la corrispondente espressione bidimensionale per le piastre, in funzione delle deformazioni su definite $\underline{\varepsilon}$

$$\int_v \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\, dv = \int_v \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\varepsilon} dv = \int_a \delta\hat{\underline{\varepsilon}}^T \left(\int_t z^2 \underline{\underline{D}}\, dz \right) \hat{\underline{\varepsilon}}\, da = \int_a \delta\hat{\underline{\varepsilon}}^T \widehat{\underline{\underline{D}}}\, \hat{\underline{\varepsilon}} da. \tag{4.15}$$

Nel caso di un materiale generico la matrice di flessibilità $\widehat{\underline{\underline{D}}}$ sarà quindi semplicemente pari a

$$\widehat{\underline{\underline{D}}} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \underline{\underline{D}}\, dz, \tag{4.16}$$

mentre per un materiale omogeneo e isotropo si ottiene

$$\widehat{\underline{\underline{D}}} = \frac{t^3}{12} \underline{\underline{D}}. \tag{4.17}$$

Avendo definito le deformazioni generalizzate $\underline{\varepsilon}$ della piastra alla Kirchhoff come associate alle curvature ($\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$) e alla torsione ($\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$), risulta ora utile determinare quali sono i corrispondenti sforzi generalizzati, cioè quelli coniugati alle deformazioni generalizzate in termini energetici, e quindi ottenibili applicando la $\widehat{\underline{\underline{D}}}$ al vettore $\hat{\underline{\varepsilon}}$. Per capirlo riscriviamo il P.L.V. senza utilizzare da subito la relazione costitutiva

$$\int_v \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\, dv = \int_v \delta \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} z\underline{\sigma}\, dv = \int_a \delta\hat{\underline{\varepsilon}}^T \left(\int_t z\underline{\sigma} dz \right) da. \tag{4.18}$$

Integrando il vettore degli sforzi per la distanza dal piano medio lungo lo spessore si ottengono i momenti per unità di lunghezza, o flussi di momento

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \widehat{\underline{M}}. \tag{4.19}$$

M_x ed M_y sono flussi di momento flettente mentre M_{xy} è un flusso di momento torcente. Uguagliando le due espressioni ottenute dalla (4.15) e dalla (4.18) si ha

$$\widehat{\underline{M}} = \widehat{\underline{\underline{D}}}\, \hat{\underline{\varepsilon}}, \tag{4.20}$$

che per un materiale omogeneo e isotropo diviene

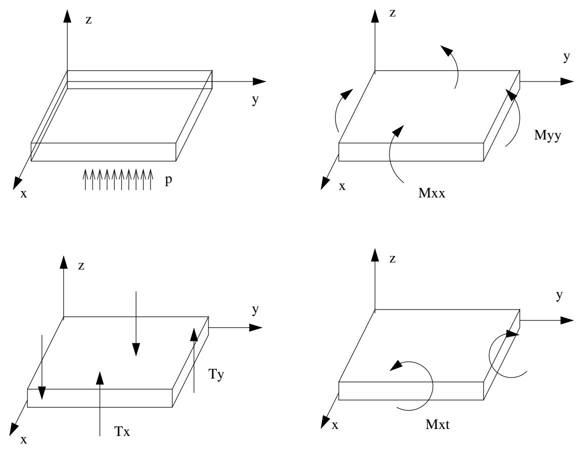
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{4.21}$$

Come nel caso delle travi con l'ipotesi di Kirchhoff anche in questo caso è possibile recuperare le azioni di taglio per unità di lunghezza dalle relazioni di equilibrio. Se consideriamo un elemento di piastra di dimensioni dx, dy l'equilibrio alla rotazione intorno ad una sezione normale ad x dice che

$$T_x dxdy = \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dx, \tag{4.22}$$

da cui si ottiene

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \tag{4.23}$$



Analogamente, scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno ad una sezione normale all'asse y si ottiene

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \tag{4.24}$$

Conseguentemente, sulle sezioni normali agli assi x e y ci saranno degli sforzi taglio i cui integrali lungo lo spessore saranno pari a tali azioni.