Isaac Newton

Sulla Quadratura delle Curve

Introduzione[1]

[1] *De Quadratura Curvarum. Introductio.*

Traduzione dal latino di Federico Lastaria, dal manoscritto della *Cambridge Digital University*: http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03962/1.

La presente versione tiene conto della traduzione di parte del *Tractatus de Quadratura Curvarum*, a cura di Ettore Carruccio, in appendice a:

Guido Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Zanichelli, 1938. Ristampa: Feltrinelli, 1962.

I manoscritti del *Tractatus De Quadratura Curvarum* (Cambridge University Library) risalgono al 1691-1692. Ma, come Newton stesso dichiara nell'introduzione, le idee fondamentali del *Metodo delle Flussioni* (incluso il legame tra derivate e integrali, ovvero il teorema fondamentale del calcolo differenziale e integrale) risalgono agli anni 1665, 1666, quando Newton (nato il giorno di Natale del 1642 del calendario giuliano, corrispondente al 4 gennaio 1643 del calendario gregoriano) aveva circa 23 anni.

La prima edizione a stampa è nel trattato di Newton: *Opticks: or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two Treatises of the Species and Magnitudes of Curvilinear Figures*, Londra, 1704, pagg.165-211. (L'altro trattato sulle figure curvilinee – oltre al *De Quadratura Curvarum* – di cui si fa cenno nel titolo di *Opticks*, è una *Enumeratio linearum tertii ordinis*).

Alcune parti del *De Quadratura Curvarum* furono comunicate a John Wallis, che le incluse nel volume secondo (1693) della sua *Opera Mathematica*, 3 volumi, Oxford, 1693–1699.

Il trattato *De Quadratura Curvarum* verrà ristampato in *Opuscola Mathematica, Philosophica et Philologica*, Lausanne et Gèneve, 1744, vol. I, pag 203.

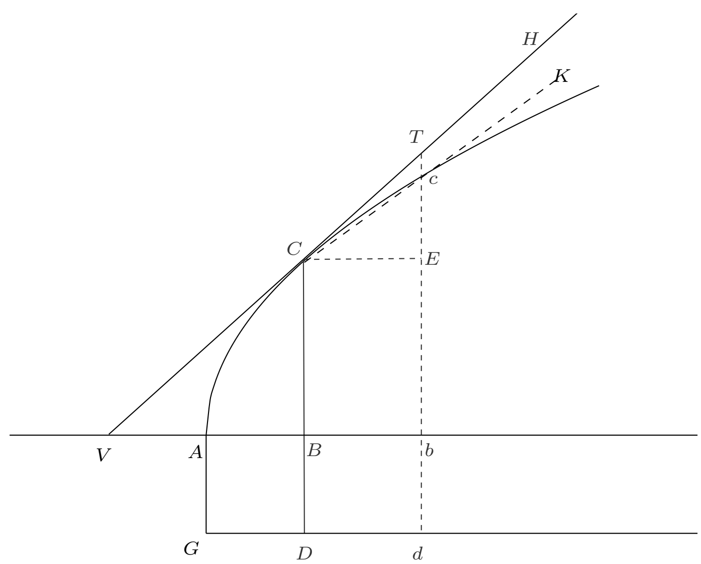
Newton formula i principi del calcolo infinitesimale passando attraverso tre fasi. La prima fase è la redazione del *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (*Analisi per mezzo di equazioni con un numero infinito di termini*, manoscritto del 1669, pubblicato però solo nel 1711), che contiene, tra l'altro, la serie esponenziale, la serie logaritmica, le serie delle funzioni goniometriche e delle loro inverse. La seconda redazione è nel *Methodus Fluxionum et serierum infinitarum* (*Metodo delle flussioni e delle serie infinite*; manoscritto del 1671, pubblicato nel 1736) in cui si introducono le fluenti, le flussioni e i momenti delle fluenti, "gli incrementi infinitesimi di cui queste quantità aumentano in intervalli infinitesimi di tempo". La terza redazione è infine la presente del *De Quadratura Curvarum* (*Sulla Quadratura delle curve*, manoscritto del 1691-92, pubblicato nel 1704), in cui si trova il metodo geometrico delle prime e delle ultime ragioni. Questo stile geometrico sarà utilizzato da Newton nella redazione dei *Philosopiae Naturalis Principia Mathematica* (*Principi matematici della filosofia naturale*), la prima opera pubblicata da Newton (nel 1687). (N.d.T.)

Considero qui le quantità matematiche, non come costituite da parti che siano quanto più possibile piccole, ma come descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e sono generate dalla descrizione, non per aggiunta di parti, ma per moto continuo di punti, le superfici per moto di linee, i solidi per moto di superfici, gli angoli per rotazioni dei lati, i tempi per flusso continuo, e così via in altri casi. Queste genesi hanno veramente luogo in natura e si osservano ogni giorno nel moto dei corpi. E in questo modo gli Antichi hanno insegnato la genesi dei rettangoli, come generati da segmenti mobili che scorrono trasversalmente lungo segmenti fissi.

Considerando dunque che le quantità, che in tempi uguali crescono e da questa crescita sono generate, risultano alla fine più o meno grandi a seconda della velocità maggiore o minore con la quale crescono e sono generate, ho cercato di determinare le quantità a partire dalle velocità dei moti o degli incrementi con i quali sono generate; chiamando queste velocità dei moti o degli incrementi *Flussioni*[2] e chiamando *Fluenti* le quantità generate, arrivai poco per volta negli anni 1665 e 1666 al *Metodo delle Flussioni* del quale qui faccio uso nella *Quadratura delle Curve*.[3]

Le flussioni approssimano quanto si vuole gli incrementi delle fluenti, generati da uguali intervalli di tempo il più possibile piccoli; per esprimersi in modo preciso, sono direttamente proporzionali agli incrementi istantanei; possono dunque essere rappresentate per mezzo di linee qualunque che siano ad essi proporzionali.

Così, se le aree ABC, $ABDG$ sono descritte dalle ordinate BC, BD che avanzano con moto uniforme sulla base AB, le flussioni delle loro aree saranno tra loro in rapporto come le ordinate che descrivono BC e BD, e possono essere rappresentate per mezzo di quelle ordinate, perché quelle ordinate stanno tra loro come gli incrementi nascenti delle aree. [4]



L'ordinata BC avanzi dalla sua posizione BC in una qualsiasi nuova posizione bc. Si

[2]Dunque le *flussioni*, 'velocità dei moti o degli incrementi' sono le derivate; le *fluenti* sono le grandezze geometriche generate da un moto continuo.

[3]Newton denota con x una grandezza fluente, con $\dot{x}$ la sua flussione e con o un intervallo infinitamente piccolo di tempo. Allora $\dot{x}o$ (velocità istantanea per tempo infinitesimo), detto il *momento* della fluente x, è l'incremento infinitesimale della fluente nell'intervallo infinitamente piccolo di tempo o.

[4]Qui si ritrova una formulazione del teorema fondamentale del calcolo infinitesimale. In linguaggio moderno, la derivata della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è la funzione integranda $f(x)$.

completi il parallelogramma $BCEb$ e si conduca la retta VTH che sia tangente alla curva in C e che, prolungati gli stessi bc e BA, li incontri in T e V. E gli incrementi dell'ascissa AB, dell'ordinata BC e della linea curva ACc generati in questo modo saranno Bb, Ec e Cc; e direttamente proporzionali[5] a questi incrementi nascenti sono i lati del triangolo CET; e pertanto le flussioni delle stesse AB, BC e AC stanno tra loro come i lati di quel triangolo CE, ET e CT e possono essere rappresentati per mezzo di quegli stessi lati o, il che è lo stesso, per mezzo dei lati del triangolo simile VBC.

Si ricade nello stesso punto se si cercano le flussioni nel rapporto ultimo di quantità evanescenti[6]. Si conduca la retta Cc e la si prolunghi fino a K. L'ordinata bc ritorni nella sua posizione precedente BC, e andando a coincidere i punti C e c, la retta CK coincide con la tangente CH, e il triangolo evanescente CEc nella sua ultima forma perviene al triangolo simile CET, e i suoi lati evanescenti CE, Ec e Cc staranno in ultimo tra di loro come i lati CE, ET e CT dell'altro triangolo CET, e pertanto in tale rapporto sono le flussioni delle linee AB, BC e AC. Se i punti C e c distano l'uno dall'altro di un intervallo piccolo quanto si vuole, la retta CK disterà dalla tangente CH di un piccolo intervallo. Affinché la retta CK coincida con la tangente CH e si trovino le ultime ragioni delle linee CE, Ec e Cc, i punti C e c devono andare a sovrapporsi e coincidere del tutto. Gli errori, anche minimi, nelle questioni matematiche non devono essere disprezzati.

Con un ragionamento simile, se un cerchio di centro B e raggio BC, descritto lungo la direzione dell'ascissa AB ad angoli retti[7], si muove con moto uniforme, la flussione del solido generato ABC sarà proporzionale al cerchio stesso generatore, e la flussione della sua superficie sarà proporzionale congiuntamente al perimetro di quel circolo e alla flussione della linea curva AC. [8]

Infatti, nel tempo in cui il solido ABC è generato muovendo quel circolo lungo la direzione dell'ascissa AB, la sua stessa superficie è generata muovendo il perimetro di quel cerchio lungo la curva AC.

[Di questo metodo, si prendano in considerazione anche gli esempi seguenti.][9]

[5]Latino: *in ratione prima*.

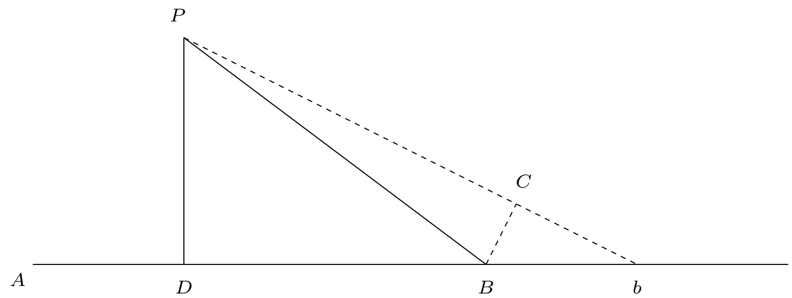
[6]Il '*rapporto ultimo*' o le '*ultime ragioni*' (latino: *ratio*, rapporto) di quantità evanescenti sono (nel linguaggio odierno) limiti di rapporti di quantità che tendono entrambe a zero.

[7]Il centro del cerchio si muove sulla retta AB e il piano del cerchio resta sempre perpendicolare a tale retta. (N.d.T.)

[8]Interpretiamo nel modo seguente. Il raggio $r = BC$ del cerchio di base è dato da $r = a\sin\alpha$, dove $a = AC$ è l'apotema e α è l'angolo (costante) che l'apotema forma con l'asse del cono circolare retto. La superficie totale del cono è allora $\pi r^2 + \pi a^2 \sin\alpha = \pi a^2 \sin\alpha(\sin\alpha + 1)$, la cui derivata $2\pi a\, a' \sin\alpha(\sin\alpha + 1) = 2\pi r\, a'(\sin\alpha + 1)$ è proporzionale sia alla lunghezza della circonferenza $2\pi r$ sia alla derivata a' dell'apotema. (N.d.T.)

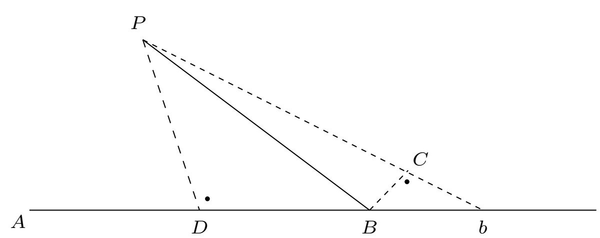
[9]La frase: "*Di questo metodo, si prendano in considerazione anche gli esempi seguenti*" ("*Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur*") è stata aggiunta nella versione del *De Quadratura Curvarum* che compare in *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumereratione Linearum Tertii Ordinis*, curata e pubblicata da William Jones nel 1711 a Londra.

La retta PB, ruotando attorno al dato polo P, tagli un'altra data retta AB, di posizione assegnata: si chiede il rapporto tra le flussioni di quelle due rette AB e PB.



La retta PB si sposti in avanti dalla sua posizione PB alla nuova posizione Pb. Su Pb si prenda PC uguale a PB, e si mandi PD verso AB, in modo tale che l'angolo bPD sia uguale all'angolo bBC; e a causa della similitudine dei triangoli bBC, bPD, l'incremento Bb starà a Cb come Pb a Db. Ora Pb torni al suo posto precedente PB, in modo che quegli incrementi svaniscano, e il rapporto ultimo degli evanescenti, cioè il rapporto ultimo Pb a Db, sarà lo stesso che c'è tra PB e DB, l'angolo PDB essendo allora retto[10], e quindi in quello stesso rapporto[11] è la flussione dello stesso AB alla flussione dello stesso PB.

[10]Se si conduce la retta PD in modo tale che l'angolo bPD sia uguale all'angolo bBC, anche gli angoli bCB e PDB risultano uguali tra loro. Quando la retta Pb 'torna alla sua posizione precedente' PB, poiché PB è uguale a PC l'angolo bCB diventerà retto (una corda molto piccola di una circonferenza è ortogonale al raggio) e quindi anche l'angolo PDB diventerà retto. Detto altrimenti, l'ultimo rapporto degli incrementi infinitesimali evanescenti Bb/Cb (cioè il rapporto tra le flussioni di AB e PB) coincide con il rapporto delle linee finite PB/DB, quando PD è ortogonale alla retta AB.



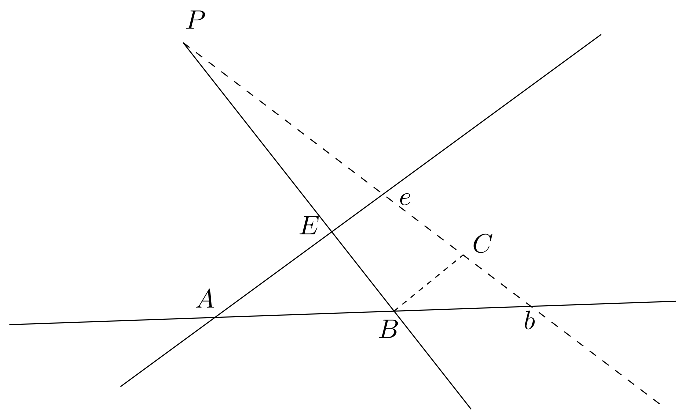
Lo studio del triangolo infinitesimale ("evanescente") BbC è così effettuato mettendo "davanti agli occhi" il triangolo finito DBP:

"Infatti le flussioni sono quantità finite e vere, e di conseguenza devono avere i loro propri simboli; e ogni volta che lo si può fare in modo agevole, è meglio mostrarle davanti agli occhi per mezzo di linee finite, piuttosto che infinitamente piccole.".

(*"Nam fluxiones sunt quantitates finitae et verae ideoque symbola sua habere debent, et quoties commode fieri potest praestat ipsas per lineas finitas coram oculis exponere quam per infinite parvas."*. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Edited by D. T. Whiteside, vol. 8, p. 123.). (Citato in: Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton. On Mathematical Certainty and Method*, The MIT Press, 2009, p.226.) (N.d.T.)

[11]Dunque il rapporto tra la flussione di AB e la flussione di PB è $1/\sin\vartheta$, dove ϑ è l'angolo tra la semiretta PB e la semiretta PD, ortogonale alla retta AB. (N.d.T.)

La retta PB, ruotando attorno al dato polo P, tagli due altre date rette, di posizione assegnata, AB e AE in B e E: si chiede il rapporto tra le flussioni di quelle rette AB e AE.



La retta ruotante PB si muova dalla sua posizione PB verso una nuova posizione Pb, tagliando le rette AB e AE nei punti b, e; e si conduca BC parallela a AE, che incontri Pb in C; e Bb starà a BC come Ab a Ae, e BC a Ee come PB a PE; e, messi insieme i rapporti[12], Bb sta a Ee come $Ab \times PB$ a $Ae \times PE$. Ora la retta Pb ritorni alla sua posizione precedente PB, e l'incremento evanescente Bb starà all'incremento evanescente Ee come $AB \times PB$ a $AE \times PE$, e pertanto è in questo rapporto che sta la flussione della retta AB alla flussione della retta AE. Di qui segue che qualora la retta ruotante PB tagli due qualsiasi curve di posizione assegnata nei punti B e E, e le rette mobili AB, AE siano tangenti a quelle curve nei punti di intersezione B e E, la flussione della curva alla quale la retta AB è tangente sta alla flussione della curva alla quale la retta AE è tangente come $AB \times PB$ a $AE \times PE$. E questo accadrà anche quando la retta PB è sempre tangente a una qualche curva di posizione assegnata in un punto mobile P.

[12]Dalle due proporzioni

$$Bb : BC = Ab : Ae \qquad BC : Ee = PB : PE$$

segue, moltiplicando membro a membro (messi insieme i rapporti; latino: *conjunctis rationibus*),

$$Bb : Ee = (Ab \times PB) : (Ae \times PE)$$

(N.d.T.)

La quantità x fluisca in modo uniforme e si debba trovare la flussione della quantità x^n.

Nel tempo in cui la quantità x fluendo va in $x+o$, la quantità x^n va a finire in $(x+o)^n$, cioè, per il metodo delle serie infinite, in

$$x^n + n\,o\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,o^2\,x^{n-2} + \quad \text{etc.} \tag{0.1}$$

E gli incrementi o e $n\,o\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,o^2\,x^{n-2} +$ etc. stanno tra loro come 1 e $n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,o\,x^{n-2} +$ etc. e la loro ragione ultima sarà 1 a $n\,x^{n-1}$.

Con ragionamenti simili, per mezzo del metodo delle ragioni prime e ultime, si possono ottenere, in casi qualsiasi, le flussioni di linee sia rette sia curve, come pure le flussioni di superfici, di angoli e di altre quantità.

Fondare l'Analisi in questo modo sulle quantità finite, e investigare le ragioni prime e ultime di quantità finite nascenti o evanescenti è in sintonia con la Geometria degli Antichi: e ho voluto mostrare come nel *Metodo delle Flussioni* non sia necessario introdurre in Geometria figure infinitamente piccole.

[Pertanto l'Analisi si può portare avanti su figure di tipo qualsiasi, sia quelle finite, sia quelle infinitamente piccole che sono pensate simili a figure evanescenti, in modo da procedere, per quanto con cautela, sulle figure che si considerano di solito infinitamente piccole nel Metodo degli Indivisibili.][13]

Dalle flussioni trovare le fluenti, è un problema più difficile, e il primo passo della soluzione è equivalente alla Quadratura delle Curve; argomento del quale già da tempo ho scritto le cose che seguono.

Bibliografia

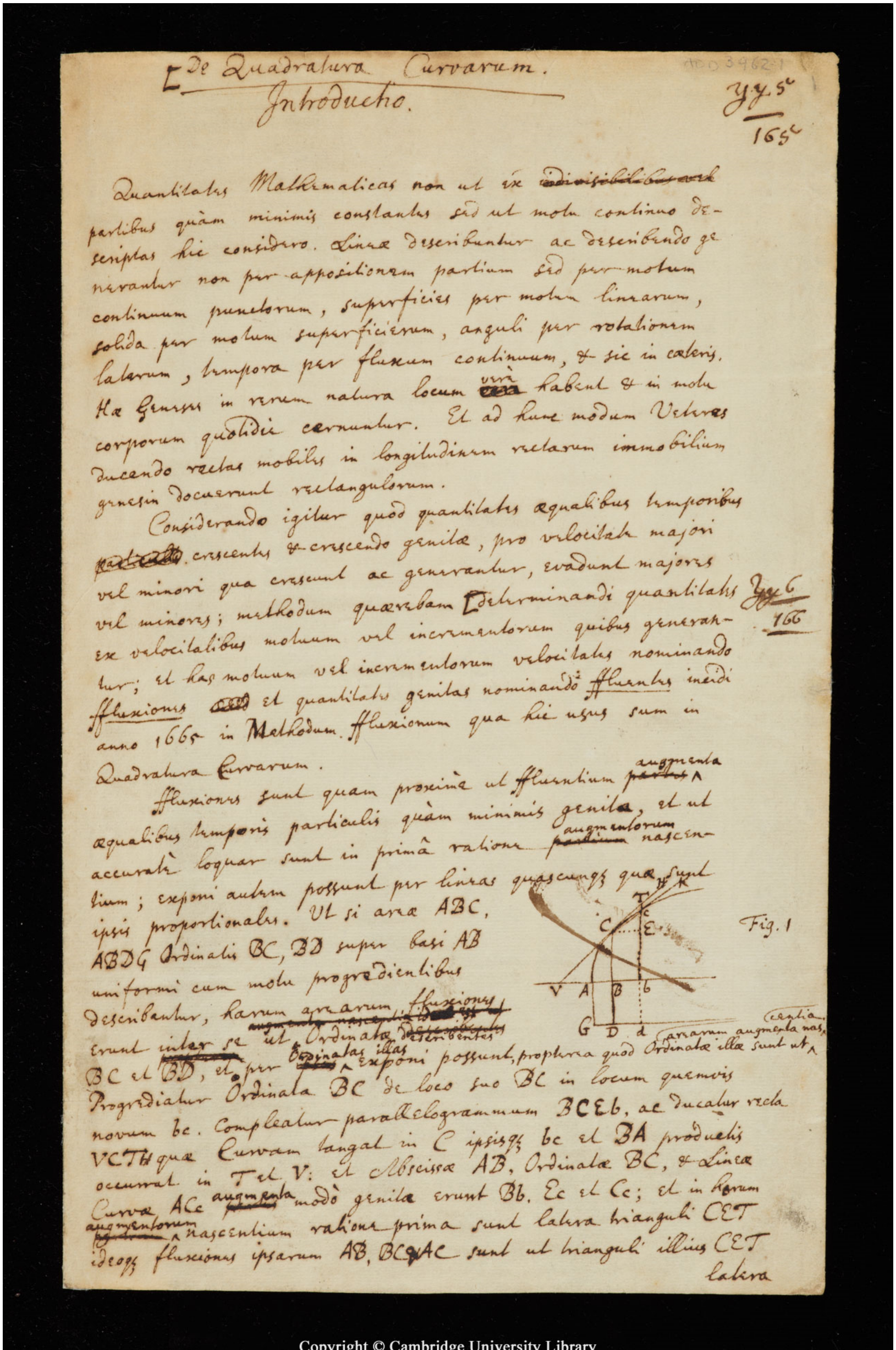
Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, The MIT Press Cambridge (Massachusetts), London, 2009.

Riferimenti in rete

Per i manoscritti di Newton:

http://cudl.lib.cam.ac.uk/collections/newton

[13]Quest'ultima frase, riportata tra parentesi quadre, non compare nei manoscritti autografi di Newton (Cambridge University Library). Si legge invece (a eccezione del richiamo al: *'Metodo degli Indivisibili'*) nella *Introductio* al *Tractatus de Quadratura Curvarum* (scritto in latino) posto come appendice al trattato di Newton: *Opticks*, Londra, 1704. La stessa frase, con l'aggiunta di *'per Methodos Indivisibilium'*, si legge invece nell'edizione di *Opticks* curata da William Jones (Londra, 1711). (N.d.T.)



De Quadratura Curvarum.
Introductio.

Yy.5c
165c

Quantitates Mathematicas non ut ex ~~indivisibilibus~~ partibus quàm minimis constantes sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineæ describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris. Hæ Geneses in rerum natura locum vere habent & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium genesin docuerunt rectangulorum.

Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus ~~[illegible]~~ crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; et has motuum vel incrementorum velocitates nominando fluxiones ~~[illegible]~~ et quantitates genitas nominando fluentes incidi anno 1665 in Methodum fluxionum qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.

Yy.6
166

Fluxiones sunt quam proxime ut fluentium ~~partes~~ augmenta æqualibus temporis particulis quàm minimis genita, et ut accurate loquar sunt in prima ratione ~~partium~~ augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quascunque quæ sunt ipsis proportionales. Ut si area ABC, ABDG Ordinatis BC, BD super basi AB uniformi cum motu progredientibus describantur, harum arearum fluxiones erunt inter se ut Ordinatæ describentes BC et BD, et per Ordinatas illas exponi possunt, propterea quod Ordinatæ illæ sunt ut arearum augmenta nascentia. Progrediatur Ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum bc. Compleatur parallelogrammum BCEb, ac ducatur recta VCTH quæ Curvam tangat in C ipsisque bc et BA productis occurrat in T et V: et Abscissæ AB, Ordinatæ BC, & Lineæ Curvæ ACc augmenta modò genita erunt Bb, Ec et Cc; et in horum augmentorum nascentium ratione prima sunt latera trianguli CET ideoque fluxiones ipsarum AB, BC et AC sunt ut trianguli illius CET latera

Fig. 1

Figura 1: Isaac Newton, *De Curvatura Curvarum*, pag.1.

2

latera CE, ET & CT et per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est per latera trianguli con similis VBC.

Eodem recidit si sumantur fluxiones in ultima ratione partium evanescentium. Agatur recta Cc et producatur eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum suum priorem BC, et coeuntibus punctis C et c, recta CK coincidat cum tangente CH, et triangulum evanescens CEc in ultima sua forma evadet simile triangulo CET, et ejus latera evanescentia CE, Ec et Cc erunt ultimò inter se ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET et CT, & propterea in hac ratione sunt fluxiones linearum AB, BC et AC. Si puncta C & c parvo quovis intervallo ab invicem distant recta CK parvo intervallo a tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat et rationes ultimæ linearum CE Ec et Cc inveniantur, debent puncta C & c coire et omninò coincidere. Errores quàm minimi in rebus ~~mathe~~ mathematicis non sunt contemnendi.

Yy7
167

Simili argumento si circulus centro B radio BC descriptus in longitudinem Abscissæ AB ad angulos rectos ~~[illegible]~~ uniformi cum motu ducatur, fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, et fluxio superficiei ejus erit ut perimeter Circuli illius et fluxio lineæ curvæ AC conjunctim. Nam quo tempore solidum ABC generatur ducendo circulum illum in longitudinem Abscissæ AB, eodem superficies ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem Curvæ AC.

Recta PB circa polum datum P revolvens secet ~~rectam~~ aliam positione datam AB: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB et PB. Progrediatur recta PB de loco suo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, et ad AB ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis sit angulo bBC; et ob similitudinem triangulorum bBC, bPD erit ~~[illegible]~~ augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB ut ~~[illegible]~~ augmenta illa evanescant, et evanescentium ratio ultima, id est ratio ultima Pb ad Db ea erit quæ est PB ad DB existente angulo PDB recto, et propterea in hac ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.

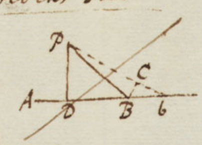


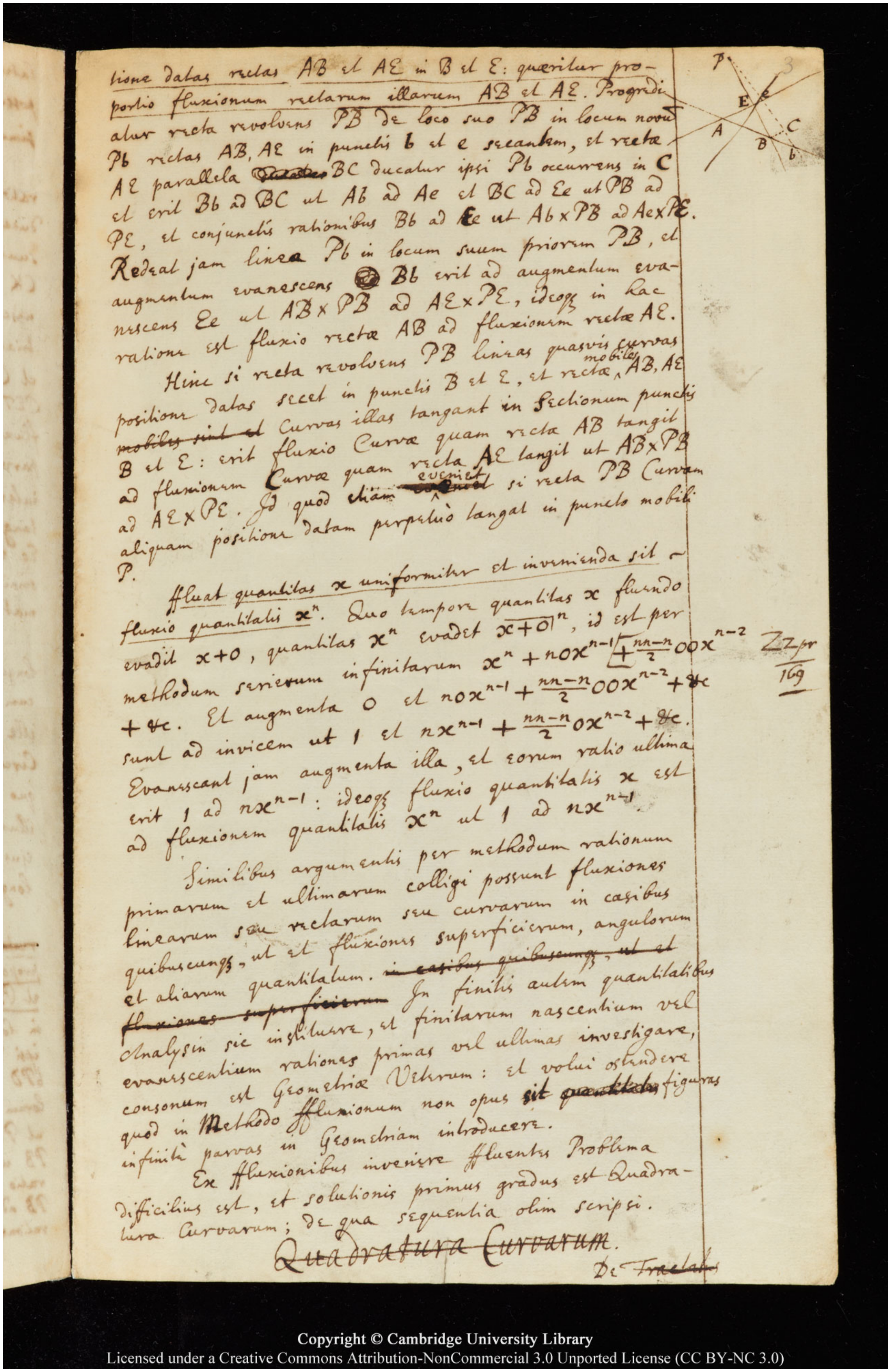
Fig. 2

Yy09
1609

Recta PB circa datum Polum P revolvens secet alias duas positione

Fig. 3

Figura 2: Isaac Newton, *De Curvatura Curvarum*, pag.2.



3

tione datas rectas AB et AE in B et E: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB et AE. Progrediatur recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b et e secantem, et rectæ AE parallela ~~[illegible]~~ BC ducatur ipsi Pb occurrens in C et erit Bb ad BC ut Ab ad Ae et BC ad Ee ut PB ad PE, et conjunctis rationibus Bb ad Ee ut $Ab \times PB$ ad $Ae \times PE$. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB, et augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.

Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis curvas positione datas secet in punctis B et E, et rectæ mobiles AB, AE ~~mobiles sint et~~ Curvas illas tangant in sectionum punctis B et E: erit fluxio Curvæ quam recta AB tangit ad fluxionem Curvæ quam recta AE tangit ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam ~~[illegible]~~ eveniet si recta PB Curvam aliquam positione datam perpetuò tangat in puncto mobili P.

Fluat quantitas x uniformiter et invenienda sit fluxio quantitatis x^n. Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x+o$, quantitas x^n evadet $\overline{x+o}|^n$, id est per methodum serierum infinitarum $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ Et augmenta o et $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ sunt ad invicem ut 1 et $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \&c.$ Evanescant jam augmenta illa, et eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitatis x^n ut 1 ad nx^{n-1}. Zz pr 169

Similibus argumentis per methodum rationum primarum et ultimarum colligi possunt fluxiones linearum seu rectarum seu curvarum in casibus quibuscunque, ut et fluxiones superficierum, angulorum et aliarum quantitatum. ~~in casibus quibuscunque, ut et fluxiones superficierum~~ In finitis autem quantitatibus Analysin sic instituere, et finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est Geometriæ Veterum: et volui ostendere quod in Methodo fluxionum non opus sit ~~quantitates~~ figuras infinitè parvas in Geometriam introducere.

Ex fluxionibus invenire fluentes Problema difficilius est, et solutionis primus gradus est Quadratura Curvarum; de qua sequentia olim scripsi.

~~Quadratura Curvarum~~.

De ~~Tractatus~~

Figura 3: Isaac Newton, *De Curvatura Curvarum*, pag.3.