Curve nel piano affine euclideo e nello spazio affine euclideo

13 Dicembre 2018

Curve parametrizzate regolari e biregolari.

Definizione

Una curva $I \xrightarrow{\underline{\alpha}} \mathbb{R}^3, \quad \underline{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$ *, con dominio un intervallo aperto* $I \subset \mathbb{R}$*, si dice*

- *regolare – ed è anche chiamata una immersione di* I *in* $\mathbb{R}^3$ *– se è di classe almeno* C^1 *e se, per ogni* t *in* I*, il vettore tangente (o vettore velocità istantanea) non è nullo:*

$$\underline{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0$$

- *biregolare se è di classe almeno* C^2 *e i vettori* $\underline{\alpha}'(t)$, $\underline{\alpha}''(t)$ *sono linearmente indipendenti (non sono uno multiplo dell'altro) per ogni* t *in* I*;*
- *semplice se* $\underline{\alpha}$ *è iniettiva (non si auto-interseca).*

Alcune grandezze scalari e vettoriali associate a una curva

1. $\underline{\alpha}'(t) =$ vettore tangente $=$ vettore velocità istantanea.
2. $|\underline{\alpha}'(t)| =$ modulo del vettore tangente $= v(t) =$ velocità scalare istantanea.
3. (Funzione lunghezza d'arco, a partire da $t_0 \in I$.) $I \xrightarrow{s} \mathbb{R}^3$,
   $$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\underline{\alpha}'(u)|\, du =$$
   lunghezza d'arco (spazio percorso) da t_0 a t.
4. $s'(t) = |\underline{\alpha}'(t)| = v(t) =$ velocità scalare istantanea.
5. $\underline{\alpha}''(t) =$ vettore accelerazione.

Parametrizzazione alla lunghezza d'arco

Definizione

Si dice che la curva $J \xrightarrow{\underline{\alpha}} \mathbb{R}^3$, s *è parametrizzata con velocità unitaria, o alla lunghezza d'arco, se, per ogni* t *in* I,

$$|\underline{\alpha}'(s)| = 1 \tag{1}$$

Significato di (1): Fissato $s_0 \in J$, la lunghezza (con segno) dell'arco da $\underline{\alpha}(s_0)$ a $\underline{\alpha}(s)$ è uguale a: $\displaystyle\int_{s_0}^{s} |\underline{\alpha}'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} 1\, du = s - s_0$

Teorema

Ogni curva regolare si può parametrizzare alla lunghezza d'arco, cioè con velocità unitaria.

Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto \underline{\alpha}(t)$, una curva regolare. Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo la funzione lunghezza d'arco $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\underline{\alpha}'(\tau)|\, d\tau$.

Chiamiamo $J = s(I)$ l'immagine della funzione s. Poiché $s'(t) = |\underline{\alpha}'(t)| > 0$ (per ogni $t \in I$) la funzione $I \xrightarrow{s} J$ è invertibile. La derivata della funzione inversa $J \xrightarrow{s^{-1}} I$, che denoteremo $t = t(s)$, è data da

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{1}{|\underline{\alpha}'(t(s))|}$$

Allora la curva data dall'applicazione composta $\underline{\alpha} \circ s^{-1}$

$$J \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad\qquad s \longmapsto \underline{\alpha}(t(s))$$

è parametrizzata alla lunghezza d'arco. Infatti:

$$\left|\frac{d}{ds}\underline{\alpha}(t(s))\right| = \left|\frac{d}{dt}\,[\underline{\alpha}(t)]_{t=t(s)}\ \frac{dt}{ds}\right| = |\underline{\alpha}'(t(s))|\ \frac{1}{|\underline{\alpha}'(t(s))|} = 1$$

$\square$

Vettore tangente unitario $\mathbf{T}$

Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, $s \longmapsto \underline{\alpha}(s)$ sia una curva in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata con velocità unitaria.

Definizione (Vettore tangente $\mathbf{T}$)

Il vettore tangente $\mathbf{T}$ alla curva $\underline{\alpha}$, parametrizzata alla lunghezza d'arco, in s è il vettore (unitario, cioè di lunghezza 1)

$$\mathbf{T}(s) = \underline{\alpha}'(s)$$

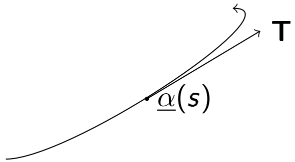


Figura : Fissata una parametrizzazione alla lunghezza d'arco, il vettore tangente $\mathbf{T}$ è il vettore unitario $\mathbf{T}(s) = \underline{\alpha}'(s)$.

Curvatura. Prima definizione.

Definizione (Curvatura. Prima definizione.)

La curvatura di $I \xrightarrow{\underline{\alpha}} \mathbb{R}^3$, $s \longmapsto \underline{\alpha}(s)$, *parametrizzata alla lunghezza d'arco, in* $s \in I$ *è il modulo del vettore accelerazione:*

$$k(s) = \left|\mathbf{T}'(s)\right| = \left|\underline{\alpha}''(s)\right| \qquad (2)$$

Esempio. Per una retta, $\underline{\alpha}(s) = \mathbf{u}s + \mathbf{b}$, $(s \in \mathbb{R}, \ |\mathbf{u}| = 1)$, il vettore tangente $\mathbf{T} = \mathbf{u}$ è costante. Allora $\mathbf{T}'(s)$ è nullo e quindi la curvatura è zero in ogni punto.

Un Lemma

Lemma

Se la lunghezza di un vettore $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$ è costante (al variare di t in un intervallo I di $\mathbb{R}$), allora il vettore derivato $\mathbf{v}'(t)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(t)$.

Poiché $|\mathbf{v}(t)|^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ è costante, la sua derivata è nulla:

$$0 = (\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ne segue che $\mathbf{v}'(t)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(t)$. $\square$

Il vettore normale $\mathbf{N}$

Definizione (Il vettore normale $\mathbf{N}$)

Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizzata alla lunghezza d'arco e sia* $s \in I$ *un valore del parametro per il quale si abbia* $\mathbf{T}'(s) \neq 0$. *Allora il vettore normale* $\mathbf{N} = \mathbf{N}(s)$ *in* s *è il vettore unitario determinato in modo unico dall'uguaglianza*

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\,\mathbf{N}(s) \tag{3}$$

dove $k(s) = \left|\mathbf{T}'(s)\right| > 0$ *è la curvatura in* s.

Dunque

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{\mathbf{T}'(s)}{k(s)} \tag{4}$$

(Negli eventuali punti in cui $k(s) = \left|\mathbf{T}'(s)\right| = 0$, il vettore normale non è definito.)

Il vettore $\mathbf{N}$

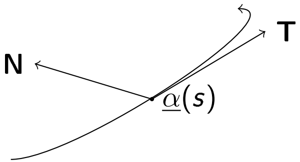


Figura : Per una curva $\underline{\alpha}(s)$ parametrizzata alla lunghezza d'arco, nell'ipotesi che la curvatura $k(s) = |\mathbf{T}'(s)|$ sia diversa da zero, il vettore normale $\mathbf{N}$ è definito come il normalizzato del vettore $\mathbf{T}'(s)$. Poiché $\mathbf{T}$ ha lunghezza costante ($|\mathbf{T}| = 1$), $\mathbf{T}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{T}$ e quindi anche $\mathbf{N} = k(s)\mathbf{T}'$ è ortogonale a $\mathbf{T}$.

Il vettore binormale $\mathbf{B}$

Definizione

Il *vettore binormale* $\mathbf{B}$ *è il vettore (unitario)*

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

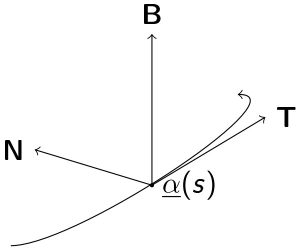


Figura : Il riferimento mobile $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$.

I piani osculatore, normale e rettificante.

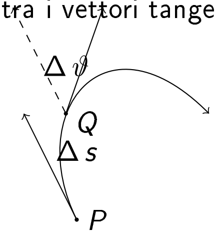
Sia $P = \underline{\alpha}(s)$ un punto, appartenente a una curva $\underline{\alpha}$ (s: lunghezza d'arco) in cui la curvatura $k(s) = \left|\mathbf{T}'(s)\right|$ sia diversa da zero. In tale punto è allora definito il triedro fondamentale, costituito dai tre vettori **T**, **N**, **B**. Tali vettori individuano tre piani, che prendono i nomi seguenti.

Definizione

- *Il piano osculatore è il piano passante per P e contenente* **T** *e* **N***;*
- *Il piano normale è il piano passante per P e contenente* **N** *e* **B**, *ossia passante per P e ortogonale a* **T***;*
- *Il piano rettificante è il piano passante per P e contenente* **T** *e* **B**, *ossia passante per P e ortogonale a* **N***;*

Curvatura. Seconda definizione.

P: punto fissato sulla curva. Q: punto sulla curva, a distanza $|\Delta s|$ da P. $\Delta\vartheta(\geq 0)$: angolo tra i vettori tangenti unitari in P e Q.



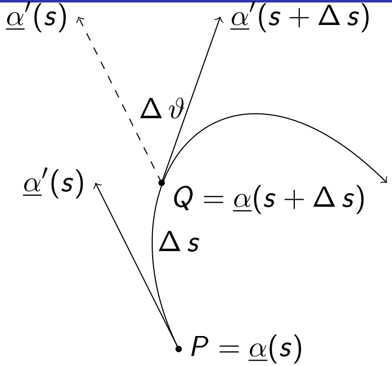
Definizione (Curvatura. Seconda definizione.)

La ***curvatura*** *in P è*

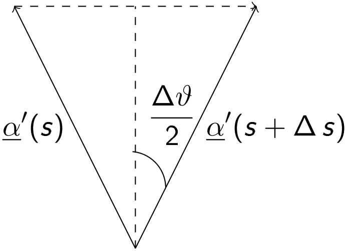
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \tag{5}$$

($\Delta\vartheta \geq 0$).

Equivalenza delle due definizioni di curvatura



$$|\underline{\alpha}'(s+\Delta\, s) - \underline{\alpha}'(s)| = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$



$$\left|\frac{\underline{\alpha}'(s+\Delta\, s) - \underline{\alpha}'(s)}{\Delta s}\right| = \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \sim \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}$$

Il limite del primo membro per $\Delta s \to 0$ è $|\underline{\alpha}''(s)| = |\mathbf{T}'(s)|$. Quindi le due definizioni di curvatura sono equivalenti.

Significato della curvatura

La curvatura k di una curva in un suo punto P misura la rapidità con la quale la curva si discosta dalla direzione tangente in P.

Primi esempi.

1. Se $\underline{\alpha}$ è una linea retta, allora $\Delta\vartheta = 0$ e quindi *la curvatura k di una retta è nulla in ogni punto*.
2. Se $\underline{\alpha}$ è una circonferenza di raggio R, si ha $\Delta s = R\,\Delta\vartheta$ e quindi $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta s} = \dfrac{1}{R}$. Quindi *la curvatura di una circonferenza, in un suo qualunque punto, è l'inverso del raggio*.

Formule per la curvatura (Parametro arbitrario).

Teorema (Formule per la curvatura con un parametro arbitrario)

Sia $I \xrightarrow{\underline{\alpha}} \mathbb{R}^3$ una curva regolare e di classe $\mathcal{C}^2$, parametrizzata mediante un parametro arbitrario. Allora la curvatura $k(t)$ esiste in ogni suo punto e

$$k(t) = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{|\underline{\alpha}'(t)|^3} \tag{6}$$

dove $\underline{\alpha}'(t) = \dfrac{d}{dt}\underline{\alpha}(t)$ è il vettore tangente e $\underline{\alpha}''(t) = \dfrac{d}{dt}\underline{\alpha}'(t)$ è il vettore accelerazione.

Dimostrazione Denotiamo con $s = s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left|\underline{\alpha}'(\tau)\right| \, d\tau$ la lunghezza d'arco. Possiamo pensare che $\underline{\alpha}(t)$ sia funzione composta $\underline{\alpha}(t) = \underline{\alpha}(s(t))$.

Dimostrazione (Continuazione)

Allora, posto $\dfrac{ds}{dt} = |\underline{\alpha}'(t)| = v(t) = v$, si ha:

$$\underline{\alpha}'(t) = \frac{d}{dt}\underline{\alpha}(t) = \frac{d\underline{\alpha}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\mathbf{T}$$

Da qui segue:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\underline{\alpha}(t)\right) = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N} \qquad (7) \end{aligned}$$

Il prodotto vettore $\underline{\alpha}' \times \underline{\alpha}''$ è dato allora da:

$$\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t) = (v\mathbf{T}) \times \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N}\right) = v^3 k\mathbf{T} \times \mathbf{N} = v^3 k\mathbf{B}$$

Da $\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t) = v^3 k\mathbf{B}$ segue (prendendo i moduli)

$$k = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{v^3|\mathbf{B}|} = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{v^3} = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{|\underline{\alpha}'(t)|^3}.$$

Osservazioni

Osservazione 1. La formula

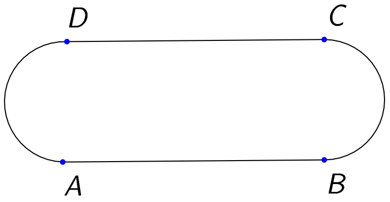
$$\underline{\alpha}''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N}$$

dice che il vettore accelerazione $\underline{\alpha}''(t)$ sta nel piano osculatore $\mathbf{T}, \mathbf{N}$. Quindi (se la curva è biregolare: $\underline{\alpha}', \underline{\alpha}''$ linearmente indipendenti) il piano osculatore in $\underline{\alpha}(t)$ è parallelo ai due vettori $\underline{\alpha}'(t)$ e $\underline{\alpha}''(t)$.

Osservazione 2. Per trovare la terna fondamentale $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ di una curva biregolare $\underline{\alpha}$ in t, si può procedere nel modo seguente:

1. Si trova $\underline{\alpha}'(t)$ e lo si normalizza. In questo modo si ottiene il vettore tangente $\mathbf{T}$.
2. Si trova $\underline{\alpha}''(t)$. (Attenzione: in genere, il vettore accelerazione $\underline{\alpha}''(t)$ non è parallelo a $\mathbf{N}$.) Il normalizzato del prodotto vettore $\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)$ è il vettore $\mathbf{B}$.
3. Il vettore $\mathbf{N}$ è allora dato da $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.

Binari connessi da archi di cerchio: curvatura discontinua



Un binario è costituito da due tratti rettilinei raccordati tra loro da due semicirconferenze. Supponiamo che un treno si muova con velocità scalare $v(t)$ costante. Allora l'accelerazione tangenziale $(dv/dt)\mathbf{T}$ è nulla in ogni punto. L'accelerazione centripeta $\mathbf{a} = (v^2 k)\mathbf{N}$ è nulla sui tratti rettilinei e vale $\mathbf{a} = (v^2 k)\mathbf{N} = (v^2/R)\mathbf{N}$ sui semicerchi.
Quindi l'accelerazione è discontinua nei punti A, B, C, D.

Calcolo della curvatura di curve piane

Come casi particolari della formula (6) si ricavano, con un semplice conto, le seguenti formule [Esercizio].

1. Se $\underline{\alpha}$ è una curva piana $\underline{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, allora

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{8}$$

2. Se $\underline{\alpha}$ è un grafico $y = f(x)$, allora

$$k(t) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} \tag{9}$$

Esercizio: curvatura dell'ellisse

Esercizio

Dimostrare che la curvatura dell'ellisse

$$x(t) = a \cos t$$
$$y(t) = b \sin t$$

($a \geq b > 0$), $t \in [0, 2\pi]$, è data da:

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

Quali sono i punti sull'ellisse di minima e di massima curvatura?

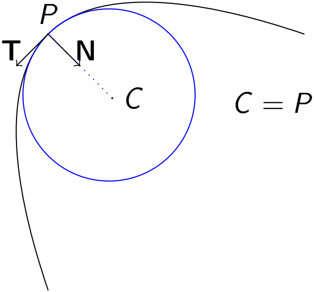


Figura : Il cerchio osculatore alla curva $\underline{\alpha}$ nel punto P è il cerchio contenuto nel piano osculatore $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, tangente alla curva nel punto P, situato dalla parte del vettore normale $\mathbf{N}$ e il cui raggio è $r = 1/k$, dove k è la curvatura $(\neq 0)$ nel punto P. Il suo raggio $r = 1/k$ si chiama raggio di curvatura (nel punto P) e il suo centro $C = P + \frac{1}{k}\mathbf{N}$ si chiama centro di curvatura. Il cerchio osculatore è il cerchio che meglio approssima la curva vicino a P. Coincide con la posizione limite del cerchio passante per tre punti P_1, P_2, P_3 vicini a P, al tendere di tali punti a P.

Decomposizione dell'accelerazione

Poiché la curvatura è l'inverso del raggio di curvatura, $k = \frac{1}{r}$, la formula

$$\underline{\alpha}''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N} \tag{10}$$

che dà la decomposizione dell'accelerazione (rispetto a un parametro arbitrario), si scrive anche:

$$\underline{\alpha}''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{r}\mathbf{N} \tag{11}$$

La componente $\frac{v^2}{r}\mathbf{N}$ dell'accelerazione si chiama accelerazione centripeta, e punta verso il centro del cerchio osculatore. Nel caso di un moto circolare uniforme, ad esempio, la componente tangenziale è nulla ($\frac{dv}{dt} = 0$) l'accelerazione è tutta centripeta e di intensità $\frac{v^2}{r}$, dove r è il raggio della circonferenza.

Derivata di $\mathbf{B}$. Torsione

Consideriamo una curva $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ parametrizzata alla lunghezza d'arco e con curvatura $k(s) = |\mathbf{T}'(s)|$ diversa da zero.
La terna fondamentale di Frenet $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ è:

$$\mathbf{T}(s) = \underline{\alpha}'(s), \qquad \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{1}{k(s)}\mathbf{T}'(s), \qquad \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

Teorema

Il vettore $\mathbf{B}'(s)$ è multiplo di $\mathbf{N}(s)$.

$\mathbf{B}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{B}(s)$, perché $\mathbf{B}(s)$ ha lunghezza costante.
Calcoliamo ora la derivata di $\mathbf{B}(s)(= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s))$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}'(s) &= \mathbf{T}'(s) \times \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \\
&= k(s)\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \\
&= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \qquad (\text{perché } \mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s) = 0).
\end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{B}'(s)$ è ortogonale anche a $\mathbf{T}(s)$. In definitiva, $\mathbf{B}'(s)$ è ortogonale sia a $\mathbf{B}(s)$ sia a $\mathbf{T}(s)$. Pertanto deve essere un multiplo di $\mathbf{N}(s)$. $\square$

Torsione di una curva

Per il teorema precedente, si deve avere

$$\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s) \qquad (12)$$

dove $\tau = \tau(s)$ è una funzione definita sull'intervallo I sul quale è definita la curva. ($\tau(s)$ può essere positivo, nullo o negativo).

Definizione

Sia $I \xrightarrow{\underline{\alpha}} \mathbb{R}^3$, $s \longmapsto \underline{\alpha}(s)$ una curva parametrizzata alla lunghezza d'arco, e supponiamo che la curvatura $k(s)$ sia diversa da zero per ogni $s \in I$. Il numero $\tau(s)$ definito da $\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s)$ si chiama torsione di $\underline{\alpha}$ in s.

Si noti che la torsione $\tau(s)$ può essere positiva, nulla o negativa (mentre la curvatura $k(s) = |\mathbf{T}'(s)|$ è positiva).

Significato intuitivo della torsione

Dal momento che $|\mathbf{B}(s)| = 1$ (costante), la lunghezza $|\mathbf{B}'(s)|(= |\tau(s)|)$ misura la rapidità di variazione del piano osculatore vicino a s; vale a dire, $\tau(s)$ dà una misura (con segno) della rapidità con la quale la curva si discosta, in un intorno di s, dal piano osculatore in s.

Significato della torsione nulla

Teorema

Una curva $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, parametrizzata alla lunghezza d'arco e con curvatura $k(s)$ diversa da zero per ogni $s \in I$, è tutta contenuta in un piano se, e solo se, la sua torsione τ è nulla in ogni punto.

Se la curva $\underline{\alpha}$ è piana, allora il piano della curva coincide con il piano osculatore. Di conseguenza, $\mathbf{B}(s)$ è costante e quindi $\tau(s) = 0$ per ogni $s \in I$. Viceversa, supponiamo $\tau(s) = 0$ per ogni $s \in I$ (e $k(s) \neq 0$); allora $\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s) = 0$ e quindi $\mathbf{B}(s) = \mathbf{B}_0$ è costante. Dunque

$$(\underline{\alpha}(s) \cdot \mathbf{B}_0)' = \underline{\alpha}'(s) \cdot \mathbf{B}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

Da $(\underline{\alpha}(s) \cdot \mathbf{B}_0)' = 0$ segue $\underline{\alpha}(s) \cdot \mathbf{B}_0 = d$, dove d è una costante reale. Quindi $\underline{\alpha}(s)$ è contenuto in un piano ortogonale a $\mathbf{B}_0$, e quindi abbiamo dimostrato che $\underline{\alpha}$ è una curva piana. $\square$

Formula per la torsione (parametro arbitrario)

Teorema (Formula per la torsione)

Per una curva f di classe C^3, biregolare (f', f'' non nulli) parametrizzata in modo arbitrario, la torsione è data da:

$$\tau(t) = -\frac{(f'(t) \times f''(t)) \cdot f'''(t))}{\|f'(t) \times f''(t)\|^2} = -\frac{\det(f', f'', f''')}{\|f' \times f''\|^2}$$

(Omettiamo la dimostrazione. Non ci capiterà spesso di usare questa formula.)

Teorema Fondamentale sulle Curve nello Spazio

Enunciamo il Teorema Fondamentale sulle Curve nello Spazio. In breve, questo teorema afferma che curvatura e torsione individuano una curva in modo unico, a meno della posizione della curva stessa nello spazio.

Teorema (Teorema fondamentale della teoria delle curve nello spazio)

Siano

$$k, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

funzioni continue su un intervallo I, con $k > 0$ su I. Allora esiste una curva $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, parametrizzata alla lunghezza d'arco, le cui funzioni di curvatura e di torsione sono k e τ. Inoltre, due curve di questo tipo (ossia, con la stessa curvatura k e la stessa torsione τ) differiscono per un movimento rigido (cioè si ottengono una dall'altra mediante una traslazione seguita da una rotazione).