Propagazione degli errori

Motivazioni

RSS: sviluppo intuitivo

RSS: sviluppo razionale

Coefficienti adimensionali

Introduzione

All'interno di un singolo strumento, o di un sistema di misura, ogni elemento costitutivo può essere fonte di imprecisione

Un problema analogo è quello di stabilire come le incertezze si propagano quando grandezze affette da incertezza vengono utilizzate per definirne delle altre

Il problema è legato alla **propagazione delle incertezze**, quindi un problema di **propagazione degli errori**

Indipendentemente dalla origine delle incertezze e dalla loro quantificazione, ci dobbiamo chiedere come combinarle nel modo più ragionevole

"Più ragionevole" comporta l'essere sufficientemente cautelativi da non incorrere frequentemente in problemi ma senza esserlo eccessivamente

Problemi tipici:

Disponendo delle misure di forza, spostamento, dimensione della sezione, e delle relative incertezze, da quale incertezza è affetta la stima del modulo elastico del materiale?

$$E = \frac{L \cdot F}{a \cdot b \cdot s} \qquad \begin{array}{ll} F = F_{mis} \pm w_F & s = s_{mis} \pm w_s \\ L = L_{mis} \pm w_L & a = a_{mis} \pm w_a \\ b = b_{mis} \pm w_b & w_E\,? \end{array}$$

Oppure:

Quali possono essere le incertezze ammissibili sulle dimensioni se si desidera ottenere una assegnata incertezza sul volume?

$$V = \pi d^2 h / 4 \qquad \begin{array}{l} d = d_{mis} \pm w_d \\ h = h_{mis} \pm w_h \end{array} \qquad w_h, w_d \quad \rightarrow w_V \leq \varepsilon$$

Linearizzazione

Ci serve una tecnica generale per la combinazione, data la generica funzione di più variabili $Q(x_i)$

La variazione della funzione è definita mediante la sua linearizzazione nella configurazione di riferimento:

$$Q = Q(x_i) + \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i + \cancel{\sum_i \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^2} dx_i^2 + \ldots \simeq$$

$$Q(x_i) + \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i = Q(x_i) + dQ$$

Quindi: $$dQ = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i$$

L'equazione è esatta nel caso di variazioni infinitesime.

Nel caso delle misure, possiamo sostituire alle variazioni le rispettive incertezze di misura ($dx_i \approx w_i$) ottenendo l'incertezza del risultato come somma di contributi associati a ciascuna misura avendo effettuato una linearizzazione nel punto nominale di misura:

$$dQ \cong w_Q = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} w_i = \sum_i w_{Qi} \qquad w_{Qi} = \frac{\partial Q}{\partial x_i} w_i$$

con w_{Qi} è stato indicato il contributo all'errore della funzione Q dovuto all'errore w_i associato alla variabile i-esima

L'incertezza w_i viene pesata dalla sensibilità della grandezza Q al parametro i-esimo

$$\partial Q / \partial x_i$$

Possiamo introdurre la forma adimensionale con l'incertezza percentuale data da:

$$\frac{w_Q}{Q} = \frac{1}{Q} \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} w_i$$

RSS: Radice della Somma dei Quadrati

Come gestire errori che possono essere sia positivi che negativi?

La somma algebrica è da scartare in quanto arbitraria la scelta dei segni dei singoli elementi

La somma in valore assoluto rappresenta il limite superiore all'errore/ incertezza ma si tratterebbe di una stima eccessivamente pessimistica:

è infatti minima la probabilità che tutti gli errori si trovino contemporaneamente allo stesso estremo della loro escursione

La radice della somma dei quadrati (RSS Root Sum Square) rappresenta una scelta ottimale, nel senso che tiene conto della probabilità che i diversi errori concorrano alla misura con il loro valore massimo

$$w_Q = \sqrt{\sum_i w_{Qi}^{\ 2}}$$

RSS

Poiché:

- L'incertezza viene espressa in termini di deviazione standard.
- Il quadrato della deviazione standard è la varianza

stiamo dicendo che la varianza di Q è data dalla somma delle varianze delle singole variabili, ciascuna pesata con la sensibilità che la variabile Q presenta nei suoi confronti

$$w_Q^2 = \sum_i w_{Qi}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} \times w_i \right)^2 = \sum_i \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} \right)^2 \times (w_i)^2 \right]$$

Ma siamo sicuri che sia un approccio sempre valido?

Quali sono i suoi limiti?

RSS

Proviamo un approccio più razionale esprimendo in maniera generale la varianza della variabile Q in funzione delle misure disponibili delle grandezze x_n dalle quali dipende

Disponendo di una serie di N set di n misure ciascuno $\{x_n\}_{i,\ i=1:N}$, a ciascuno di essi corrisponde una valutazione Q_i

Disponendo del valore medio possiamo esprimere la varianza di Q come:

$$\sigma_Q^2 \approx S_Q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Q_i - \bar{Q} \right)^2$$

Ricaviamo le valutazioni Q_i come linearizzazione della variabile nell'intorno del punto di misura nominale dato il set di misure i-esimo utilizzando uno sviluppo di Taylor nelle n variabili x_n arrestato al primo ordine

$$Q_i = \bar{Q} + \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_{1i} + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial x_n} dx_{ni}$$

RSS

Quindi con

$$\sigma_Q^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2 \qquad Q_i=\bar{Q}+\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_{1i}+\ldots+\frac{\partial Q}{\partial x_n}dx_{ni}$$

la varianza di Q diventa:

$$\sigma_Q^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{Q}+\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_{1i}+\ldots+\frac{\partial Q}{\partial x_n}dx_{ni}-\bar{Q}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_{1i}+\ldots+\frac{\partial Q}{\partial x_n}dx_{ni}\right)^2$$

RSS: sviluppo matriciale

Il formalismo matriciale permette una scrittura compatta

Introducendo la media della misura n-esima : $\bar{x}_n=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_{n,k}$

Definendo il vettore delle deviazioni del set i-esimo delle misure rispetto al valore medio di tutti gli N set di misure

$$\{dx\}_i=\begin{Bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{Bmatrix}_i=\begin{Bmatrix} \bar{x}_1-x_{1,i} \\ \vdots \\ \bar{x}_n-x_{n,i} \end{Bmatrix}$$

e quello delle sensibilità $\{Q_{/x}\}=\begin{Bmatrix} Q_{/x_1} \\ \vdots \\ Q_{/x_n} \end{Bmatrix}$

la linearizzazione diventa

$$Q_i=\bar{Q}+\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_{1i}+\ldots+\frac{\partial Q}{\partial x_n}dx_{ni}=\bar{Q}+\sum_{k=1}^{n}Q_{/x_k}dx_{ki}=\bar{Q}+\{dx\}_i^T\{Q_{/x}\}$$

RSS: sviluppo matriciale

Lo scostamento della i-esima stima può essere espresso come:

$$Q_i - \bar{Q} = \{dx\}_i^T \{Q_{/x}\} = \{\bar{x}_k - x_{k,i}\}^T \{Q_{/x}\}$$

$\{\bar{x}_k - x_{k,i}\}$ è il vettore la cui *k*-esima riga contiene la differenza tra il valore medio delle misure di x_k e la misura di x_k del set *i*-esimo

Si ha quindi la seguente espressione della *varianza*:

$$\sigma_Q^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Q_i - \bar{Q}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\{\bar{x}_k - x_{k,i}\}^T \{Q_{/x}\}\right)^T \left(\{\bar{x}_k - x_{k,i}\}^T \{Q_{/x}\}\right)$$

Essendo poi i coefficienti di senstitività indifferenti alla sommatoria:

$$\sigma_Q^2 \approx \{Q_{/x}\}^T \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\{\bar{x}_k - x_{k,i}\}\{\bar{x}_j - x_{j,i}\}^T\right]\right)\{Q_{/x}\}$$

RSS: sviluppo matriciale

$$\sigma_Q^2 \approx \{Q_{/x}\}^T \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\{\bar{x}_k - x_{k,i}\}\{\bar{x}_j - x_{j,i}\}^T\right]\right)\{Q_{/x}\}$$

Naturale quindi introdurre la definizione di matrice di *Covarianza*:

$$\left[Cov(\sigma_{x_k,x_j})\right] = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\{\bar{x}_k - x_{k,i}\}\{\bar{x}_j - x_{j,i}\}^T\right]\right)$$

Si ottiene infine l'espressione della *varianza* della grandezza Q in funzione dei vettori di sensitività e della matrice di *covarianza* delle misure:

$$\sigma_Q^2 \approx \{Q_{/x}\}^T \left[Cov(\sigma_{x_k,x_j})\right]\{Q_{/x}\}$$

RSS

I termini della matrice di Covarianza vengono definiti come:

Varianza per i termini diagonali (o auto-covarianza)

$$\sigma_k^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ki}-\bar{x}_k\right)^2$$

e di covarianza per quelli extra -diagonali

$$\sigma_{j,k} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ji}-\bar{x}_j\right)\left(x_{ki}-\bar{x}_k\right)$$

Ma quale significato hanno le covarianze?

- Rappresentano la combinazione delle incertezze sulle singole misure a seguito della loro interazione
- Quando sono auto-covarianze ($k=j$) il risultato è la varianza, forma quadratica sempre positiva
- Quando sono covarianze ($k\neq j$) le incertezze si combinano algebricamente e possono annullarsi

RSS: Applicabilità

Nel caso di incertezze scorrelate (indipendenti) gli scostamenti dal valor medio possono essere positivi e negativi

Se scostamenti positivi e negativi hanno eguale probabilità di presentarsi, le Covarianze tendono a zero all'aumentare del numero di misure

Al contrario le varianze sono sempre positive

La matrice di Covarianza risulta essere diagonale, con ciascun termine dato dalla varianza della variabile corrispondente

In questo caso la varianza della variabile Q si riduce dalla somma delle varianze delle singole misure: quindi la RSS

Le ipotesi di indipendenza e di simmetria degli scostamenti delle incertezze di variabili casuali sono NORMALMENTE ragionevoli MA DEVONO ESSERE VERIFICATE

Es: se le incertezze di misura sono dovute tutte allo stesso strumento è ancora lecito ritenere che esse siano indipendenti?

Nel caso del cilindro: $\mathrm{V} = \pi\, \mathrm{d}^2\, \mathrm{h}/4 \qquad d = d_{mis} \pm w_d \qquad h = h_{mis} \pm w_h$

$$\frac{w_V}{V} = \frac{1}{V}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\times w_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\times w_h\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\frac{\pi d^2 h}{4}}\sqrt{(2\pi dh/4\times\Delta d)^2 + (\pi d^2/4\times\Delta h)^2}$$

Assumendo i seguenti valori: $d = 32 \pm 1 \ \ mm \quad (\pm 3.13\%)$

$h = 102 \pm 1 \ \ mm \quad (\pm 0.98\%)$

$$\frac{w_V}{V} = \sqrt{9.7656\cdot 10^{-4}\Delta d^2 + 9.6177\cdot 10^{-5}\Delta h^2} = \pm 6.33\%$$

Come deducibile dal confronto delle incertezze, se si vuole migliorare il risultato occorre ridurre quella del diametro

Poiché i singoli termini sono elevati al quadrato prima di essere sommati, il termine maggiore tende a dominare il risultato

Relazione fondamentale perché, in maniera generale, permette di mettere in evidenza sia l'errore dovuto alla singola misura che il suo peso sul risultato.

Per poter utilizzare questa relazione è necessario che le variabili misurate siano indipendenti e che siano indipendenti le rispettive incertezze, cioè l'incertezza su una misura non deve influenzare l'incertezza su un'altra

Le incertezze devono essere definite in maniera coerente dal punto di vista probabilistico

Per la sperimentazione questa analisi è fondamentale per ridurre il margine di errore associato ad una misura nella maniera più efficiente:

- Se un termine ha un peso elevato è probabile che sia necessario tenerne conto nella preparazione della procedura di calibrazione
- A parità di costo agire sul termine maggiore da il migliore risultato, o da il risultato cercato con il costo inferiore. Conviene quindi migliorare la qualità dello strumento peggiore piuttosto che cercare di migliorare tutti gli strumenti della catena di misura.

Esempio: Consideriamo la stima della potenza dissipata da una resistenza in un circuito elettrico utilizzando una misura della tensione applicata. La resistenza ha un valore nominale di 100±5 Ohm, mentre il voltmetro fornisce una lettura di 28.0±0.05V (le incertezze sono assunte in termini di devstd).

La potenza nominale è: $P = V^2 / R = 28^2 / 100 = 7.84W$

Nell'ipotesi di incertezze indipendenti applicheremo la RSS:

$$\delta(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V} w_V\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} w_R\right)^2}$$

Le sensitività sono quindi:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{V^2}{R^2} = -\frac{28^2}{100^2} = -0.078 \qquad \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{2V}{R} = \frac{2\times 28}{100} = 0.56$$

Riportiamo l'espressione di calcolo ed i valori numerici

$$\delta(P)=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}w_V\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial R}w_R\right)^2}\qquad w_V=0.05\,V \qquad w_R=5\,\Omega \qquad \frac{\partial P}{\partial R}=-0.078 \qquad \frac{\partial P}{\partial V}=0.56$$

$$\delta(P)=\sqrt{(0.56\times0.05)^2+(-0.078\times5)^2}=\sqrt{0.000784+0.152}=0.39\ W$$

$$\Delta P\%=0.39/7.84=5.01\%$$

L'incertezza è data per la maggior parte dalla resistenza ben più di quanto dica il rapporto delle incertezze percentuali,

e nonostante il peso inferiore.

Sarebbe quindi inutile cercare di migliorare la situazione con un voltmetro più preciso.

Incertezza relativa

Può valere la pena riorganizzare la relazione nel modo seguente:

$$\left(\frac{w_Q}{Q}\right)^2=\frac{1}{Q}\left(\frac{x_i}{x_i}\right)^2\sum_i\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^2 w_i^{\,2}=\sum_i\left(\frac{x_i}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{w_i}{x_i}\right)^2=\sum_i c_i^{\,2}w_{i\%}^{\,2}$$

avendo così definito il *Coefficiente di Amplificazione dell'Incertezza*:

$$c_i=\frac{x_i}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

Questo coefficiente permette di valutare direttamente il peso relativo delle singole incertezze senza ancora conoscerle: ci permette quindi di capire, in fase di progetto, a quali elementi occorre prestare più attenzione, ragionando a incertezze relative equivalenti.

Nel caso della misura di potenza ci dice che la tensione potrebbe essere la misura più critica (tenendo conto del quadrato il rapporto è 4:1)

$$c_V=\frac{V}{P}\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{V}{V^2/R}\frac{2V}{R}=2 \qquad c_R=\frac{R}{P}\frac{\partial P}{\partial R}=\frac{R}{V^2/R}\left(-\frac{V^2}{R^2}\right)=-1$$

Incertezza percentuale

Interessante anche una ulteriore forma di normalizzazione:

$$\frac{\left(\frac{w_Q}{Q}\right)^2}{\left(\frac{w_Q}{Q}\right)^2}=1=\sum_i \frac{\left(\frac{x_i}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{w_i}{x_i}\right)^2}{\left(\frac{w_Q}{Q}\right)^2}=\sum_i (c_i)^2\left(\frac{w_{i\%}}{w_{Q\%}}\right)^2=\sum_i c_{i\%}$$

Avendo introdotto il *Contributo percentuale* $c_{i\%}=\left(\frac{x_i}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{w_{i\%}}{w_{Q\%}}\right)^2$

$$c_{V\%}=\left(\frac{V}{P}\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2\left(\frac{w_{V\%}}{w_{P\%}}\right)^2=\left(2\frac{0.0018}{0.0501}\right)^2=0.00507 \qquad c_{R\%}=0.9949$$

Questo coefficiente è *complessivo* , tiene cioè conto anche del valore di atteso della variabile, e ci dice quanto già concluso nella prima analisi: l'incertezza sulla misura di resistenza è determinante

Per migliorare occorre bilanciare la qualità delle misure riducendo l'incertezza sulla resistenza

Nel caso in cui la relazione sia costituita da una produttoria di potenze:

$$Q=C\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_k}=Ca_k x_i^{a_k-1}\prod_{i=1,i\neq k}^{n}x_i^{a_i}$$

L'errore percentuale sulla grandezza misurata risulta essere legato alle incertezze sulle singole misure secondo la relazione seguente:

$$\frac{w_Q}{Q}=\sqrt{\sum_i\left(\frac{w_i}{x_i}\times a_i\right)^2}=\sqrt{\sum_i\left(a_i\times w_{i\%}\right)^2}$$

La relazione è particolarmente semplice e facile da ricordare: in quanto si utilizza direttamente l'incertezza percentuale pesata per l'esponente del parametro.

Nel caso di un semplice prodotto, quindi esponenti unitari:

$$w_Q\%=\frac{w_Q}{Q}=\sqrt{\sum_i\left(w_{i\%}{}^2\right)}$$