ANALISI E GEOMETRIA 1, A.A. 2021-2022, SCAGLIONE RE-STEL

Secondo appello – 31 Gennaio 2022 – Durata: 2 ore e 15 minuti

Cognome e Nome: ______________________ **N° iscrizione:** __________

Numero di matricola (6 cifre): ______________

QUESTIONARIO (TOTALE = 20 PUNTI)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$.

   (a) Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora necessariamente $a_n \to 0^+$ oppure $a_n \to 0^-$. ○

   (b) Non esiste il limite: $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. ○

   (c) Se $\{a_n\}$ è una qualunque successione di numeri reali positivi tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ per $n \to +\infty$,
   allora $\{a_n\}$ non tende a zero. ○

   (d) Se a_n è crescente, allora ammette limite (finito o $+\infty$). ✓ ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

2. (1 risposta corretta, 2 punti) L'equazione in $\mathbb{C}$

$$|z| = z + 1$$

   (a) Ammette una soluzione e una soltanto. ✓ ○

   (b) Non ha soluzioni. ○

   (c) Ha esattamete due soluzioni. ○

   (d) Ammette infinite soluzioni. ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

3. (1 risposta corretta, 2 punti) Definiamo la funzione:

$$g(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}} \qquad x \in [0, +\infty)$$

   (a) Per $x \to 0$, $g(x) \to 0$. ○

   (b) g è limitata. ○

   (c) g non è monotòna. ○

   (d) Esiste (finita) la derivata destra di g in $x_0 = 0$. ✓ ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

4. (1 risposta corretta, 2 punti) Dato il parametro $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^{\alpha}}$$

   (a) Vale 0 se e solo se $\alpha < 1$. ○

   (b) Vale 0 se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$. ○

   (c) Vale 0 se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$. ✓ ○

   (d) Vale 0 per ogni $\alpha > 0$. ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

5. (1 risposta corretta, 2 punti) Definiamo: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{\sin x} - \sin x - 1$$

(a) f ammette uno e un solo zero. ○

(b) $x = \pi/4$ è un punto di minimo locale di f. ○

(c) f ammette infiniti zeri. ✓ ○

(d) f è illimitata. ○

(e) $f'(x) = e^{\cos x} - \cos x$ ○

---

6. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia F la funzione integrale così definita:

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^{500}}{(t+1)^{502}}\, dt\,.$$

Allora:

(a) F ha un asintoto verticale in $(1, +\infty)$. ○

(b) F ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. ○

(c) F cambia segno in $(1, +\infty)$. ○

(d) F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. ✓ ○

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

7. (1 risposta corretta, 2 punti) L'integrale definito

$$\int_0^1 \arctan(x)\, dx$$

è uguale a:

(a) $\frac{1}{4}(\pi - \log 2)$ ○

(b) $\frac{1}{4}(\pi - \log 4)$ ✓ ○

(c) $\frac{1}{2}(\pi - \log 2)$ ○

(d) $\pi - \log 2$ ○

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

8. [1 risposta corretta, 2 punti] La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin\left(2^{-n}\right)$$

(a) converge se e solo se $\alpha \geq 0$ ○
(b) converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. ✓ ○
(c) converge se e solo se $\alpha > 1$ ○
(d) converge se e solo se $\alpha < 0$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

9. (1 risposta corretta, 2 punti) Poniamo: $I = \int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$. Con la sostituzione $e^x = t$, si ottiene:

(a) $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{12}$ ✓ ○
(b) $I = \int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{12}$ ○
(c) $I = \int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{6}$ ○
(d) $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\log 2$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

10. (1 risposta corretta, 2 punti) La lunghezza della curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\cos(\log t)\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\log t)\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\log t)\right) \qquad t \in \left[1, e^{2\pi}\right],$$

è uguale a:

(a) $2\pi - 1$ ○
(b) 2π ✓ ○
(c) $+\infty$ ○
(d) $e^{2\pi} - 1$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

11. (1 risposta corretta, 2 punti) Consideriamo le rette r_1 e r_2 in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t\,, \\ y = 2 + 2t\,, \\ z = 3 + 3t\,, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + s\,, \\ y = 2\,, \\ z = 6 + 3s\,, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

(a) r_1 e r_2 sono sghembe. ○
(b) r_1 e r_2 sono incidenti e non perpendicolari tra loro. ✓ ○
(c) r_1 e r_2 sono ortogonali. ○
(d) Il piano di equazione $x - 3z = 0$ è perpendicolare alla retta r_2. ○
(e) r_1 e r_2 sono incidenti e perpendicolari tra loro. ○

Esercizio e questioni teoriche (Totale = 12 punti)

***Riportare le risposte finali nelle caselline. Scrivere a parte le spiegazioni e i calcoli su questi fogli, riportando la numerazione* (a),(b),...,(e).**

Poniamo:

$$f(x) = \log(\log x) - \log(x) + e\,. \tag{1}$$

(dove e denota la costante di Nepero e log il logaritmo in base e.)

(a) Determinare il più grande sottoinsieme $J \subset \mathbb{R}$ in cui l'espressione $f(x)$ è definita. Calcolare i limiti di f agli estremi di J. (Riportare a parte il calcolo dei limiti)

Risposte: | $J =$ Limiti: |

(b) Trovare un punto $x_0 \in J$ in cui f assuma il valore massimo. Oppure barrare "Non esiste" (Motivare a parte le risposta.)

Risposta: | $x_0 =$ $f(x_0)=$ |, oppure: | Non esiste |

(c) Determinare il numero degli zeri di f nell'intervallo $(1, e)$ e il numero degli zeri di f nell'intervallo $(e, +\infty)$. (Motivare a parte le risposte. Non si chiede di determinare il valore numerico degli zeri.)

Risposte: | Numero degli zeri di f in $(1, e)$: | Numero degli zeri di f in $(e, +\infty)$: |

(d) Poniamo: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 2 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$ $\quad g(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$

(i) f è integrabile su $[0, 2]$? | |

(ii) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ è derivabile su $[0, 2]$? | |

(iii) $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ è derivabile in $[-1, 1]$? | |

(Motivare a parte ogni risposta.)

(e) (i) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi (dando per acquisito il teorema degli zeri).

(ii) Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio I sia un intervallo di $\mathbb{R}$. Supponiamo che $f(I)$ (l'immagine di f) sia un intervallo. Possiamo concludere che f sia continua?

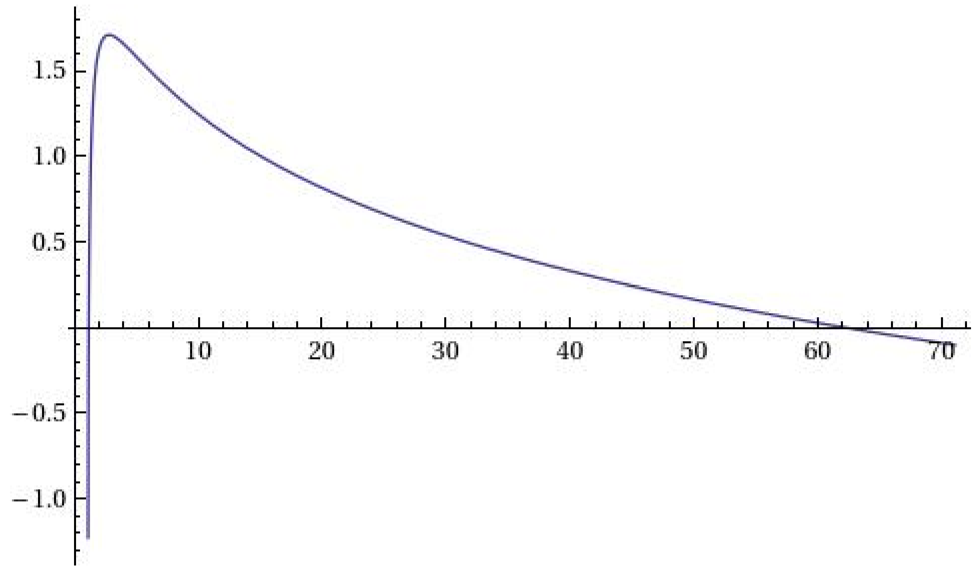
(Risposte nella pagina seguente.)

(a) $J = (1, +\infty)$ $\qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(b) L'unico punto in cui la derivata

$$f'(x) = \frac{-1 + \log x}{x \log x}$$

si annulla, ossia $x_0 = e$, è punto di massimo assoluto. Il valore massimo è $f(x_0) = -1 + e (> 0)$.



(c) Sull'intervallo $(1, e)$ la funzione f è strettamente crescente, perché $f' > 0$ su $(1, e)$, e quindi ha al più 1 zero. Siccome vicino a $a = 1$ f assume valori negativi e vicino a $x_0 = e$ assume valori positivi ($f(e) = -1 + e > 0$), per il teorema degli zeri f ha almeno uno zero. Pertanto, f ha uno zero, e uno soltanto, nell'intervallo $(1, e)$. In modo del tutto analogo si dimostra che f ha uno zero, e uno soltanto, nell'intervallo $(e, +\infty)$.

(d) (i) Sull'intervallo (limitato) $[0, 1]$ la (restrizione della) funzione f è continua e limitata, quindi integrabile. Analogamente, f è integrabile sull'intervallo $(1, 2]$. Pertanto f è integrabile su $[0, 2] = [0, 1] \cup (1, 2]$ (anche se f non è continua nel punto 1). Si ha: $\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f$.

(d) (ii) $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2x - 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$ è continua su $[0, 2]$, ma non è derivabile su $[0, 2]$, perché non è derivabile nel punto 1.

(d) (iii) Sicome la funzione $g(x) = |x|$ è continua in $[-1, 1]$, la sua funzione integrale $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ è derivabile in $[-1, 1]$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(e)(i)

(e)(ii) La risposta è negativa. Controesempio: la funzione $[0, 2] \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

ha come dominio l'intervallo $J = [0, 2]$ e come immagine l'intervallo $f(J) = [0, 1]$, ma non è continua.