A.A 2021-22 – Analisi e Geometria 1 **Seconda Prova – 14 Gennaio 2022**

Seconda Prova

Cognome: ____________________

Nome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Punteggio Totale: ____________________ **Nr. di iscrizione:** ____________________

Parte Prima: Questionario. (10 punti)

1. (1 affermazione corretta, 1 punto) La retta r contenente il punto $Q = (1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano π contenente i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ coincide con

   (a) l'asse x. ○
   (b) $r = \{(1 + t, 2 + t, 3 + t) \in \mathbb{R}^3,\ \ t \in \mathbb{R}\}$. ✓
   (c) l'asse y. ○
   (d) $r = \{(1 - t, 2 + t, 3 - t) \in \mathbb{R}^3,\ \ t \in \mathbb{R}\}$. ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

2. (1 affermazione corretta, 2 punti) Si consideri la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\gamma(t) = \left(1, -t, \frac{t^2}{2}\right), \qquad t \in [0, \sqrt{3}]$$

   (a) Γ è parametrizzata alla lunghezza d'arco. ○
   (b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{y}{(1 + 2z)^{3/2}} ds = 0$. ○
   (c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{y}{(1 + 2z)^{3/2}} ds = \ln \sqrt{3}$. ○
   (d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{y}{(1 + 2z)^{3/2}} ds = -\ln 2$. ✓
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

3. (1 affermazione corretta; 2 punti) Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.

   (a) Se f è integrabile, allora la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ è derivabile su $[0, 1]$. ○
   (b) se f è integrabile allora f è continua. ○
   (c) Se f è continua, allora la funzione $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$ è derivabile su $[0, 1]$. ✓
   (d) Se f è integrabile e $\int_0^1 f(t)dt = 0$, allora f è identicamente nulla. ○
   (e) f è integrabile su $[0, 1]$. ○

---

4. (1 affermazione corretta, 2 punti) L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \log(1+4x^2)}{(1+x^3)x^\alpha}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

converge se

(a) $\alpha > 0$. ○
(b) $\alpha < 3$. ○
(c) $0 < \alpha < 3$. ✓
(d) $\alpha > 3$. ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

5. (1 affermazione corretta, 1 punto) Si consideri la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}.$$

(a) La serie converge assolutamente e non è convergente. ○
(b) La serie non è assolutamente convergente. ✓
(c) La serie diverge a $-\infty$. ○
(d) Tutte le altre affermazioni sono false. ○

---

6. (1 affermazione corretta, 1 punto) Si consideri la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}.$$

(a) La serie è convergente e assolutamente convergente. ✓
(b) La serie non è convergente. ○
(c) La serie diverge a $+\infty$. ○
(d) Tutte le altre affermazioni sono false. ○

---

7. (1 affermazione corretta, 1 punto) Poniamo:

$$F(x) = \int_0^{3x} e^{1+t^2}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) $F'(x) = 3e^{1+9x^2}$ ✓
(b) $F'(x) = e^{1+9x^2}$ ○
(c) $F'(x) = 3e^{1+x^2}$ ○
(d) $F'(x) = e^{1+x^2}$ ○
(e) Tutte le altre affermazioni sono false. ○

Parte seconda: Esercizio e questione teorica. (12 punti)

Poniamo:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2+1}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) Determinare zeri, segno e asintoti di f.

b) Calcolare la derivata f' e stabilire dove f non è derivabile. Determinare i punti di massimo e di minimo locale.

c) Disegnare un grafico qualitativo della funzione f. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Ma è richiesto che il grafico tenga conto delle informazioni che sono state ricavate a prescindere dalla derivata seconda. In particolare, si studi il grafico vicino ai punti in cui f *non* è derivabile.)

d) Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x^2+1}\, dx$$

e) Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Dall'ipotesi:

IPOTESI 1	$\exists r \in (0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sqrt[n]{a_n} < r$

cosa segue, riguardo alla convergenza? E dall'ipotesi:

IPOTESI 2	*Per infiniti n,* $\quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1$

cosa segue? Dimostrare quanto si afferma con chiarezza e rigore.

SOLUZIONE

(a) Zeri: $x = -2$. Segno: $f(x) > 0$ se, e solo se, $x > -2$; Asintoti: $y = 0$ asintoto a $\pm\infty$.
(b) Se $x \neq -2$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{-x^2-4x+1}{3(x^2+1)^2}.$$

Nel punto $x_0 = -2$, la funzione f non è derivabile e

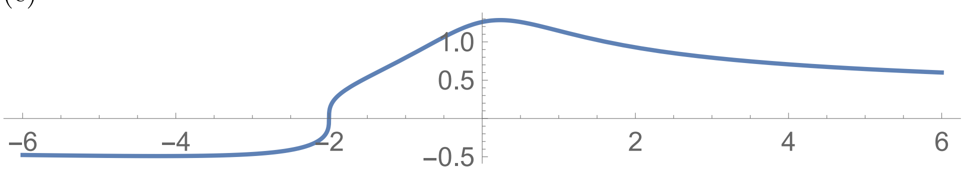
$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = +\infty = \lim_{x \to -2^-} f'(x)$$

La derivata si annulla esattamente nei punti in cui $-x^2 - 4x + 1 = 0$:

$$x_1 = -2-\sqrt{5}, \qquad x_2 = -2+\sqrt{5}$$

x_1 è punto di minimo locale; x_2 è punto di massimo locale.

(c)



(d)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}} + 2\Big[\arctan x\Big]_0^{\sqrt{3}} = \ln 2 + \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

(e) Dall'ipotesi 1 segue subito:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad a_n < r^n$$

Siccome la serie geometrica $\sum_n r^n$, con $0 < r < 1$, è convergente, per il criterio del confronto anche $\sum_n a_n$ è convergente.

Dall'ipotesi 2 segue che, per infiniti n, si ha

$$a_n \geq 1$$

e quindi la successione a_n non è infinitesima. Dunque, la serie $\sum_n a_n$ non è convergente (perché se una serie $\sum_n a_n$ è convergente, si ha $\lim_n a_n = 0$). Allora $\sum_n a_n$, dal momento che è una serie a termini positivi, diverge a $+\infty$.