Questionario 6
Analisi e Geometria 1
09/11/2020

Indice

1 Esercizi: domande a risposta multipla

Esercizio 1.1. *Sia* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una qualunque funzione suriettiva. Allora:*

a) f *è strettamente monotòna.*

b) f *non è iniettiva.*

c) L'immagine di f *non è limitata.*

d) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

e) f *è invertibile.*

Esercizio 1.2. *Sia* $(0, 4) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una qualunque funzione derivabile. Allora:*

a) $\exists c \in (0, 4) \quad f'(c) = 0$

b) f *assume in* $(0, 4)$ *il valore minimo assoluto.*

c) Esiste un'estensione continua di f *all'intervallo chiuso* $[0, 4]$.

d) f *è limitata.*

e) $\exists c \in (0, 3) \quad f(3) - f(1) = f'(c)\,2$

Esercizio 1.3. *Sia a_n una qualunque successione in $\mathbb{R}$, strettamente crescente, tale che $a_n > 0$ per ogni n in N. Allora:*

a) a_n *è convergente.*

b) $\frac{1}{a_n}$ *è convergente.*

c) $a_n \to +\infty$

d) $a_n \to 0$

e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio 1.4. *La funzione* $(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \log_e(x)$,

a) ammette a $+\infty$ *asintoto obliquo* $y = x$.

b) ammette a $+\infty$ *asintoto obliquo* $y = x - 1$.

c) ammette a $+\infty$ *asintoto obliquo* $y = x + 1$.

d) non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.

e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio 1.5. *Il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1 + x^3) + e^{x^3} - 1}{\sin(x^3)}$$

vale

a) 0

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio 1.6. *Sia S l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

a) S *è l'insieme vuoto.*

b) S *contiene infiniti elementi.*

c) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

d) Se $w \in S$*, allora* $(e^{i\frac{\pi}{2}})\, w \in S$.

e) $e^{i\frac{\pi}{4}} \in S$.

Esercizio 1.7. *Il numero complesso*

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{17}$$

è uguale a

a) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

e) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

Esercizio 1.8. *Poniamo* $f(x) = \arcsin x$*. La derivata della funzione composta* $x \to f(f(x))$ *(dove essa è definita) è:*

a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\arcsin(x))^2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) 1

d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\sin(x))^2}}$

e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 1.9. *La funzione* $(0,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*,* $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

a) è strettamente decrescente.

b) *è strettamente crescente.*

c) *Nessuna delle altre affermazioni è corretta.*

d) *è limitata.*

e) *è concava.*

Esercizio 1.10. *Sia* f *una funzione tale che* $f(0) = 0,\ f'(0) = 3$. *Allora*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{-1+\sqrt{1+2x}}$$

a) *non esiste.*

b) *vale* $\frac{1}{3}$

c) *vale* 3

d) *vale* 0

e) *Nessuna delle altre risposte è corretta.*

2 Risposte corrette

Esercizio 1 *c*) L'immagine di f non è limitata.

f limitata significa che $\mathtt{Im}(f)$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Se f è suriettiva, $\mathtt{Im}(f) = \mathbb{R}$, che non è limitato.

Esercizio 2 *e*) $\exists c \in (0,3) \quad f(3) - f(1) = f'(c)\,2$

La restrizione di f all'intervallo chiuso $[0,3]$ soddisfa, su tale intervallo, le ipotesi del teorema di Lagrange (del valore medio). Pertanto: $\exists c \in (0,3) \quad f(3) - f(1) = f'(c)\,2$

Esercizio 3 *b*) $\frac{1}{a_n}$ è convergente.

Poiché $a_n > 0$, si ha $0 < \frac{1}{a_n}$, e pertanto $\frac{1}{a_n}$ è inferiormente limitata. Poiché a_n è strettamente crescente, $\frac{1}{a_n}$ è strettamente decrescente. Quindi $\frac{1}{a_n}$, essendo una successione in $\mathbb{R}$ strettamente monotòna e limitata, è convergente.

Esercizio 4 *d*) non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.

1) Per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$; 2) Per $x \to +\infty$, $f(x)/x \to 1$; 3) Per $x \to +\infty$, $f(x) - x = \log_e(x)$ non tende a un limite finito.

Esercizio 5 *d*) 2

Per $x \to 0$:

$\sin(x^3) = x^3 + o(x^3) \qquad log_e(1+x^3) = x^3 + o(x^3) \qquad e^{x^3} = 1 + x^3 + o(x^3)$

Allora,

$$\lim_{x\to 0} \frac{log_e(1+x^3) + e^{x^3} - 1}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + +o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = 2$$

Esercizio 6 *d*) Se $w \in S$, allora $(e^{i\frac{\pi}{2}})\,w \in S$.

L'insieme S delle soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = i (= e^{i\frac{\pi}{2}})$ è costituito da quattro numeri complessi che stanno sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Tali soluzioni sono vertici di un quadrato: l'angolo tra due vertici consecutivi è $\pi/2$. La moltiplicazione per $(e^{i\frac{\pi}{2}})$ è una rotazione di $\pi/2$. Quindi, se $w \in S$, allora $(e^{i\frac{\pi}{2}})\,w \in S$.

Esercizio 7 *c*) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{17} = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{17} = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{16}(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = (e^{-i4\pi})(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 1e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 8 *a*). $D \arcsin(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\arcsin(x))^2}}$

Esercizio 9 $(0,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(1+1/x) > 0$ per ogni $x \in (0,+\infty)$. Siccome il dominio $x \in (0,+\infty)$ è un intervallo, la funzione f è strettamente crescente.

Esercizio 10 *c*) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{-1+\sqrt{1+2x}} = 3$

Sia f una funzione tale che $f(0) = 0,\ f'(0) = 3$. Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{-1+\sqrt{1+2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0)+f'(0)x+o(x)}{-1+1+\frac{1}{2}2x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{x+o(x)} = 3$$