Questionario 5 (2020/11/05). Risposte.

1.

Sia $(0,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una qualunque funzione iniettiva. Allora:

(a) f non è suriettiva.
(b) l'immagine di f non è limitata.
(c) $e^f : (0,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \to e^{f(x)}$, è iniettiva. ✓
(d) $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.
(e) Le altre affermazioni non sono corrette.

Commento.

(a) Controesempio: $\log_e$.

(b), (d) Controesempio: $(0,+\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $x \to g(x) = e^{-x}$.

(c) Per ogni $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$,

$$x_1 \neq x_2 \xRightarrow[(f \text{ iniettiva})]{} f(x_1) \neq f(x_2) \xRightarrow[(\exp \text{ iniettiva})]{} e^{f(x_1)} \neq e^{f(x_2)}$$

Dunque, e^f è iniettiva. (Allo stesso modo si dimostra, più in generale, che la composizione di funzioni iniettive è iniettiva.)

2.

Poniamo $I = [0,1]$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua. Allora:

(a) $(\exists x_0 \in I)\,(\forall x \in I) \quad f(x_0) \leq f(x)$ ✓
(b) l'immagine di f non è limitata.
(c) Esiste un $c \in (0,1)$ tale che f è derivabile in c e $f'(c) = 0$.
(d) Le altre affermazioni non sono corrette.
(e) $\exists c \in I \quad f(c) = 0$

Commento.

(a) Vera per il Teorema di Weierstrass.

(b) Falsa per il Teorema di Weierstrass.

(c) Controesempio: $f(x) = x$.

(e) Controesempio: la funzione costante $f(x) = 1$ per ogni $x \in [0, 1]$

3.

Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni qualunque, soddisfacenti:

$$\text{per } x \to +\infty \qquad f(x) \to +\infty, \quad g(x) \to +\infty$$

Allora:

(a) $f(x) \sim g(x)$, per $x \to +\infty$.
(b) $(f(x) - g(x)) \to 0$, per $x \to +\infty$
(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste finito.
(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste.
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ✓

Commento.

(a), (c) Controesempio: $f(x) = x^2, g(x) = x$.

(b) Controesempio: $f(x) = x + \log x,\ g(x) = x$.

(d) Controesempio: $f(x) = x + 1,\ g(x) = x$.

4.

Poniamo $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x + \sin x} \qquad x \neq 0$$

(a) $f(x)$ ammette asintoto $y = x$ a $+\infty$.

(b) f è dispari ed esiste un'estensione continua di f a $\mathbb{R}$.
(c) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.
(d) f non ha asintoti orizzontali.
(e) f è pari ed esiste un'estensione continua di f a $\mathbb{R}$. ✓

Commento.

(e) Per ogni x, $f(-x) = f(x)$ e $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin x} = \frac{1}{2}$

5.

Il valore di: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - \cos x}{\log_e(1+x^2)}$ è

(a) 1
(b) $\frac{3}{2}$ ✓
(c) 3
(d) 0
(e) Le altre risposte sono sbagliate.

Commento. (b) Per $x \to 0$:

$\log_e(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$,

$e^{(x^2)} = 1 + x^2 + o(x^2)$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$.

Allora, per $x \to 0$:

$$\frac{e^{(x^2)} - \cos x}{\log_e(1+x^2)} = \frac{1 + x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \to \frac{3}{2}$$

6.

Sia S l'insieme delle soluzioni complesse dell'equazione $z^6 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

(a) Se $w \in S$, anche il coniugato di w sta in S.

(b) S contiene infiniti numeri complessi.
(c) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ✓
(d) Se $w \in S$, allora $e^{i\frac{\pi}{6}}w$ appartiene a S.
(e) S contiene $e^{i\frac{\pi}{4}}$

COMMENTO.

(a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Se $w^6 = i$, allora $(\overline{w})^6 = (\overline{w^6}) = \overline{i} = -i$. Quindi $\overline{w} \notin S$.

(b) Le radici complesse n-esime di un qualunque numero complesso (non nullo) sono n, se contate con la dovuta molteplicità.

(d) Se $w \in S$, cioè $w^6 = i$, allora $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}w\right)^6 = e^{i\pi}w^6 = (-1)(i) = -i$. Pertanto, $e^{i\frac{\pi}{6}}w \notin S$. Interpretazione geometrica: le sei radici seste di i stanno sulla circonferenza unitaria di centro l'origine e sono i vertici di un esagono regolare. Se w è uno qualunque dei vertici dell'esagono, $e^{i\alpha}w$ è vertice dello stesso esagono se, e solo se, $\alpha = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto, la rotazione $w \to e^{i\frac{\pi}{6}}w$ non manda radici in radici.

(e) $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \neq i$.

7.

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{21}$

(a) Nessuna delle altre risposte è corretta.
(b) -1
(c) i
(d) 1
(e) $-i$ ✓

COMMENTO.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{21} = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^{21} = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{21} (-i)^{21} = (-i)^{20}(-i) = 1(-i) = -i$$

8.

Poniamo $f(x) = \arctan(x)$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$. La derivata di $(g \circ f)(x)$ è:

(a) $\frac{1}{3\sqrt[3]{(\arctan\ x)^2}} \frac{1}{1+x^2}$ ✓
(b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{(\arctan\ x)^2}}$
(c) $\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$
(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

9.

Sia f una funzione tale che $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$. Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{-1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

(a) non esiste
(b) -6 ✓
(c) 3
(d) 0
(e) Le altre risposte non sono corrette.

Commento. Per $x \to 0$,

$$\frac{f(x)}{-1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + o(x^2)}{-1 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{3x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \to -6$$

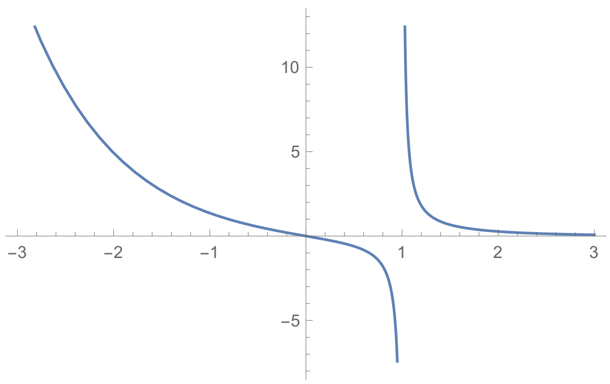
10.

La funzione $f : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x-1}$

(a) è strettamente crescente sul suo dominio.
(b) è iniettiva

(c) ha un asintoto obliquo a $-\infty$
(d) ha un'estensione continua a tutto $\mathbb{R}$.
(e) non è strettamente monotòna sul suo dominio. ✓

Commento. $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2-x+1)}{(x-1)^2} < 0$ per ogni $x \neq 1$. Quindi, f è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 1)$ e strettamente decrescente sull'intervallo $(1, +\infty)$. Ma questo fatto non implica che f sia strettamente decrescente sul suo dominio $(-\infty, 1) \cup 1, +\infty)$ (che non è un intervallo).



$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x-1}$.

Occorre allora disegnare un grafico qualitativo della funzione. Si vede subito che f ha in $x_0 = 1$ un asintoto verticale (e pertanto non ammette estensione continua a $\mathbb{R}$): $f(x) \to -\infty$ per $x \to -1^-$ e $f(x) \to +\infty$ quando $x \to -1^+$. Quindi, vicino a -1 ci sono punti x_1, x_2 tali che $x_1 < 1 < x_2$ e $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Quindi f non è strettamente decrescente sul suo dominio. (Infatti, ricordiamo che una funzione g si dice strettamente crescente se: $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f), \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$) Inoltre, si vede dal grafico che la funzione non è iniettiva: per ogni $y > 0$, esistono infatti due distinti x_1, x tali che $f(x_1) = f(x_2) = y$.