Questionario 2
Risposte

1.

Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$ crescente, con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

(a) a_n diverge a $+\infty$.
(b) $\frac{2}{a_n}$ converge. ✓
(c) a_n è infinitesima.
(d) nessuna delle altre risposte.

COMMENTO. Se a_n è crescente, e $a_n > 0$, $\frac{2}{a_n}$ è una successione decrescente di numeri positivi (quindi inferiormente limitata). Per il teorema sulle successioni monotòne, $\frac{2}{a_n}$ converge (all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini).

2.

Il quadrato del numero complesso $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}$ vale:

(a) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}$ ✓
(b) $\frac{i}{\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
(d) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

COMMENTO. $\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

3.

Una funzione $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ che sia continua e assuma solo valori razionali:

(a) non esiste.
(b) è iniettiva.
(c) è costante. ✓
(d) è strettamente monotòna.

COMMENTO. Se f è continua, l'immagine $f(J)$ è un intervallo (per il teorema dei valori intermedi). Se un intervallo di $\mathbb{R}$ contiene due punti distinti a, b, $a < b$, contiene (infiniti) irrazionali, perché gli irrazionali sono densi in $\mathbb{R}$. Dunque, se $f(J)$ non contiene irrazionali, non può contenere due punti distinti, cioè $f(J)$ deve ridursi a un solo numero razionale. Pertanto, f è costante.

4.

Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$ crescente, con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

(a) a_n è convergente oppure diverge a $+\infty$. ✓
(b) a_n converge.
(c) a_n è infinitesima.
(d) nessuna delle altre risposte.

5.

Dire quale dei seguenti numeri complessi è radice cubica di $1 + i$:

(a) $\sqrt[6]{2}$
(b) $e^{3\pi i}$
(c) $\frac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}$ ✓
(d) nessuno degli altri tre.

6.

Stabilire le eventuali simmetrie delle seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \log(1 + |x|) + x^4\,, \qquad g(x) = 1 + x^6\,, \qquad h(x) = \arctan(x^3)\,.$$

(a) tutte pari.
(b) tutte dispari.
(c) f e g pari, h dispari. ✓
(d) f e g pari, h né pari né dispari.

COMMENTO. $h(x) = \arctan(x^3)$ è composizione di due funzioni dispari, quindi è dispari.

7.

Definiamo $A \xrightarrow{f} B$ nel modo seguente: $A = [0,1) \cup [2,3]$; $B = [0,2]$; per ogni $x \in A$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(a) f è continua e non invertibile.
(b) f è continua e invertibile. ✓
(c) f non è continua e non è suriettiva.
(d) f non è continua e non è iniettiva.

Commento. La funzione f è continua su $A = [0,1) \cup [2,3]$, in quanto è continua in ogni punto di A. Inoltre, si vede facilmente che è invertibile (iniettiva e suriettiva).

Attenzione. Non ci si lasci trarre in inganno: una funzione può essere continua anche se il suo dominio non è "connesso", (grosso modo, non è fatto da un "unico pezzo") e può essere continua anche se il suo grafico non è "connesso". Un esempio (oltre al presente esercizio) è dato dalla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, con dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e codominio $\mathbb{R}$. Tale funzione sul suo dominio è continua.

8.

Determinare l'estremo inferiore dell'insieme dei termini della successione

$$a_n = \log_e \left(\frac{n+3}{n+1} \right) .$$

(a) 0 ✓
(b) 1
(c) $\log_e 3$
(d) $\log_e 2$

Commento. $\left(\frac{n+3}{n+1}\right) = 1 + \frac{2}{n+1}$ è decrescente. Essendo $\log_e$ crescente, $a_n = \log_e \left(\frac{n+3}{n+1}\right)$ decrescente. L'estremo inferiore dei suoi termini $\log_e 1 = 0$.

9.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) è continua in 0 se $c = 1$.
(b) per qualunque $c \in \mathbb{R}$ non è continua in 0.
(c) per qualunque $c \in \mathbb{R}$ è continua in 0.
(d) è continua in 0 se $c = 0$. ✓

Commento. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

10.

Sia A l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z+i| = |z-2i|$ nel campo dei numeri complessi. Allora,

(a) $i \in A$.
(b) $-\frac{i}{2} \in A$.
(c) è una retta del piano di Gauss. ✓
(d) $A = \emptyset$ (insieme vuoto).

Commento. Se $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $|z - z_0|$ è la distanza tra z e z_0 sul piano di Gauss. L'uguaglianza $|z + i| = |z - 2i|$ dice allora che z è equidistante dai due punti $-i$ e $2i$. Dunque, il luogo dei punti del piano complesso soddisfacenti $|z + i| = |z - 2i|$ è l'asse del segmento di estremi $-i$ e $2i$, ossia la retta $y = \frac{1}{2}$. Facciamo una verifica diretta. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|z+i| = |z-2i| \leftrightarrow |z+i|^2 = |z-2i|^2 \leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = x^2+(y-2)^2 \leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Quindi, l'insieme delle soluzioni di $|z + i| = |z - 2i|$ è la retta $y = \frac{1}{2}$.