Cognome:	Nome:	Nº iscrizione:
Matricola:	Analisi e Geometria 1 $\boxed{\text{A}}$ Prima Prova (4/11/2022)	Punteggio finale:

$\boxed{\text{Questionario}}$ (Totale: 4 punti)

Segnare le risposte corrette

1. Consideriamo il sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ definito nel modo seguente:

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}$$

(a) $\inf A = 3$ ○
(b) $\inf A = e$ ○
(c) $\inf A = 1/e^2$ ✓
(d) $\inf A = 1/e$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

2. *(1 risposta corretta)* Nel campo complesso, le soluzioni dell'equazione $z^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4$

(a) coincidono con le soluzioni dell'equazione: $z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2$ ○
(b) coincidono con le soluzioni dell'equazione: $z^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2$ ○
(c) hanno tutte parte reale nulla. ○
(d) hanno tutte parte immaginaria nulla. ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ✓

---

3. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), il numero complesso $\frac{1}{i}\,(\overline{z})^2$ è uguale a:

(a) $x^2 + y^2 + i(2xy)$ ○
(b) $2xy + i(x^2 + y^2)$ ○
(c) $-2xy + i(-x^2 + y^2)$ ✓
(d) $x^2 - y^2 + i(2xy)$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

4. *(1 risposta corretta)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha - \left(\dfrac{\alpha^2}{2}\right) x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è derivabile in $x = 0$ ○
(b) Non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale f_α sia derivabile in $x = 0$ ○
(c) f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$. ✓
(d) f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 0$. ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ (TOTALE: 6 PUNTI)

(A) Si consideri la funzione: $\boxed{f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$

(A).1 Calcolare: $L_1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) =$ e $L_2 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$: $\boxed{L_1 = \qquad\qquad L_2 = \qquad}$

(A).2 Scrivere la derivata: $f'(x) = \boxed{\qquad\qquad}$

(A).3 Determinare i *punti di massimo o minimo* locali di f (Specificare se siano di minimo o di massimo locale; non si chiede di calcolare il valore di f in tali punti).

$\boxed{\qquad\qquad}$

(B) Calcolare il limite: $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \log(1+x) - 1}{\cos(x) - 1}}$ *Risposta:* $\boxed{\qquad}$

<u>Inserire le risposte finali nelle 4 caselle di sopra.</u> Riportare sinteticamente i calcoli e le motivazioni. (Scrivere qui sotto, sul retro di questo foglio e sul retro del foglio precedente, se necessario). Riferitevi ai quesiti nominandoli: (A).1, (A).2, (A).3, (B).

(A).1

(Limite L_1) Poniamo $-1/x = t$. Allora:

$$L_1 = \lim_{x\to 0^-} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$$

(Limite L_2) Per $x \to 0^+$, $x^2 \to 0$ e $e^{-\frac{1}{x}} \to 0$. Quindi non si ha una forma di indeterminazione e il limite del prodotto è il prodotto dei limiti:

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \times 0 = 0$$

(A).2 $f'(x) = 2xe^{-\frac{1}{x}} + x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}(1+2x)$

(A).3 La derivata si annulla solo in $x = -\frac{1}{2}$, che è un punto di minimo locale.

(B) Per $x \to 0$,

$$\frac{e^x - \log(1+x) - 1}{\cos(x) - 1} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \to -2$$

Commento al limite (B).

Per $x \to 0$, bisogna confrontare il numeratore $e^x - \log(1+x) - 1$ con il denominatore $-\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ in cui figura un $o(x^2)$. Quindi, nello studio del numeratore, occorre tenere conto di *tutti i termini fino all'ordine 2 incluso*. Quindi, non è corretto (ad esempio) usare (per $x \to 0$) le equivalenze asintotiche $e^x - 1 \sim x$, $\log(1+x) \sim x$ e *sostituire* nel numeratore:

$$\frac{e^x - \log(1+x) - 1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \sim \frac{x - x}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 0 \qquad \text{SBAGLIATO!}$$

Infatti, quando si usano in questo modo gli asintotici, si trascurano gli infinitesimi di ordine 2, che invece qui occorre considerare. Per fare un altro esempio (visto a lezione), da $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, non è lecito dedurre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \qquad \text{SBAGLIATO!}$$

$\boxed{\text{TEORIA}}$ (TOTALE: 4 PUNTI)

a) Dimostrare il seguente:

TEOREMA
IPOTESI: *I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ derivabile, $f' < 0$ su I.*
TESI: *f strettamente decrescente su I.*

b) Mostrare *con un controesempio* che l'ipotesi che il dominio sia un *intervallo* è essenziale.

Scrivere qui sotto (e sul retro di questo foglio, se necessario).