

Cognome:	Nome:	N° iscrizione:
Matricola:	Analisi e Geometria 1 B	Voto:
	Prova 2 (09/01/2023)	

QUESTIONARIO (TOTALE: 6 PUNTI)

1. Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.
 - (a) Se f è integrabile e $\int_a^b f(x) dx = 0$, allora $\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$
 - (b) Se f non è continua, allora f non è integrabile.
 - (c) Se f è strettamente monotona, allora f è integrabile.
 - (d) Se f è integrabile, allora f è strettamente monotona.
 - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

2. La funzione $G(x) = \int_0^{x^3} t dt$, $x \in \mathbb{R}$:
 - (a) non è derivabile in 0.
 - (b) non è continua in 0.
 - (c) per ogni $x \in \mathbb{R}$ è derivabile e $G'(x) = x^3$.
 - (d) per ogni $x \in \mathbb{R}$ è derivabile e $G'(x) = 3x^5$.
 - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

3. La serie numerica $\sum_1^{+\infty} \sin \frac{1}{n^a}$, con $a > 0$, converge se, e solo se:
 - (a) $a < 1/2$.
 - (b) $a > 1$.
 - (c) $a < 1$.
 - (d) $a \geq 1$.
 - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

4. La funzione $f(x) = \frac{x^2 + x}{(x^4 + 1)(\sqrt{x^2 + x})}$, sull'intervallo $(0, +\infty)$,
 - (a) è integrabile in senso generalizzato in un intorno destro di 0, ma non a $+\infty$.
 - (b) è integrabile in senso generalizzato a $+\infty$, ma non in un intorno destro di 0.
 - (c) è integrabile in senso generalizzato sia in un intorno destro di 0 sia a $+\infty$.
 - (d) non è integrabile in senso generalizzato né in un intorno destro di 0, né a $+\infty$.

5. In \mathbb{R}^3 , il piano passante per il punto $P_0 = (1, 2, 0)$ e perpendicolare alla retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, -1, 3)$, ha equazione cartesiana:
 - (a) $x + y - z + 2 = 0$
 - (b) $x + 2y - 5 = 0$
 - (c) $x + y - z - 3 = 0$
 - (d) $x + y - z = 0$
 - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

6. Sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di \mathbb{R}^3 . Il prodotto vettoriale $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$ è:
 - (a) $-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
 - (b) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
 - (c) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
 - (d) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$
 - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Inserire le risposte nelle caselle. *Riportare sinteticamente i calcoli e le motivazioni di ogni ogni esercizio qui sotto, sul retro di questo foglio e sul retro del foglio precedente, se necessario. (Riferitevi ai quesiti nominandoli: Esercizio 1,2,3).*

ESERCIZIO 1 Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{x + \log(1 + 3x)}{(1 + x^3)x^a} dx$ è convergente sia in un intorno destro di 0 sia a $+\infty$.

Risposta:

ESERCIZIO 2 Stabilire per quali valori $a \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{a^n}$ è convergente.

Risposta:

ESERCIZIO 3 Scrivere un'equazione cartesiana per il piano \mathcal{P} passante per il punto $A = (0, 1, 0)$ e parallelo alle due direzioni individuate dai $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$.

Risposta:

1. Enunciare con precisione e dimostrare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*. (L'enunciato deve includere: la derivata della funzione integrale; la *Formula di Newton-Leibniz* per l'integrale definito.)
2. Dare un esempio esplicito (con definizione analitica precisa e grafico) di una funzione f che sia integrabile sull'intervallo $[0, 1]$, ma la cui funzione integrale $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ non sia derivabile. Si deve *dimostrare* che la funzione integrale G non è derivabile in $[0, 1]$. Oppure, si spieghi perché un tale esempio non esiste.

Scrivere qui sotto (e sul retro di questo foglio, se necessario).