Cognome:	Nome:	Nº iscrizione:
Matricola:	**Analisi e Geometria 1** A **Prova 2 (09/01/2023)**	Voto:

QUESTIONARIO (TOTALE: 6 PUNTI)

1. Sia $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.
   (a) Se f è integrabile e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$ ○
   (b) Se f non è continua, allora f non è integrabile. ○
   (c) Se f è strettamente monotòna, allora f è integrabile. ✓
   (d) Se f è integrabile, allora f è strettamente monotòna. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

2. La funzione $G(x) = \int_0^{x^2} t\,dt$, $x \in \mathbb{R}$:
   (a) non è derivabile in 0. ○
   (b) non è continua in 0. ○
   (c) per ogni $x \in \mathbb{R}$ è derivabile e $G'(x) = x^2$. ○
   (d) per ogni $x \in \mathbb{R}$ è derivabile e $G'(x) = x^3$. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ✓

3. La serie numerica $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^a}\right)$, con $a > 0$, converge se, e solo se:
   (a) $a < 1/2$. ○
   (b) $a > 1/2$. ✓
   (c) $a > 1$. ○
   (d) $a \leq 1$. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x^4+1)(\sqrt{x^2+x})}$, $x \in (0, +\infty)$, è integrabile (o lo è in senso generalizzato):
   (a) in un intorno destro di 0, ma non a $+\infty$. ○
   (b) a $+\infty$, ma non in un intorno destro di 0. ○
   (c) sia in un intorno destro di 0 sia a $+\infty$. ✓
   (d) né in un intorno destro di 0, né a $+\infty$. ○

5. In $\mathbb{R}^3$, il piano passante per il punto $P_0 = (1,1,1)$ e perpendicolare alla retta passante per i punti $A = (1,0,2)$ e $B = (0,-1,3)$, ha equazione cartesiana:
   (a) $x + y - z + 1 = 0$ ○
   (b) $x + 2y - 5 = 0$ ○
   (c) $x + y - z - 3 = 0$ ○
   (d) $x + y - z = 0$ ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ✓

6. Sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Il prodotto vettoriale $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$ è:
   (a) $-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ○
   (b) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ○
   (c) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ○
   (d) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ✓
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

ESERCIZI (TOTALE: 6 PUNTI)

Inserire le risposte nelle caselle. *Riportare sinteticamente* **i calcoli e le motivazioni di ogni ogni esercizio** *qui sotto, sul retro di questo foglio e sul retro del foglio precedente, se necessario. (Riferitevi ai quesiti nominandoli: Esercizio 1,2,3).*

ESERCIZIO 1 Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x + \log(1+3x)}{(1+x^2)x^a}\,dx$ è convergente sia in un intorno destro di 0 sia a $+\infty$.

Risposta: $0 < a < 2$

ESERCIZIO 2 Stabilire per quali $a\mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ è convergente.

Risposta: Converge per ogni $a \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 3 Scrivere un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{P}$ passante per il punto $A = (0, 2, 0)$ e parallelo alle due direzioni individuate dai $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$.

Risposta: $x - 2y + z + 4 = 0$

$\boxed{\text{TEORIA}}$ (TOTALE: 6 PUNTI)

1. Enunciare con precisione e dimostrare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*. (L'enunciato deve includere: la derivata della funzione integrale; la *Formula di Newton-Leibniz* per l'integrale definito.)

2. Dare un esempio esplicito (con definizione analitica precisa e grafico) di una funzione f che sia integrabile sull'intervallo $[0, 1]$, ma la cui funzione integrale $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ *non sia derivabile*. Si deve *dimostrare* che la funzione integrale G non è derivabile in $[0, 1]$. Oppure, si spieghi perché un tale esempio non esiste.

Scrivere qui sotto (e sul retro di questo foglio, se necessario).