Esercizio

In $\mathbb{R}^3$*, siano dati i vettori* $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$*,* $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$*. Poniamo*

$$S = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}\} \qquad (1)$$

1. *Risolvere l'equazione* $\mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}$*. (Cioè, trovare tutti i vettori* $\mathbf{y} \in S$*).*
2. *Risolvere l'equazione* $\mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$*.*
3. *Che tipo di figura di* $\mathbb{R}^3$ *è l'insieme* S*? (Un insieme finito di vettori? Una retta? Un piano?..)*

SOLUZIONE (1) Si noti che **a** e **b** sono ortogonali. (Se **a** e **b** non fossero ortogonali, non ci sarebbero soluzioni, per definizione di prodotto vettoriale.) Poniamo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$; $\mathbf{a} \times \mathbf{y} = (y_2, -y_1 - y_3, y_2)$; quindi $\mathbf{y}$ è soluzione di $\mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}$ se, e solo se,

$$\begin{cases} y_2 = 1 \\ -y_1 - y_3 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y_1 = -2 - t \\ y_2 = 1 \\ y_3 = t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. (Una retta.)
(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{y} = 0$ se, e solo se, **a** e **y** sono paralleli, ossia $\mathbf{y} = t(1, 0. - 1)$, $t \in \mathbb{R}$. (Una retta vettoriale passante per l'origine).
(3) Le soluzioni di $\mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}$ costituiscono una retta (che si ottiene traslando la retta vettoriale $t(-1, 0.1)$, $(t \in \mathbb{R})$ (soluzione dell'equazione omogenea), di un vettore $(-2, 1, 0)$ (una soluzione particolare).

OSSERVAZIONE L'operatore $\mathbf{y} \to \mathbf{a} \times \mathbf{y}$ è lineare. Allora è chiaro quale sia la struttura dello spazio delle soluzioni (si pensi alle equazioni differenziali lineari). (Lezione 13, Determinanti e prodotto vettoriale, Problema 4.17)