Esercizio

1. *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$y' + \left(\frac{2}{x}\right) y = 4x \qquad x \in (0, +\infty) \tag{1}$$

2. *Trovare la soluzione* $y^*(x)$ *del problema di Cauchy (ai valori iniziali)*

$$\begin{cases} y' + \left(\dfrac{2}{x}\right) y = 4x \\ y(1) = 3 \end{cases} \tag{2}$$

3. *Sull'intervallo* $(0, 1)$ *la soluzione* $y^*(x)$ *del problema di Cauchy* (2) *è integrabile in senso generalizzato?*

Soluzioni

1. L'equazione è lineare del primo ordine, cioè del tipo $y' + a(x)y = f(x)$. Qui $a(x) = \frac{2}{x}$, $A(x) = 2\log_e x$. (Non scriviamo $\log_e |x|$, perché $x > 0$.) La soluzione generale dell'omogenea associata è $Ce^{-A(x)} = Ce^{-2\log_e x} = \frac{C}{x^2}$. Una soluzione particolare è $y_p(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \frac{1}{x^2} \int (x^2) 4x dx = \frac{1}{x^2} x^4 = x^2$. La soluzione generale è $y(x) = \frac{C}{x^2} + x^2, \;\; C \in \mathbb{R}$.
2. La soluzione $y^*(x)$ del problema di Cauchy si ottiene imponendo: $\frac{C}{1^2} + 1^2 = 3$, cioè $C = 2$. Quindi $y^*(x) = \frac{2}{x^2} + x^2$.
3. In un intorno destro di 0, $y^*(x) \sim \frac{2}{x^2}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la soluzione $y^*(x)$ non è integrabile in senso generalizzato su $(0, 1)$.