Esercizio

2 Settembre 2021

Si consideri la funzione $\quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{artg} \frac{1}{x} + \log(1 + x^2) \qquad (x \neq 0)$$

1. Calcolare i limiti di f per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 0^{\pm}$ e determinare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali o obliqui).
2. Stabilire, motivando la risposta, se esista un'estensione continua di f a $\mathbb{R}$.
3. Calcolare la derivata f'. Trovare eventuali punti di massimo o minimo di f, specificando se siano punti di massimo (o minimo) locali o globali.
4. Calcolare la derivata seconda f''. Stabilire su quali intervalli f è convessa (concavità verso l'alto) o concava (concavità verso il basso).
5. Tracciare un grafico qualitativo di f.
6. Stabilire se l'integrale generalizzato

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

è convergente (cioè, stabilire se esiste finito).

Soluzioni

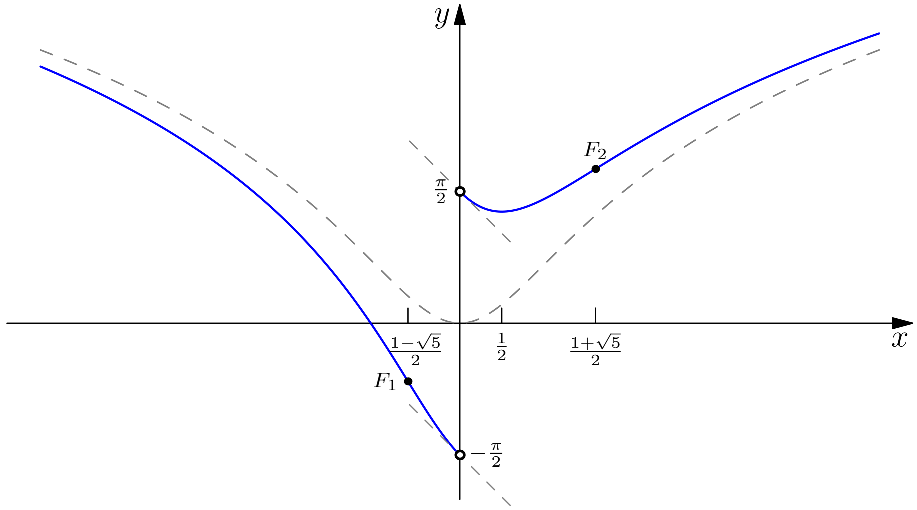
1.
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\,.$$
Pertanto, non ci sono asintoti verticali né orizzontali. Inoltre, essendo
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,,$$
non ci sono asintoti obliqui.

2. La funzione f è continua in ogni punto del suo dominio $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Poiché i due limiti
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
sono diversi, non esiste una estensione continua di f a tutto $\mathbb{R}$ (ossia, f non è prolungabile con continuità in 0).

3. La funzione f è derivabile in ogni punto del suo dominio $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(1/x)^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{-1+2x}{1+x^2}\,.$$
In particolare, si ha
$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = -1\,.$$
(Quindi, in $x=0$ la funzione f' è prolungabile con continuità ponendo $f'(0) = -1$.) Si ha $f'(x)\geq 0$ se e solo se $-1+2x\geq 0$, ossia $x\geq 1/2$, e $f'(x)=0$ se e solo se $x=1/2$. Quindi f è strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ e in $(0,1/2)$, mentre è strettamente crescente in $(1/2,+\infty)$. Pertanto, non ci sono punti di massimo e $x_0 = 1/2$ è punto di minimo (*a priori* locale). Stabiliamo ora se x_0 sia un punto di minimo assoluto (o globale). Ora si ha $f(x_0) = f(1/2) = \operatorname{artg} 2 + \log\frac{5}{4} > 0$ (perché $\operatorname{artg} 2 > 0$ e $\log\frac{5}{4} > 0$). Poiché la funzione f assume anche valori negativi, il valore minimo assunto in $x_0 = 1/2$ (è locale ma) non è assoluto.

4. Si ha
$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(-1+2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x-x^2)}{(1+x^2)^2}\,.$$
$f''(x)\geq 0$ se e solo se $x^2-x-1\leq 0$, ossia $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x<0$ o $0<x\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pertanto, la funzione f ha concavità rivolta verso l'alto nell'intervallo $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$ e nell'intervallo $(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, mentre ha ha concavità rivolta verso il basso nell'intervallo $(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ e nell'intervallo $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$. I punti $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sono punti di flesso.

5. Grafico di f:



6. La funzione integranda $g(x) = \frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}$ è continua e positiva sull'intervallo $[1, +\infty)$. Basta allora studiare l'integrabilità di g in un intorno di $+\infty$. Si ha

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \operatorname{artg} \frac{1}{x} + \frac{\log(1+x^2)}{x^2\sqrt{x}} \sim \frac{2\log x}{x^2\sqrt{x}} \leq \frac{2x}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2}{x^{3/2}}$$

essendo $\log x < x$ per ogni $x > 0$. Pertanto, la funzione g è integrabile a $+\infty$ (per i criteri del confronto e del confronto asintotico). Quindi l'integrale I esiste finito (è convergente).