

Cognome: _____

Nome: _____

Matricola: _____

Punteggio Totale: _____

Nr. di iscrizione: _____

Parte Prima: Questionario. (20 punti)

1. (1 affermazione corretta, 1 punto) Poniamo:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, 0 < \text{Im}(z) < \text{Re}(z)\}, \quad B = \{w \in \mathbb{C} \mid w = iz, z \in A\}$$

Allora, nel piano di Gauss:

- (a) A è contenuto nel secondo quadrante.
- (b) B è contenuto nel terzo quadrante.
- (c) $A \cup B$ è contenuto nel semipiano superiore.
- (d) $A \cup B$ è contenuto nel semipiano inferiore.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

2. (1 affermazione corretta; 1 punto) Definiamo
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- ,

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{x^2} - \beta & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per quale valore del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile due volte in $x = 0$?

- (a) $\beta = 0$.
- (b) $\beta = 2$.
- (c) $\beta = 1$.
- (d) $\beta = -1$.
- (e) Non esiste alcun $\beta \in \mathbb{R}$ che soddisfi la condizione richiesta.

3. (1 affermazione corretta; 1 punto) Data la funzione
- $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{2}$
- , allora

- (a) $\exists x \in (0, 1)$ tale che la retta tangente al grafico in $(x, f(x))$ è parallela all'asse x .
- (b) $\exists x \in (0, 1)$ tale che la retta tangente al grafico in $(x, f(x))$ è parallela all'asse y .
- (c) $\exists x \in (0, 1)$ tale che la retta tangente al grafico in $(x, f(x))$ è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
- (d) $\exists x \in (0, 1)$ tale che la retta tangente al grafico in $(x, f(x))$ è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

4. (1 affermazione corretta, 2 punti) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x) + 2 \ln \sqrt[3]{1+x^3}}{x^2(e^x - 1)}$ vale

- (a) -1 .
- (b) -2 .
- (c) 1 .
- (d) 2 .
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

5. (1 affermazione corretta, 1 punto) Sia S l'insieme delle soluzioni, nel piano complesso, dell'equazione:

$$z^2 + |z|^2 - 18 - 6i = 0$$

- (a) $S = \{3, -3\}$.
- (b) $S = \{3 + i, -3 - i\}$.
- (c) $S = \emptyset$
- (d) S è un insieme infinito.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

6. (1 affermazione corretta; 2 punti) La successione

$$a_n = (1 - \sqrt{n}) \left(e^{\frac{1}{2n+1}} - 1 \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

- (a) è limitata superiormente.
- (b) soddisfa: $a_n > 1$ definitivamente.
- (c) soddisfa: $a_n < -1$ definitivamente.
- (d) non è superiormente limitata.
- (e) non è inferiormente limitata.

7. (1 affermazione corretta; 2 punti) Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

- (a) f ammette asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \rightarrow +\infty$.
- (b) f ammette asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \rightarrow +\infty$.
- (c) f ammette asintoto obliquo $y = 2x - 1$ per $x \rightarrow +\infty$.
- (d) f ammette asintoto obliquo $y = 2x + 2$ per $x \rightarrow +\infty$.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

8. (1 affermazione corretta, 1 punto) La retta r contenente il punto $Q = (1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano π contenente i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ coincide con

- (a) l'asse x .
- (b) $r = \{(1 + t, 2 + t, 3 + t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$.
- (c) l'asse y .
- (d) $r = \{(1 - t, 2 + t, 3 - t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

9. (1 affermazione corretta, 2 punti) Si consideri la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\gamma(t) = \left(1, -t, \frac{t^2}{2}\right), \quad t \in [0, \sqrt{3}]$$

- (a) Γ è parametrizzata alla lunghezza d'arco.
- (b) $\int_{\Gamma} \frac{y}{(1 + 2z)^{3/2}} ds = 0$.
- (c) $\int_{\Gamma} \frac{y}{(1 + 2z)^{3/2}} ds = \ln \sqrt{3}$.
- (d) $\int_{\Gamma} \frac{y}{(1 + 2z)^{3/2}} ds = -\ln 2$.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

10. (1 affermazione corretta; 2 punti) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.

- (a) Se f è integrabile, allora la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è derivabile su $[0, 1]$.
- (b) se f è integrabile allora f è continua.
- (c) Se f è continua, allora la funzione $G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ è derivabile su $[0, 1]$.
- (d) Se f è integrabile e $\int_0^1 f(t) dt = 0$, allora f è identicamente nulla.
- (e) f è integrabile su $[0, 1]$.

11. (1 affermazione corretta, 2 punti) L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \log(1 + 4x^2)}{(1 + x^3)x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

converge se

- (a) $\alpha > 0$.
- (b) $\alpha < 3$.
- (c) $0 < \alpha < 3$.
- (d) $\alpha > 3$.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

12. (1 affermazione corretta, 1 punto) Si consideri la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}.$$

- (a) La serie converge assolutamente e non è convergente.
- (b) La serie non è assolutamente convergente.
- (c) La serie diverge a $-\infty$.
- (d) Tutte le altre affermazioni sono false.
-

13. (1 affermazione corretta, 1 punto) Si consideri la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}.$$

- (a) La serie è convergente e assolutamente convergente.
- (b) La serie non è convergente.
- (c) La serie diverge a $+\infty$.
- (d) Tutte le altre affermazioni sono false.
-

14. (1 affermazione corretta, 1 punto) Poniamo:

$$F(x) = \int_0^{3x} e^{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (a) $F'(x) = 3e^{1+9x^2}$
- (b) $F'(x) = e^{1+9x^2}$
- (c) $F'(x) = 3e^{1+x^2}$
- (d) $F'(x) = e^{1+x^2}$
- (e) Tutte le altre affermazioni sono false.

Parte seconda: Esercizio e questione teorica. (12 punti)

Poniamo:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2+1}} \quad x \in \mathbb{R}$$

- Determinare zeri, segno e asintoti di f .
- Calcolare la derivata f' e stabilire dove f non è derivabile. Determinare i punti di massimo e di minimo locale.
- Disegnare un grafico qualitativo della funzione f . (Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Ma è richiesto che il grafico tenga conto delle informazioni che sono state ricavate a prescindere dalla derivata seconda. In particolare, si studi il grafico vicino ai punti in cui f non è derivabile.)
- Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x^2+1} dx$$

- Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Dall'ipotesi:

$$\boxed{\text{IPOTESI 1} \quad \exists r \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{a_n} < r}$$

cosa segue, riguardo alla convergenza? E dall'ipotesi:

$$\boxed{\text{IPOTESI 2} \quad \text{Per infiniti } n, \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1}$$

cosa segue? Dimostrare quanto si afferma con chiarezza e rigore.

SOLUZIONE

- Zeri: $x = -2$. Segno: $f(x) > 0$ se, e solo se, $x > -2$; Asintoti: $y = 0$ asintoto a $\pm\infty$.
- Se $x \neq -2$,

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x+2}{x^2+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x+2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{x^2+1}{x+2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{-x^2-4x+1}{3(x^2+1)^2}.$$

Nel punto $x_0 = -2$, la funzione f non è derivabile e

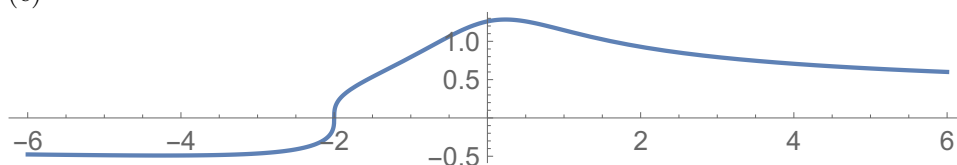
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x)$$

La derivata si annulla esattamente nei punti in cui $-x^2 - 4x + 1 = 0$:

$$x_1 = -2 - \sqrt{5}, \quad x_2 = -2 + \sqrt{5}$$

x_1 è punto di minimo locale; x_2 è punto di massimo locale.

-



(d)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} + 2 \left[\arctan x \right]_0^{\sqrt{3}} = \ln 2 + \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

(e) Dall'ipotesi 1 segue subito:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < r^n$$

Siccome la serie geometrica $\sum_n r^n$, con $0 < r < 1$, è convergente, per il criterio del confronto anche $\sum_n a_n$ è convergente.

Dall'ipotesi 2 segue che, per infiniti n , si ha

$$a_n \geq 1$$

e quindi la successione a_n non è infinitesima. Dunque, la serie $\sum_n a_n$ non è convergente (perché se una serie $\sum_n a_n$ è convergente, si ha $\lim_n a_n = 0$). Allora $\sum_n a_n$, dal momento che è una serie a termini positivi, diverge a $+\infty$.