

Cognome:	Nome:	N° iscrizione:
Matricola:	Analisi e Geometria 1 Appello 4 (7/07/2023)	Punteggio totale:

Questionario (10 punti)

Quesito 1. (1 risposta corretta)

La successione $a_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+7}}\right)\right) \cdot \sqrt{n+6}$

- (A) diverge a $+\infty$.
- ✓ (B) converge a 0.
- (C) non è limitata superiormente.
- (D) non è limitata inferiormente.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 2. (1 risposta corretta)

Siano $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2, \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$.

- (A) $A \cap B$ è un segmento sull'asse immaginario.
- ✓ (B) $A \cap B$ è un segmento sull'asse reale.
- (C) $A \cap B$ si riduce a un unico punto.
- (D) $A \cap B$ è vuoto.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 3. (2 risposte corrette)

Consideriamo il numero complesso $z = \frac{(1+i)^3}{\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4}$

- ✓ (A) $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$.
- (B) $\arg(z) = -\frac{5\pi}{12}$.
- (C) $\arg(z) = \pi$.
- ✓ (D) $|z| = (\sqrt{2})^3$.
- (E) $|z| = 2^3$.

Quesito 4. (1 risposta corretta)

Detta $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} - 2x$

- (A) tende a 0 per $x \rightarrow 0^+$.
- (B) tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.
- ✓ (C) ammette almeno uno zero.
- (D) è limitata superiormente.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 5. (1 risposta corretta)

Detta $f: (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \tan(x^2) \sin(\frac{1}{x^3}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- (A) f non è continua in $x = 0$.
- (B) f è continua ma non derivabile in $x = 0$.
- ✓ (C) f è derivabile in $x = 0$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 6. (1 risposta corretta)

Si consideri $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x \sin(x)}{x + e^{2x} - e^{3x}}$.

- (A) il limite vale 1.
- (B) il limite vale -1 .
- (C) il limite vale 0.
- (D) il limite non esiste in \mathbb{R} .
- ✓ (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 7. (1 risposta corretta)

L'integrale $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (\ln(x))^2 dx$ vale:

- ✓ (A) $\frac{7}{3}$.
- (B) $2e^2 - e$.
- (C) 1.
- (D) $e(e - 1)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 8. (1 risposta corretta)

Si consideri la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n^3 - 5 \sin(n)}{2^{n+1} + 4n}$.

- (A) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e il valore della somma è 0.
- (B) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non è convergente.
- (C) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.
- ✓ (D) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 9. (1 risposta corretta)

Si consideri la curva γ parametrizzata $\gamma(t) = (2\sqrt{2}t - \sin(t), 2\sqrt{2} \sin(t) + t, 3 \cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

- (A) La lunghezza di γ è 72π .
- ✓ (B) La lunghezza di γ è $\sqrt{18}(2\pi)$.
- (C) La lunghezza di γ è $\sqrt{2}(2\pi)$.
- (D) La lunghezza di γ è $\sqrt{18}\pi$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio 1. Studio di funzione (7 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

- (1) Determinare: (i) eventuali simmetrie; (ii) limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Eventuali simmetrie: f dispari. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

- (2) Scrivere la derivata f' (opportunamente semplificata) e determinarne l'insieme $D_{f'}$ di definizione.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+3x^2+x^4}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

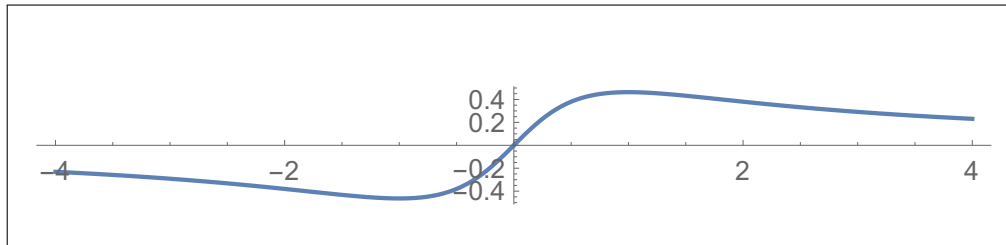
Determinare i punti di massimo e minimo locale.

$x_0 = -1$: punto di minimo locale. $x_1 = 1$: punto di massimo locale.

- (3) L'integrale generalizzato (improprio) $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx$ è convergente o divergente?

Divergente (Per $x \rightarrow +\infty$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \sim \frac{1}{x}$)

- (4) Tracciare il grafico *qualitativo* di f , in modo tale che siano leggibili la pendenza nell'origine, i massimi e minimi e gli eventuali asintoti.

**Esercizio 2. Geometria** (5 punti)

- (1) Scrivere un'equazione cartesiana del piano p passante per il punto $B = (-2, -1, 4)$ e parallelo a entrambi i vettori $\mathbf{w}_1 = (6, 3, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (9, 1, -4)$.

$$2x - 6y + 3z - 14 = 0$$

- (2) Calcolare le ampiezze in radianti degli angoli del triangolo i cui vertici sono i punti

$$A = (-1, 3, -5) \quad B = (-2, -1, 4) \quad C = (1, -3, -2)$$

$$\hat{A} = \pi/4, \quad \hat{B} = \pi/4, \quad \hat{C} = \pi/2$$

Scrivere sinteticamente le motivazioni sul retro di questo foglio (o di uno dei precedenti).

Domande di teoria. (10 punti)

1. *Enunciare con precisione e dimostrare il Teorema degli Zeri.*
2. *Enunciare con precisione e dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. L'enunciato dovrà includere: (i) la derivata della funzione integrale; (ii) la Formula di Newton-Leibniz per l'integrale definito.)*

Scrivere qui sotto (e sul retro di questo foglio, se necessario).