Cognome:	**Nome:**	**N° iscrizione:**
Matricola:	**Analisi e Geometria 1** $\boxed{\text{B}}$ **Appello 2 (30/01/2023)**	**Punteggio totale:**

$\boxed{\text{QUESTIONARIO}}$ (TOTALE: 10 PUNTI)

Segnare le affermazioni corrette (una e una sola per ogni quesito)

1. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ e $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (intersezione di tutti gli I_n).

   (a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'inclusione $I_n \subset I_{n+1}$ ○
   (b) J è l'insieme vuoto. ○
   (c) J contiene esattamente 1 punto. ✓
   (d) J contiene infiniti punti. ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

2. Definiamo le successioni in $\mathbb{R}$: $a_n = n \log_e \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$; $b_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^{3n}$ $(n \geq 1)$.
   Poniamo: $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} a_n$; $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

   (a) $\ell_1 = 2$ e $\ell_2 = e$. ✓
   (b) $\ell_1 = +\infty$ e $\ell_2 = 1$. ○
   (c) $\ell_1 = 2$ e $\ell_2 = 1$. ○
   (d) $\ell_1 = 0$ e $\ell_2 = e^2$. ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $u_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{5^i} = 1 + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}$ e $S = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

   (a) $S = +\infty$ ○
   (b) $S = \frac{5}{4}$ ✓
   (c) $S = \frac{4}{5}$ ○
   (d) $S = 0$ ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ una qualunque funzione continua.

   (a) Se $f(a) < f(b)$ e $c \in (a, b)$, allora $f(c) \in (f(a), f(b))$. ○
   (b) Se $f(a)f(b) > 0$, allora f non ha zeri in $[a, b]$. ○
   (c) Posto $m = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, la funzione $g(x) = f(x) - m$ ha uno zero in $[a, b]$. ✓
   (d) Se $f(a)f(b) < 0$, allora f ha uno zero, e uno solo, in $[a, b]$ ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

5. Definiamo (per $a \in \mathbb{R}$): $\qquad f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

(a) Se $a = -\frac{1}{2}$, f_a è derivabile.
(b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è derivabile.
(c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a non è derivabile.
(d) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è continua e non derivabile.
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0,\ f'(0) = 5$.
Poniamo: $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{-1 + \sqrt{1 + 2x}}$

(a) $L = \frac{5}{2}$
(b) $L = 5$
(c) I dati non sono sufficienti per determinare L.
(d) $L = +\infty$
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

7. Definiamo: $G(x) = \int_0^{x^2} \log(1 + t^4)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$. La derivata $G'(x)$ è data da:

(a) $G'(x) = 2x \log(1 + x^8)$.
(b) $G'(x) = \log(1 + x^4)$.
(c) $G'(x) = \log(1 + x^8)$.
(d) $G'(x) = \log(1 + x^6)$.
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

8. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$, la parte immaginaria di $w = \dfrac{z^3}{i^5}$ è:

(a) 0
(b) $-3xy^2 + x^3$
(c) $3xy^2 - x^3$
(d) $3x^2y - y^3$
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

9. Nel triangolo di vertici $A = (3, 0, 3), B = (2, -1, 3), C = (1, -3, 4)$, la misura in radianti dell'angolo di vertice B è:

(a) $\frac{\pi}{2}$
(b) $\frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{\pi}{4}$
(d) $\frac{5}{6}\pi$
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

10. L'integrale (generalizzato) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^a}$ è convergente se, e solo se:

(a) $-1 < a < 1$
(b) $a < -1$
(c) $a > 1$
(d) $0 < a < 1$
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (8 punti) Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1+x$.
   (a) i. Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
       ii. Stabilire se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.
   (b) i. Calcolare f' e studiare la monotonia di f.
       ii. Motivando la risposta, dire quanti sono gli zeri di f.
   (c) Calcolate f'' e studiare la concavità di f determinando gli eventuali flessi.
   (d) Tracciare il grafico qualitativo di f.

2. (4 punti) Si consideri la curva

$$\gamma:\begin{cases} x=t^2+\cos t \\ y=t^2+\sin t \\ z=t^2-t \end{cases} \qquad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

   (a) Determinare la terna intrinseca di γ nel punto $P\equiv(1,0,0)$.
   (b) Determinare i punti $Q\in\gamma$ in cui la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P.

1. (a) i. I limiti al bordo del dominio sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1\,.$$

Inoltre, si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = 0\,.$$

Pertanto, la funzione f ammette la retta $r : y = x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

ii. Essendo illimitata in un intorno sinistro di 0, la funzione f non può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

(b) i. Si ha

$$f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + 1 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}\,.$$

Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, la funzione f è strettamente crescente su ciascuno degli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ (ma non è crescente sul suo dominio). Non ci sono punti di massimo né punti di minimo locali. In particolare, si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(0) = 1$.

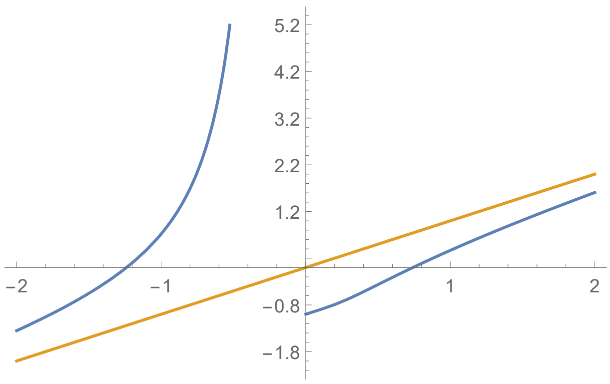
ii. Poiché f è strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, la funzione f possiede esattamente uno zero sull'intervallo $(-\infty, 0)$. Analogamente, poiché f è strettamente crescente sull'intervallo $(0, +\infty)$ e poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, la funzione f possiede esattamente uno zero sull'intervallo $(0, +\infty)$.

(c) Si ha

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,.$$

Pertanto $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 1/2$. Così f ha concavità rivolta verso l'alto per $x < 0$ e $0 < x < 1/2$ e ha concavità rivolta verso il basso per $x > 1/2$. In particolare, f possiede un flesso $F \equiv (1/2, \mathrm{e}^{-2} - 1/2)$.

(d) Osserviamo che $f(x) \geq x$ se e solo se $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \leq 1$, ossia $x < 0$. Quindi, il grafico di f si trova al di sopra dell'asintoto obliquo per $x < 0$, mentre si trova al di sotto dell'asintoto obliquo per $x > 0$. In conclusione, il grafico qualitativo di f è



2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia $f(t) = (t^2 + \cos t, t^2 - \sin t, t^2 + t)$.

(a) Il punto $P \equiv (1, 0, 0)$ appartiene a γ per $t = 0$. Poiché

$$\begin{cases} x' = 2t - \sin t \\ y' = 2t + \cos t \\ z' = 2t - 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2 - \cos t \\ y'' = 2 - \sin t \\ z'' = 2\,, \end{cases}$$

si ha $f'(0) = (0,1,-1)$, $f''(0) = (1,2,2)$ e $f'(0) \wedge f''(0) = (4,-1,-1)$. Pertanto, i vettori della terna intrinseca cercata sono

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} \\
\mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(1,2,2)}{3} \\
\mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(4,-1,-1)}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Si osservi che, essendo $f'(0) \perp f''(0)$, si ha anche

$$\mathbf{n}(0) = \frac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = \frac{(1,2,2)}{3}.$$

(b) Sia $Q = f(t)$ un punto di γ (che risulta regolare). In Q la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P quando $f'(t)$ è ortogonale a $f'(0)$, ossia quando

$$0 \cdot (2t - \sin t) + 1 \cdot (2t - \cos t) + (-1) \cdot (2t + 1) = 0$$

ossia quando $\cos t = -1$, e questo lo si ha per $t = \pi$. Esiste quindi un solo punto con la proprietà richiesta dato da $Q \equiv (\pi^2 - 1, \pi^2, -\pi + \pi^2)$.