Cognome:	Nome:	N° iscrizione:
Matricola:	**Analisi e Geometria 1** $\boxed{A}$ **Appello 2 (30/01/2023)**	**Punteggio totale:**

$\boxed{\text{QUESTIONARIO}}$ (TOTALE: 10 PUNTI)

Segnare le affermazioni corrette (una e una sola per ogni quesito)

1. Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ e $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (intersezione di tutti gli I_n).

   (a) J è l'insieme vuoto. ○
   (b) J contiene esattamente 1 punto. ✓
   (c) J contiene infiniti punti. ○
   (d) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'inclusione $I_n \subset I_{n+1}$ ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

2. Definiamo le successioni in $\mathbb{R}$: $a_n = n \log_e \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$; $b_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$ $(n \geq 1)$.
   Poniamo: $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} a_n$; $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

   (a) $\ell_1 = +\infty$ e $\ell_2 = 1$. ○
   (b) $\ell_1 = 2$ e $\ell_2 = 1$. ○
   (c) $\ell_1 = 0$ e $\ell_2 = e^2$. ○
   (d) $\ell_1 = 2$ e $\ell_2 = e$. ✓
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $u_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{3^i} = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$ e $S = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

   (a) $S = \frac{3}{2}$ ✓
   (b) $S = \frac{2}{3}$ ○
   (c) $S = 0$ ○
   (d) $S = +\infty$ ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

4. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ una qualunque funzione continua.

   (a) Se $f(a)f(b) > 0$, allora f non ha zeri in $[a,b]$. ○
   (b) Posto $m = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, la funzione $g(x) = f(x) - m$ ha uno zero in $[a,b]$. ✓
   (c) Se $f(a)f(b) < 0$, allora f ha uno zero, e uno solo, in $[a,b]$ ○
   (d) Se $f(a) < f(b)$ e $c \in (a,b)$, allora $f(c) \in (f(a), f(b))$. ○
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

5. Definiamo (per $a \in \mathbb{R}$): $\quad f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \le 0 \end{cases}$

(a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è derivabile. ○
(b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a non è derivabile. ✓
(c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è continua e non derivabile. ○
(d) Se $a = -\frac{1}{2}$, f_a è derivabile. ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0,\ f'(0) = 3$.
Poniamo: $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{-1 + \sqrt{1 + 2x}}$

(a) $L = 3$ ✓
(b) I dati non sono sufficienti per determinare L. ○
(c) $L = +\infty$ ○
(d) $L = \frac{3}{2}$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

7. Definiamo: $G(x) = \int_0^{x^2} \log(1 + t^4)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$. La derivata $G'(x)$ è data da:

(a) $G'(x) = \log(1 + x^4)$. ○
(b) $G'(x) = \log(1 + x^8)$. ○
(c) $G'(x) = \log(1 + x^6)$. ○
(d) $G'(x) = 2x \log(1 + x^8)$. ✓
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

8. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$, la parte immaginaria di $w = \dfrac{z^3}{i^5}$ è:

(a) $-3xy^2 + x^3$ ○
(b) $3xy^2 - x^3$ ✓
(c) $3x^2y - y^3$ ○
(d) 0 ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

9. Nel triangolo di vertici $A = (3, 0, 3), B = (2, -1, 3), C = (1, -3, 4)$, la misura in radianti dell'angolo di vertice B è:

(a) $\frac{\pi}{6}$ ○
(b) $\frac{\pi}{4}$ ○
(c) $\frac{5}{6}\pi$ ✓
(d) $\frac{\pi}{2}$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

10. L'integrale (generalizzato) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^a}$ è convergente se, e solo se:

(a) $a < 2$ ○
(b) $a > 1$ ○
(c) $0 < a < 1$ ○
(d) $a < 1$ ✓
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (8 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 - x$.
   (a) i. Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
   ii. Stabilire se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.
   (b) i. Calcolare f' e studiare la monotonia di f .
   ii. Motivando la risposta, dire quanti sono gli zeri di f .
   (c) Calcolate f'' e studiare la concavità di f determinando gli eventuali flessi.
   (d) Tracciare il grafico qualitativo di f .

2. (4 punti) Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 + \cos t \\ y = t^2 - \sin t \\ z = t^2 + t \end{cases} \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

   (a) Determinare la terna intrinseca di γ nel punto $P \equiv (1, 0, 0)$.
   (b) Determinare i punti $Q \in \gamma$ in cui la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P .

Soluzione degli esercizi

1. (a) i. I limiti al bordo del dominio sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -1\,, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty\,.$$

Inoltre, si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = 0\,.$$

Pertanto, la funzione f ammette la retta $r : y = -x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

   ii. Essendo illimitata in un intorno destro di 0 , la funzione f non può essere estesa con continiutà a tutto $\mathbb{R}$.

   (b) i. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}\,.$$

Poiché $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$, la funzione f è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ (ma non è decrescente sul suo dominio). Non ci sono punti di massimo né punti di minimo locali. In particolare, si ha $\lim_{x\to0^-} f'(0) = -1$.

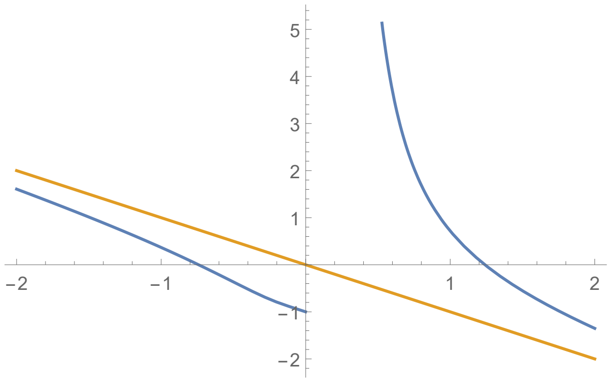
   ii. Poiché f è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$, la funzione f possiede esattamente uno zero sull'intervallo $(-\infty, 0)$. Analogamente, poiché f è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, +\infty)$ e poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, la funzione f possiede esattamente uno zero sull'intervallo $(0, +\infty)$.

   (c) Si ha

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,.$$

Pertanto $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq -1/2$. Così f ha concavità rivolta verso il basso per $x < 0$ e ha concavità rivolta verso l'alto per $x > 0$. In particolare, f possiede un flesso $F \equiv (-1/2, \mathrm{e}^{-2} - 1/2)$.

(d) Osserviamo che $f(x) \geq -x$ se e solo se $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leq 1$, ossia $x > 0$. Quindi, il grafico di f si trova al di sotto dell'asintoto obliquo per $x < 0$, mentre si trova al di sopra dell'asintoto obliquo per $x > 0$. In conclusione, il grafico qualitativo di f è



2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia $f(t) = (t^2 + \cos t, t^2 - \sin t, t^2 + t)$.

(a) Il punto $P \equiv (1, 0, 0)$ appartiene a γ per $t = 0$. Poiché

$$\begin{cases} x' = 2t - \sin t \\ y' = 2t - \cos t \\ z' = 2t + 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2 - \cos t \\ y'' = 2 + \sin t \\ z'' = 2\,, \end{cases}$$

si ha $f'(0) = (0, -1, 1)$, $f''(0) = (1, 2, 2)$ e $f'(0) \wedge f''(0) = (-4, 1, 1)$. Pertanto, i vettori della terna intrinseca cercata sono

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(-4,1,1)}{3\sqrt{2}} \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(1,2,2)}{6}\,. \end{aligned}$$

(b) Sia $Q = f(t)$ un punto di γ (che risulta regolare). In Q la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P quando $f'(t)$ è ortogonale a $f'(0)$, ossia quando

$$0 \cdot (2t - \sin t) + (-1) \cdot (2t - \cos t) + 1 \cdot (2t + 1) = 0$$

ossia quando $\cos t = -1$, e questo lo si ha per $t = \pi$. Esiste quindi un solo punto con la proprietà richiesta dato da $Q \equiv (\pi^2 - 1, \pi^2, \pi + \pi^2)$.