Cognome:	Nome:		Nº iscrizione:
Matricola:	Analisi e Geometria 1 Appello 1 (09/01/2023)	B	Punteggio:

QUESTIONARIO (TOTALE: 10 PUNTI)

Segnare le risposte corrette

1. Poniamo: $(0,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, per ogni $x \in (0,+\infty)$ $\quad f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
   - (a) $\operatorname{Im} f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ☑
   - (b) $\operatorname{Im} f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ○
   - (c) $\operatorname{Im} f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ○
   - (d) $\operatorname{Im} f = (0,+\infty)$ ○
   - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○
2. Il numero complesso $(1+i\sqrt{3})^6$ è uguale a
   - (a) 2^6 ☑
   - (b) 2^3 ○
   - (c) $i(2^3)$ ○
   - (d) $-(2^6)$ ○
   - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○
3. Il limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin(n)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   - (a) non esiste. ○
   - (b) vale $\frac{1}{2}$. ○
   - (c) vale 1. ○
   - (d) 0. ☑
   - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○
4. Poniamo: $\quad f(x) = \begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
   - (a) f non è continua in 0. ○
   - (b) f in 0 è continua ma non derivabile. ○
   - (c) f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$. ☑
   - (d) f è derivabile in 0 e $f'(0) = 1$. ○
   - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○
5. Sia $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.
   - (a) Se f è integrabile e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$ ○
   - (b) Se f non è continua, allora f non è integrabile. ○
   - (c) Se f è strettamente monotòna, allora f è integrabile. ☑
   - (d) Se f è integrabile, allora f è strettamente monotòna. ○
   - (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

6. La funzione $G(x) = \int_0^{x^2} t\,dt$, $x \in \mathbb{R}$:

(a) non è derivabile in 0. ○

(b) non è continua in 0. ○

(c) per ogni $x \in \mathbb{R}$ è derivabile e $G'(x) = x^2$. ○

(d) per ogni $x \in \mathbb{R}$ è derivabile e $G'(x) = x^3$. ○

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ✓

7. La serie numerica $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \sin\frac{1}{n^a}$, con $a > 0$, converge se, e solo se:

(a) $a < 1/2$. ○

(b) $a > 1$. ✓

(c) $a < 1$. ○

(d) $a \geq 1$. ○

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

8. La funzione $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x^4+1)(\sqrt{x^2+x})}, \quad$ sull'intervallo $(0, +\infty)$,

(a) è integrabile in senso generalizzato in un intorno destro di 0, ma non a $+\infty$. ○

(b) è integrabile in senso generalizzato a $+\infty$, ma non in un intorno destro di 0. ○

(c) è integrabile in senso generalizzato sia in un intorno destro di 0 sia a $+\infty$. ✓

(d) non è integrabile in senso generalizzato né in un intorno destro di 0, né a $+\infty$. ○

9. In $\mathbb{R}^3$, il piano passante per il punto $P_0 = (1, 2, 0)$ e perpendicolare alla retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, -1, 3)$, ha equazione cartesiana:

(a) $x + y - z + 2 = 0$ ○

(b) $x + 2y - 5 = 0$ ○

(c) $x + y - z - 3 = 0$ ✓

(d) $x + y - z = 0$ ○

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

10. Sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Il prodotto vettoriale $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$ è:

(a) $-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ○

(b) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ○

(c) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ○

(d) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ✓

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

$\boxed{\text{Esercizi}}$ (Totale: 12 punti)

Inserire le risposte finali nelle 6 caselle. *Riportare sinteticamente* **i calcoli e le motivazioni di ogni esercizio** *sul retro di questo foglio e sul retro del foglio precedente, se necessario. (Riferitevi ai quesiti nominandoli: Esercizio 1,...,Esercizio 6).*

Esercizio 1 Definiamo:

$$f(x) = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x) - 4x^2, \qquad x \in (-1,1)$$

Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$.

Risposta: $-3x^2$

Esercizio 2 Scrivere in forma algebrica $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z(z^3 + 1) = 0$$

Risposta: $0,\ -1,\ 1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 3 Calcolare il valore del limite: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{3}x^3}{\ln(1+x^3)}$

Risposta: $1/6$

Esercizio 4 Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x + \log(1+3x)}{(1+x^2)x^a}\,dx$ è convergente. (Cioè, converge sia in un intorno destro di 0 sia a $+\infty$.)

Risposta: $0 < a < 2$

Esercizio 5 Stabilire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{a^n}$ è convergente.

Risposta: Per ogni $a > 0$ la serie diverge. (Usare il criterio del rapporto).

Esercizio 6 Scrivere un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{P}$ passante per il punto $A = (0,2,0)$ e parallelo alle due direzioni individuate dai vettori $\mathbf{v}_1 = (2,1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,0,1)$.

Risposta: $x - 2y + z + 4 = 0$

$\boxed{\text{Teoria}}$ (Totale: 10 punti)

1. Enunciare con precisione e dimostrare il teorema che afferma che la derivabilità implica la continuità.

2. a) Enunciare con precisione e dimostrare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.* (L'enunciato deve includere: la derivata della funzione integrale; la *Formula di Newton-Leibniz* per l'integrale definito.)

   b) Dare un esempio esplicito (con definizione analitica precisa e grafico) di una funzione f che sia integrabile sull'intervallo $[0,1]$, ma la cui funzione integrale $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *non sia derivabile*. Si deve *dimostrare* che la funzione integrale G non è derivabile in $[0,1]$. Oppure, si spieghi perché un tale esempio non esiste.

Scrivere qui sotto (e sul retro di questo foglio, se necessario).