| Cognome: | Nome: | N° iscrizione: |
|---|---|---|
| **Matricola:** | **Analisi e Geometria 1** $\boxed{\mathbf{A}}$ <br> **Appello 3 (16/06/2023)** | **Punteggio totale:** |

**NB:** i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e <u>non</u> vanno consegnati.

$\boxed{\text{QUESTIONARIO}}$ (TOTALE: 10 PUNTI)

**Segnare le affermazioni corrette (una e una sola per ogni quesito)**

1. Siano $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ e $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (log = logaritmo in base $e$). Allora:
   - (a) $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.
   - (b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.
   - (c) $A$ ammette un estremo inferiore, ma non un minimo.
   - (d) $A$ ammette un estremo superiore, ma non un massimo.
   - (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

2. Sia $A = \{re^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le r \le 2, \quad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta < 0\}$. Allora:
   - (a) $-1 - i \in A$.
   - (b) $1 - i \in A$.
   - (c) $i \in A$.
   - (d) $2 \in A$.
   - (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

3. Quali delle seguenti serie converge?
   - (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
   - (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{4^{n-2}}$
   - (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
   - (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3n-1}$
   - (e) Nessuna

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$. Allora
   - (a) se $f(a) = f(b)$, allora $f$ è una funzione costante;
   - (b) esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$;
   - (c) esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$;
   - (d) se $f(a) < f(b)$ e $c \in (a, b)$, allora $f(c) \in (f(a), f(b))$;
   - (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

5. Definiamo (per $a \in \mathbb{R}$): $\qquad f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

   (a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $f_a$ è derivabile. ○
   (b) Se $a = 1$, $f_a$ è derivabile. ○
   (c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $f_a$ è continua e non derivabile. ○
   (d) Se $a = \frac{1}{2}$, $f_a$ è derivabile. ✓
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

6. La funzione
$$f(x) = \frac{x \log(x)}{\log(x) - 2}, \qquad x > 0$$

   (a) ha un asintoto verticale, un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto; ○
   (b) non ha asintoti; ○
   (c) ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto; ✓
   (d) ha un asintoto verticale, un asintoto obliquo e nessun altro asintoto; ○
   (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

7. L'integrale
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^\alpha}\, dx$$

   (a) converge se e solo se $\alpha \in [0, +\infty)$; ○
   (b) converge se e solo se $\alpha \in (0, +\infty)$; ✓
   (c) converge se e solo se $\alpha \in \mathbb{R}$; ○
   (d) non converge per nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$; ○
   (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

8. Il polinomio di Taylor centrato in zero di ordine 4 della funzione $f(x) = \log(1 - 3x^2)$ è:

   (a) $-3x^2 + \frac{9}{2}x^4$; ○
   (b) $3x^2 - \frac{9}{2}x^4$; ○
   (c) $-3x^2 - \frac{9}{2}x^4$; ✓
   (d) $3x^2 + \frac{9}{2}x^4$; ○
   (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

9. Siano dati due versori (vettori di modulo 1) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Se il loro prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1$, allora i due versori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

   (a) sono ortogonali; ○
   (b) formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$; ○
   (c) formano un angolo di $-\frac{\pi}{4}$; ○
   (d) sono opposti; ✓
   (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

10. Sia $\ell$ la lunghezza della curva parametrizzata $\gamma(t) = \big(\cos(e^t), -e^t, \sin(e^t)\big)$, $t \in [0, 1]$.

   (a) $\ell = +\infty$; ○
   (b) $\ell = e - 1$; ○
   (c) $\ell = \sqrt{2}(e - 1)$; ✓
   (d) $\ell = \sqrt{2}e$; ○
   (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

## Esercizi (12 punti)

1. (7 punti)

   Sia data la funzione:

$$f(x) := \sqrt[3]{\frac{x}{1+x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

   Determinarne:

   (a) eventuali simmetrie; limiti a $+\infty$ e $-\infty$;

   (b) asintoti (orizzontali, verticali, obliqui);

   (c) derivata prima e punti di massimo e minimo locale;

   (d) un grafico qualitativo.

### Soluzione

(a) $f$ è una funzione dispari. Cioè, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(-x) = -f(x)$. Pertanto, basta studiare $f$ sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

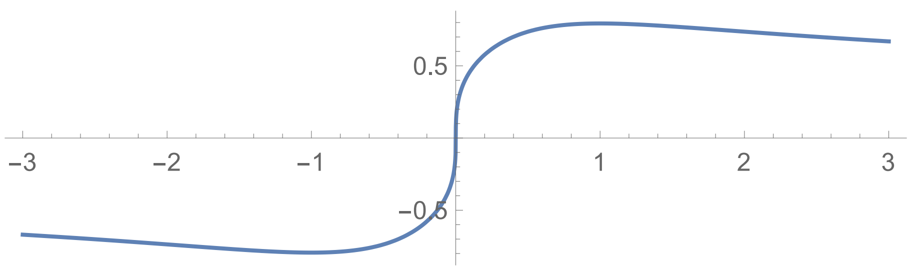
(b) La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ sia a $-\infty$. Non ci sono altri asintoti.

(c) Per $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

La derivata $f'(x)$ esiste per ogni $x \neq 0$. Si annulla in $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Il punto $x_1 = 1$ è un punto di massimo locale, perché in un intorno sinistro di $x_1 = 1$ la derivata è positiva, mentre in un intorno destro è negativa. Di conseguenza, essendo $f$ dispari, $x_0 = -1$ è un punto di minimo locale.

(d) Grafico di $f$:



2. (5 punti)

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, sia $r$ la retta passante per $A = (1, 0, 2)$ e $B = (3, 4, 1)$ e sia $s$ la retta intersezione dei piani $x - 2y - 1 = 0$ e $y + z = 0$.

(a) Stabilire se $r$ e $s$ sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Sia $\mathcal{P}_\lambda$ la famiglia di piani di equazione $x - 2y - 1 + \lambda(y + z) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare il piano $\mathcal{P}_\lambda$ parallelo alla retta $r$.

(c) Calcolare la distanza tra le rette $r$ e $s$.

**Soluzione**

(a) Troviamo equazioni parametriche di $r$ e di $s$. Ad esempio,

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$$

Vettori di direzione di $r$ e $s$ sono, rispettivamente, $(2, 4, -1)$ e $(2, 1, -1)$. Siccome non sono proporzionali, le rette non sono parallele. Studiamo l'intersezione di $r$ e $s$, cioè studiamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + 2t' \\ 4t = t' \\ 2 - t = -t' \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue $t = t'$, ma allora la terza equazione $2 - t = -t$ rende il sistema incompatibile, e quindi $r$ e $s$ non sono incidenti. Pertanto, le rette sono sghembe.

(b) I piani hanno vettore normale $\mathbf{n} = (1, -2 + \lambda, \lambda)$. Imponendo che $\mathbf{n} \cdot (2, 4, -1) = 0$ si trova $\lambda = 2$. Il piano appartenente al fascio e parallelo a $r$ ha equazione

$$x + 2z - 1 = 0.$$

(c) La distanza $d(r, s)$ tra le due rette $r$ e $s$ si può calcolare scegliendo un punto qualunque $P \in r$ - ad esempio $A = (1, 0, 2)$ - e calcolando la distanza di $P$ dal piano $\pi$ trovato sopra (cioè, il piano che include $r$ ed è parallelo a $s$). Ad esempio, prendendo $P = A = (1, 0, 2)$, abbiamo

$$d(r, s) = d(A, \pi) == \frac{1 + 2 \times 2 - 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$\boxed{\text{TEORIA}}$ (TOTALE: 10 PUNTI)

1. Dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

2. Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione avente come dominio un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di: *punto di minimo locale* di $f$.

3. (a) *Sia* $J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione avente come dominio un* intervallo $J \subset \mathbb{R}$, *derivabile, con* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in J$. *Dimostrare che* $f$ *è iniettiva.*

   (b) Se al posto di "intervallo" si sostituisce "sottoinsieme " si può ancora dimostrare che $f$ è iniettiva? Spiegare.

4. (a) Scrivere la definizione di *integrale generalizzato (o improprio)* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, dove $f$ è una funzione continua su $[1, +\infty)$.

   (b) *Usando la definizione* scritta in (a) (senza fare ricorso a criteri di convergenza), calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

---

**Scrivere qui sotto (e sul retro di questo foglio, se necessario).**