Cognome:	Nome:	N° iscrizione:
Matricola:	**Analisi e Geometria 1** **Appello 5 (11/9/2023)**	**Punteggio totale:**

QUESTIONARIO (10 PUNTI, SOGLIA MINIMA 5)

Segnare le affermazioni corrette

1. (1 risposta corretta)
Sia $I_n = \left[1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ e poniamo $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (intersezione di tutti gli I_n). Allora

- (A) $J = \{0\}$ (l'insieme costituito dall'unico punto 0);
- (B) $J = \emptyset$ (l'insieme vuoto);
- ✓ (C) $J = \{1\}$ (l'insieme costituito dall'unico punto 1);
- (D) J contiene infiniti punti;
- (E) nessuna delle altre risposte è corretta.

2. (1 risposta corretta)
Le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^{10} = (1-i)^5$$

- (A) sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $z^2 = 1 - i$;
- ✓ (B) sono esattamente 10;
- (C) sono tutte puramente reali;
- (D) sono tutte puramente immaginarie;
- (E) nessuna delle altre risposte è corretta.

3. (1 risposta corretta)
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua.

- (A) Se $f(0)f(1) > 0$, allora f non ha zeri in $[0,1]$.
- ✓ (B) $\int_0^1 f(x)dx = f(\alpha)$ per almeno un $\alpha \in [0,1]$.
- (C) Se $f(0)f(1) < 0$, allora f ha uno zero, e uno solo, in $[0,1]$.
- (D) Se $f(0) < f(1)$ e $c \in (0,1)$, allora $f(c) \in (f(0), f(1))$.
- (E) Nessuna delle altre risposte è corretta.

4. (1 risposta corretta)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)\sqrt[3]{x}}.$$
Allora

- Ⓐ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge;
- ✓ Ⓑ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ diverge;
- Ⓒ $\displaystyle\int_1^{2} f(x)\ dx$ diverge;
- Ⓓ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\ dx$ diverge;
- Ⓔ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\ dx = -\pi$;

5. (1 risposta corretta)
Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori qualunque in $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con il simbolo "$\times$" il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

- Ⓐ Se $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.
- Ⓑ Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
- ✓ Ⓒ Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ sono paralleli.
- Ⓓ Qualunque siano i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ è nullo.
- Ⓔ Nessuna delle altre risposte è corretta.

6. (1 risposta corretta)
Sia $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{4^j}$ e poniamo: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = S$. Allora:

- ✓ Ⓐ $S = \frac{4}{3}$;
- Ⓑ $S = +\infty$;
- Ⓒ $S = 0$;
- Ⓓ $S = \frac{3}{4}$;
- Ⓔ nessuna delle altre risposte è corretta.

7. (1 risposta corretta)
Poniamo $F(x) = \int_x^{x^3} e^{-t^2}\, dt,\ x \in \mathbb{R}$. Allora:

- ✓ Ⓐ $F'(x) = 3x^2 e^{-x^6} - e^{-x^2}$;
- Ⓑ $F'(x) = -3x^2 e^{-x^6} - e^{-x^2}$;
- Ⓒ $F'(x) = e^{-x^6} - e^{-x^2}$;
- Ⓓ $F'(x) = e^{-x^6} - e^{-x^2}$;
- Ⓔ nessuna delle altre risposte è corretta.

8. (1 risposta corretta)

Quali delle seguenti serie converge assolutamente?

Ⓐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

✓ Ⓑ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$;

Ⓒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

Ⓓ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$;

Ⓔ Nessuna.

9. (1 risposta corretta)

Il polinomio di Taylor centrato in zero di ordine 5 di $f(x) = 2x^3 \cos x - \sin\left(x^2\right)$ è:

✓ Ⓐ $-x^2 + 2x^3 - x^5$;

Ⓑ $x^2 - 2x^3 - x^5$;

Ⓒ $x^2 + 2x^3 + x^5$;

Ⓓ $-x^2 - 2x^3 - x^5$;

Ⓔ nessuna delle altre risposte è corretta.

10. (1 risposta corretta)

Sia C la curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$C(t) = (t^2 + 1, t, t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ⓐ C è contenuta nel piano di equazione $x - z = -2$;

✓ Ⓑ C è contenuta nel piano di equazione $x - z = 2$;

Ⓒ Il vettore tangente a C in $t = 0$ è parallelo a $(1, 1, 1)$.

Ⓓ Il vettore tangente a C in $t = 0$ è parallelo a $(1, 0, -1)$.

Ⓔ nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizi (12 punti, soglia minima 6)

1. (6 punti; soglia minima 3) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1 + x, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(a) Determinare i limiti di f al bordo del dominio:

Per $x \to -\infty$: $-\infty$ Per $x \to 0^-$: $+\infty$ Per $x \to 0^+$: -1 Per $x \to +\infty$: $+\infty$

(b) Determinare gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali o obliqui).

$y = x$ per $x \to \pm\infty$; $x = 0$ per $x \to 0^-$

(c) Calcolare la derivata prima f' e il segno di f'.

$$\frac{1}{x^2} e^{-1/x} + 1$$

(d) Stabilire in quali intervalli f è crescente o decrescente.

f è crescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$

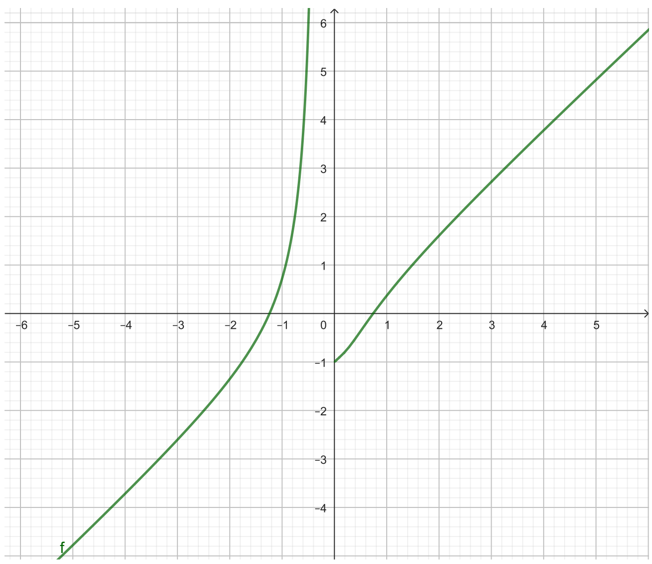
(e) Motivando la risposta, dire *quanti* sono gli zeri di f (Non si chiede di calcolare esplicitamente tali zeri).

Numero di zeri: 2 (Scrivere a parte le motivazioni.)

(f) Calcolare la derivata seconda f'' e determinare le ascisse degli eventuali punti di flesso.

$f''(x) = \dfrac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}(1 - 2x)$. Punto di flesso in $x_0 = 1/2$

Grafico di $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1 + x$



2. (6 punti; soglia minima 3)

(a) Dati i vettori $\mathbf{w}_1 = (6,3,2)$ e $\mathbf{w}_2 = (9,1,-4)$ in $\mathbb{R}^3$, calcolare il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$.

$$|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2| = |(-14, 42, -21)| = \sqrt{(-14)^2 + 42^2 + (-21)^2} = \sqrt{2401} = 49$$

Oppure, si può calcolare $\sin\vartheta = 1/\sqrt{2}$ e poi : $|\mathbf{w}_1|\,|\mathbf{w}_2|\,\sin\vartheta = 49\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 49$

(b) Scrivere un'*equazione cartesiana* del piano $\mathscr{P}$ passante per il punto $B = (-2,-1,4)$ e ortogonale al vettore $(1,1,1)$.

$$x + y + z - 1 = 0$$

(c) Nello spazio $\mathbb{R}^3$, trovare *equazioni parametriche* per (i) la retta r passante per i punti $A = (1,0,2)$ e $B = (3,4,1)$ e (ii) per la retta s intersezione dei piani $x - 2y - 1 = 0$ e $y + z = 0$.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = -s \\ z = s \end{cases}$$

Teoria (10 punti, soglia minima 5)

- teoria 1 (4 punti)

  Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.

- teoria 2 (3 punti)

  Dimostrare il seguente corollario del Teorema di Lagrange:

  Se $(a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile nell'intervallo* (a,b) *con derivata positiva, allora* f *è strettamente crescente su* (a,b).

- teoria 3 (3 punti)

  Dimostrare il Teorema di Pitagora, utilizzando le regole sul prodotto scalare di vettori.