Politecnico di Milano – Ingegneria Aerospaziale/Energetica/Meccanica

---

Analisi e Geometria 1, A.A. 2021-2022, Scaglione RA-STR

Terzo appello – 15 giugno 2022 – Durata: 2 ore e 15 minuti

Cognome e Nome: ______________________________

Codice Persona: ______________________

Questionario (20 punti, soglia sufficienza 10)

Quesito 1. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la successione $a_n = \left(\frac{n^2+7}{n^2+n}\right)$, con $n > 0$, e l'insieme A dei suoi termini:

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$$

(A) $(a_n)_{n\geq 1}$ è strettamente crescente.
(B) $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$.
(C) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
(D) L'insieme A non ha massimo.
✓ (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 2. (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0 \leq \mathrm{Im}(z)\}$. Allora:

(A) Se $z \in A$, allora $\overline{z} \in B$.
✓ (B) Se $z \in A$, allora $\mathrm{i}z \in B$.
(C) L'intersezione $A \cap \{\mathrm{i}z : z \in B\}$ non è vuota.
(D) L'intersezione $A \cap \{\overline{z} : z \in B\}$ non è vuota.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 3. (1 risposta corretta, 2 punti)
Si consideri l'equazione $z^4 = z \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ in $\mathbb{C}$. Allora:

(A) Se z_0 è una soluzione, allora anche $z_0 \cdot \mathrm{i}$ è una soluzione.
✓ (B) Se z_0 è una soluzione, allora anche $z_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ è una soluzione.
(C) Tutte le soluzioni giacciono su una circonferenza centrata nell'origine.
(D) $\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}$ è una soluzione.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 4. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^5)}{3x^2\sin(x^3)}.$$
Allora:

- (A) Il limite vale 1.
- (B) Il limite vale $\frac{1}{2}$.
- ✓ (C) Il limite vale $\frac{1}{3}$.
- (D) Il limite non esiste in $\mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 5. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \operatorname{arctg}(x)$. Allora:

- ✓ [A] f è sempre positiva.
- [B] f ammette uno e un solo zero.
- [C] f ammette almeno due zeri.
- [D] f non ammette alcun asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).
- ✓ [E] f ammette almeno un asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).

Quesito 6. (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$. Allora:

- (A) Esiste al massimo un $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- ✓ (B) Esiste almeno un $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- (C) Non esiste alcun $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- (D) f non può essere costante.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 7. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2)\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora:

- [A] f non è continua in $x = 0$.
- [B] f è continua ma non derivabile in $x = 0$.
- ✓ [C] f è derivabile in $x = 0$.
- [D] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4+1} - \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\operatorname{arctg}(x)}{3x^2}$.
- ✓ [E] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{3\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} + \dfrac{2x\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4+1}$.

Quesito 8. (1 risposta corretta, 1 punto)
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + e^{x^2} - 2$$

è tale che, per $x \to 0$,

- (A) $f(x) = o(x^4)$.
- (B) $f(x) \sim x^2$.
- (C) $f(x) \sim x^4$.
- (D) $f(x) \sim x^6$.
- ✓ (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 9. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{x^\alpha(1-x^2)}\,dx.$$

con $\alpha \in (0, +\infty)$.

- (A) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.
- ✓ (B) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.
- (C) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 0$.
- (D) L'integrale non converge per alcun valore di α.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 10. (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e positiva, cioè: $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Definiamo: $\quad F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

- ✓ [A] F è strettamente crescente.
- [B] F è strettamente decrescente.
- [C] F ha almeno un punto di massimo locale.
- [D] F ha almeno un punto di minimo locale.
- [E] $F(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Quesito 11. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$, dove $\alpha \in (0, +\infty)$. Allora:

- (A) La serie converge se e solo se $\alpha > 2$.
- (B) La serie converge se e solo se $\alpha > 1$.
- (C) La serie è assolutamente convergente se $\alpha = 1$.
- ✓ (D) La serie converge per ogni $\alpha > 0$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 12. (1 risposta corretta, 2 punti)
Si consideri il piano $\mathscr{P}$ di equazione cartesiana $2x + y - 2z - 2 = 0$ e il punto $A = (3, -1, 2)$. Allora:

- (A) A giace sul piano $\mathscr{P}$.
- ✓ (B) La distanza $d(A, \pi)$ è $\frac{1}{3}$.
- (C) La distanza $d(A, \pi)$ è $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- (D) La distanza $d(A, \pi)$ è 1.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 13. (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con i simboli "$\cdot$" e "$\times$" rispettivamente il prodotto scalare e il prodotto vettoriale.

- (A) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli.
- (B) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, allora $\vec{v} = \vec{w}$.
- (C) Se $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \neq 0$, allora $\vec{v} = 0$.
- ✓ (D) Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, allora $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli a uno stesso piano.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 14. (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $C : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la curva parametrizzata nel modo seguente:

$$C(t) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} t\sqrt{t},\ t\sin(t),\ t\cos(t) \right), \quad t \in [0, \pi]$$

- (A) La lunghezza $|C'(t)|$ del vettore $C(t)$ è costante per $t \in [0, \pi]$
- (B) La lunghezza della curva è π.
- (C) La lunghezza della curva è π^2.
- ✓ (D) La lunghezza della curva è $\frac{\pi(\pi+2)}{2}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio carta e penna (6 punti)

Poniamo

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^3}$$

(1) Determinare il *campo di esistenza* di f, cioè il massimo sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ sul quale l'espressione $f(x)$ è definita.

> $D = (-1, 1]$

(2) Trovare gli eventuali zeri ed il segno della funzione f (sul suo campo di esistenza D).

> Un unico zero: $x_0 = 1$ ($f(1) = 0$). Segno: $\forall x \in (-1, 1)\ f(x) > 0$

(3) Studiare i limiti di f al bordo di D e determinare gli eventuali asintoti.

> $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$. Un unico asintoto (verticale): $x = -1$.

(4) Calcolare la derivata $f'(x)$ (nei punti x in cui f è derivabile).

> Per $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{-5x^3 - 6x^2 + 1}{2\sqrt{1+x}(1+x^3)^2}$.
>
> Per $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{5x^3 - 6x^2 - 1}{2\sqrt{1-x}(1+x^3)^2}$.

(5) Trovare gli eventuali punti in cui f non è derivabile.

> f non è derivabile in $x = 0$, perché in $x_0 = 0$ la derivata sinistra di f vale $1/2$ e la derivata destra vale $-1/2$.

(6) Calcolare:

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

Cosa si può dedurre circa l'esistenza di un punto estremante per f?

> Per $x < 0$:
>
> $$f'(x) = \frac{-5x^3 - 6x^2 + 1}{2\sqrt{1+x}(1+x^3)^2} = \frac{(1+x)(-5x^2 - x + 1)}{2\sqrt{1+x}(1+x)^2(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-5x^2 - x + 1}{2\sqrt{1+x}(1+x)(x^2 - x + 1)^2}$$
>
> Si ha: $\lim_{x\to-1^+} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1/2$. Dunque, f' sull'intervallo $(-1, 0)$ assume valori negativi vicino a -1 e valori positivi vicino a 0. Poiché f' è continua, per il teorema degli zeri si annulla in (almeno un punto) sull'intervallo $(-1, 0)$.
>
> Poiché $f'(x)$ ha lo stesso segno del numeratore $-5x^2 - x + 1$, si vede, più precisamente, che f ha un punto di minimo locale in $(-1, 0)$.

Teoria (6 punti)

(1) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è derivabile su $[a, b]$.

(2) Provare con un esempio che F può non essere derivabile due volte.

Risposte

(1) Si tratta di una versione del teorema fondamentale del calcolo integrale. (Non ne riportiamo qui la dimostrazione.)

(2) Sia $f(t) = |t|$, $t \in \mathbb{R}$. Allora, la funzione $F(x) = \int_0^x |t|\, dt$, $x \in \mathbb{R}$, non è derivabile due volte in $x_0 = 0$.