Politecnico di Milano – Ingegneria Aerospaziale/Energetica/Meccanica

---

Analisi e Geometria 1, A.A. 2021-2022

Appello – 7 Settembre 2022
Durata: 2 ore e 15 minuti

Cognome e Nome: ________________________________

Codice Persona: _______________________

Questionario (20 punti)

Quesito 1. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora:

- (A) Ogni gli elementi del codominio hanno esattamente 2 controimmagini.
- (B) Almeno un elemento del codominio ha 4 controimmagini.
- (C) Almeno un elemento del codominio ha infinite controimmagini.
- (D) f è iniettiva.
- ✓ (E) f è suriettiva.

Quesito 2. (2 risposte corrette, 2 punti)
Sia $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$. Allora:

- ✓ (A) $|z| = 1$
- (B) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$
- ✓ (C) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$
- (D) $\arg z + \arg \overline{z} = \pi/2$
- (E) $|z| = 2$

Quesito 3. (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora

- (A) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente monotòna, allora è convergente.
- (B) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora è strettamente monotòna.
- (C) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora è convergente.
- ✓ (D) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora è limitata.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 4. (1 risposta corretta, 1 punto)
Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x} - \frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

- (A) non esiste
- ✓ (B) vale -1
- (C) vale 1
- (D) vale $+\infty$
- (E) vale $-\infty$

Quesito 5. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$. Allora

- [A] f è pari
- [B] f è illimitata
- ✓ [C] f possiede infiniti zeri
- [D] f possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
- ✓ [E] $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$.

Quesito 6. (2 risposte corrette, 2 punti)
Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$. Allora

- (A) esiste almeno un $x_0 \in (-1, 0)$ tale che $f'(x_0) = 0$
- ✓ (B) esiste almeno un $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) = 0$
- ✓ (C) esiste almeno un $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $f'(x_0) = 0$
- (D) f' non si annulla mai
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 7. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora

- ✓ [A] f è continua in $x_0 = 0$
- [B] f non è derivabile in $x_0 = 0$
- [C] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = -1$
- [D] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$
- ✓ [E] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$

Quesito 8. (2 risposte corrette, 2 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte in $x_0 = 0$ tale che

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0.$$

Allora

- A f possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$
- B f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$
- ✓ C $f'(0) = 0$
- ✓ D $f^{(3)}(0) = -2$
- E $f^{(4)}(0) = 1$

Quesito 9. (1 risposta corretta, 1 punto)
L'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

- A converge e vale $\frac{\pi}{4}$
- B converge e vale $\frac{\pi^2}{4}$
- C converge e vale $\frac{\pi^2}{8}$
- ✓ D converge e vale $\frac{\pi^2}{16}$
- E non converge.

Quesito 10. (1 riposta corretta, 1 punto)
Si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Allora

- A F è pari
- ✓ B F è strettamente monotòna
- C F non possiede asintoti orizzontali
- D F ammette infiniti punti estremanti
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 11. (1 risposta corretta, 1 punto)
La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

- A converge assolutamente.
- ✓ B converge semplicemente, ma non assolutamente.
- C diverge a $+\infty$
- D diverge a $-\infty$
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 12. (2 risposte corrette, 2 punti)
Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori ortogonali di $\mathbb{R}^3$. Allora

A $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$

B $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$

✓ C $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

✓ D $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$

E una sola delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 13. (1 risposta corretta, 1 punto)
Le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1-u \\ y = 2-u \\ z = 2+u \end{cases}$$

A sono coincidenti

B sono parallele, ma non coincidenti

✓ C sono incidenti in un punto

D sono sghembe

E sono ortogonali.

Quesito 14. (1 risposta corretta, 1 punto)
La lunghezza dell'arco di curva parametrizzata di $\mathbb{R}^3$

$$C(t) = (\cos t, \sin t, e^t), \qquad 0 \le t \le 1$$

è data dall'integrale:

A $\int_0^1 (1+e^{2t})\,dt$

B $\int_0^1 (\sin(t)+\cos(t)+e^{2t})\,dt$

✓ C $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$

D $\int_0^1 \sqrt{\sin(t)+\cos(t)+e^{2t}}\,dt$

E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio carta e penna (6 punti)

(Motivare le risposte sul retro del foglio)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(1) Determinare eventuali simmetrie e asintoti della funzione f.

f è pari, dispari, né pari né dispari? *Risposta:* ....

Eventuali asintoti:

(2) Calcolare la derivata prima f' determinandone l'insieme di definizione.

(3) Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo (locale e globale).

(4) Calcolare la derivata seconda f'' determinandone l'insieme di definizione.

(5) Stabilire dove f è convessa e dove è concava. Trovare gli eventuali punti di flesso.

(6) Tracciare un grafico qualitativo della funzione f.

Teoria (6 punti)

(1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla integrabilità (in senso genealizzato) di $1/x^a$ ($a \in \mathbb{R}$) in un intorno di $+\infty$.

(2) Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili su un intervallo.

Analisi e Geometria 1, Quarto appello, 7 Settembre 2022

Esercizio carta e penna

$\boxed{\text{Esercizio}}$ Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x .$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

1. Il dominio di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre, essendo somma di due funzioni dispari, anche f è dispari. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
la funzione presenta un asintoto orizzontale, di equazione $y = -\pi/2$, per $x \to +\infty$ e un asintoto orizzontale, di equazione $y = \pi/2$, per $x \to -\infty$. Non ci sono altri asintoti.

2. Si ha
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} .$$
La funzione f' è definita su tutto D.

3. Si ha
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad x = 0, \\ f'(x) < 0 \quad &\iff \quad x \neq 0. \end{aligned}$$
Pertanto, la funzione è (strettamente) decrescente e in $x_0 = 0$ presenta un punto a tangente orizzontale. Non ci sono punti di massimo o di minimo.

4. Si ha
$$f'(x) = -\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} .$$
La funzione f' è definita su tutto D.

5. Si ha
$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\iff \quad x = 0, \pm 1 \\ f''(x) > 0 \quad &\iff \quad -1 < x < 0\,,\ x > 1 \\ f''(x) < 0 \quad &\iff \quad x < -1\,,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$
Pertanto, la funzione ammette i seguenti tre punti di flesso:
$$F_0 \equiv (0,0)\,, \qquad F_{-1} \equiv \left(-1, -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{e} \qquad F_1 \equiv \left(1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) .$$

6. Grafico qualitativo: