SOLUZIONI

POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA AEROSPAZIALE/ENERGETICA/MECCANICA

ANALISI E GEOMETRIA 1, A.A. 2021-2022, SCAGLIONE RA–STR

Appello – 11 luglio 2022 – Durata: 2 ore e 15 minuti

Cognome e Nome (in stampatello): ____________________

Numero di matricola ____________________

Questionario (20 punti, soglia sufficienza 10)

Quesito 1. (1 risposta corretta, 1 punto)
Definiamo: $A = \{q \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q^2 \leq 3\}$.

(A) A ha massimo e minimo.
X (B) A ha estremo superiore ma non ha massimo.
(C) A non ha estremo inferiore.
(D) A non è limitato.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 2. (1 risposta corretta, 2 punti)
Chiamiamo S l'insieme delle radici complesse dell'equazione: $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$

(A) S ha infiniti elementi.
(B) S è costituito da due numeri complessi con parte reale nulla.
X (C) S è costituito da due numeri complessi con parte immaginaria nulla.
(D) $S = \emptyset$.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 3. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri l'equazione $|z|^4 + 1 - 2\bar{z}^2 = 0$ in $\mathbb{C}$. Allora:

(A) L'equazione ha 4 soluzioni distinte.
b (B) L'equazione ha esattamente 2 soluzioni, entrambe reali.
(C) L'equazione ha esattamente 2 soluzioni, entrambe con parte reale nulla.
(D) L'equazione ha esattamente 2 soluzioni complesse distinte, coniugate tra loro.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 4. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}-\frac{x}{\sin(x)}\right).$$

Allora:

Ⓐ Il limite vale $+\infty$.
Ⓑ Il limite vale 1.
C Ⓒ Il limite vale 0.
Ⓓ Il limite non esiste.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 5. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|e^{-1/x}$. Allora:

A [A] f ha un asintoto obliquo per $x\to+\infty$.
[B] f ha un asintoto verticale per $x\to 0^+$.
C [C] f ha un asintoto verticale per $x\to 0^-$.
[D] f non ammette alcun asintoto (né orizzontale, né obliquo, né verticale).
[E] f è pari.

Quesito 6. (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ continua in $[0,1]$, derivabile in $(0,1)$ e tale che $f(0)=0$ e $f(1)=1$. Allora:

Ⓐ Esiste al massimo un $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$.
B Ⓑ Esiste almeno un $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$.
Ⓒ f' non si può annullare.
Ⓓ Esiste uno ed un solo $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 7. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ così definita

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0,\\ 0 & \text{se } x=0,\end{cases}$$

dove $\alpha>0$. Allora:

A [A] Per ogni $\alpha>0$, f_α è continua in $x=0$.
[B] f_α è derivabile in $x=0$ se e solo se $\alpha>2$
C [C] f_α è derivabile in $x=0$ se e solo se $\alpha>1$.
[D] Non esiste alcun $\alpha>0$ per il quale f_α sia derivabile in $x=0$.

Quesito 8. (1 risposta corretta, 1 punto)
Definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (1-x)e^x - \cos x,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il polinomio di Taylor di f, centrato in $x_0 = 0$, di ordine 3, è dato da:

(A) $x + x^2 + x^3$.
(B) $-x^2 + x^3$.
(C) $\frac{1}{6}x^3$.
D (D) $-\frac{1}{3}x^3$.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 9. (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione integrabile soddisfacente:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1.$$

Allora:

A (A) Se f è continua in $[0,1]$ allora esiste almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
(B) Esiste sempre almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
(C) f è non-negativa.
(D) f è costante e vale 1.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 10. (2 riposte corrette, 2 punti)
Si consideri $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \sin(t)\, dt$. Allora:

[A] F è monotòna.
B [B] F ha un asintoto orizzontale.
C [C] F ammette infiniti punti di massimo e di minimo locali.
[D] F' è pari.
[E] Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 11. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{n^4+5n^2} \sin(n)$. Allora:

A (A) La serie è assolutamente convergente.
(B) La serie converge semplicemente ma non assolutamente.
(C) La serie diverge a $-\infty$.
(D) La serie diverge a $+\infty$.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 12. (1 risposta corretta, 1 punto)
L'equazione cartesiana del piano passante per $A = (1, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ è

A (A) $2x - 3y + z - 9 = 0$.
(B) $2x + 3y + z - 9 = 0$.
(C) $2x - 3y - z - 9 = 0$.
(D) $2x + 3y + z + 9 = 0$.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 13. (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $\vec{u}, \vec{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$. Allora $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ vale

A (A) 1.
(B) 2.
(C) 0.
(D) 3.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 14. (1 risposte corrette, 2 punti)
Sia C la curva parametrica nel piano, con parametrizzazione

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (\, t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))$$

Chiamiamo L la lunghezza di C.

[A] $L = 4$
[B] $L = 4\pi$
[C] $L = 8\pi$
D [D] $L = 8$
[E] Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Esercizio carta e penna (6 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{1 - e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(1) Determinare gli eventuali zeri e il segno della funzione f.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\qquad f(x) > 0 \leftrightarrow x > 0$

(2) Determinare eventuali asintoti.

$y = 0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

(3) Scrivere la derivata f' e determinare i punti in cui f non è derivabile.

$$f'(x) = \frac{3e^x - 2}{3\sqrt[3]{(1-e^{-x})^2}}.$$

In $x_0 = 0$, f NON È DERIVABILE

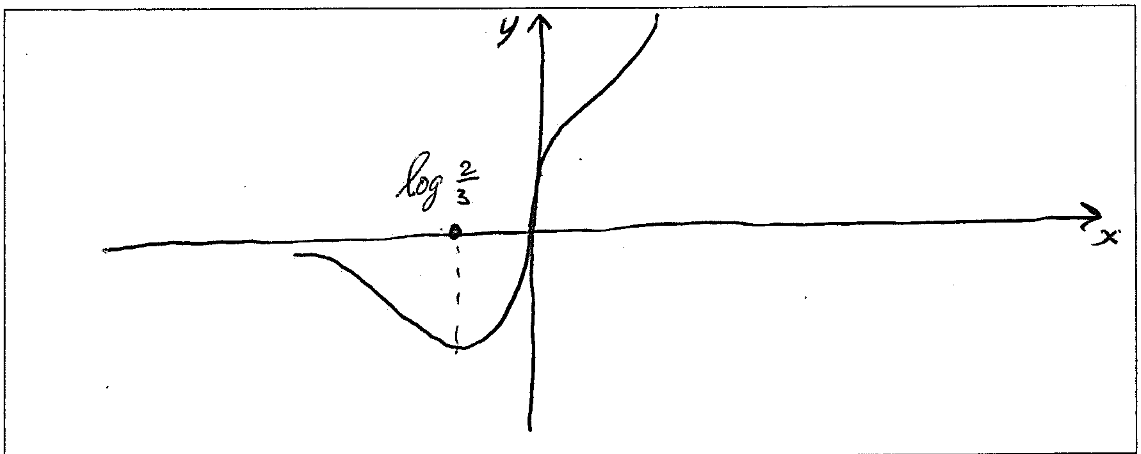
(4) Determinare i punti di massimo o minimo.

$x_1 = \log \frac{2}{3}$ PUNTO DI MINIMO LOCALE (E GLOBALE)

(5) Scrivere la derivata seconda f''.

$$f''(x) = \frac{9e^{2x} - 15e^x + 4}{9e^x \sqrt[3]{(1-e^{-x})^5}}$$

(6) Tracciare un grafico della funzione f coerente con le informazioni ricavate nei punti precedenti.



Teoria (6 punti)

(1) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto serie/integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il teorema che afferma quale dipendenza logica ci sia tra le proprietà di continuità e di derivabilità di una funzione in punto.