Esercizio

Terzo Appello (12 luglio 2021)

Esercizio. (12 punti) Si consideri la funzione $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}, \qquad x \neq 1 \tag{1}$$

1. Si determinino eventuali simmetrie e asintoti.
2. Stabilire se esiste f una estensione continua di f a $\mathbb{R}$.
3. Calcolare la derivata f'. Trovare eventuali punti di massimo o minimo di f sul suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. Calcolare la derivata f''. Stabilire dove f è convessa e dove è concava.
5. Tracciare un grafico qualitativo di f.
6. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in $x_0 = 0$.

(Soluzioni nella pagina seguente).

Soluzioni

1. La funzione f non è né pari né dispari. Il grafico di f è però simmetrico rispetto al punto $(1,0)$. (Cioè, se il punto P appartiene al grafico di f, allora anche il simmetrico P' di P rispetto a $(1,0)$ vi appartiene). Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0; \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=-\frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Pertanto, la funzione f ha l'asintoto orizzontale $y=0$ sia per $x\to-\infty$, sia per $x\to+\infty$, e non ha asintoti verticali o obliqui.

2. Da

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

segue che f ha in $x_0=1$ una discontinuità non eliminabile. Pertanto, non esiste una estensione continua di f a $\mathbb{R}$.

3. La funzione f è derivabile in ogni punto del suo dominio $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ e

$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{(1-x)^2}}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+(1-x)^2}(=\frac{1}{x^2-2x+2}) \tag{2}$$

Per ogni x nel dominio di f, si ha $f'(x)>0$. Non ci sono punti di massimo o minimo (né locali, né globali).

4. $f''(x)=\dfrac{2(1-x)}{(1+(1-x)^2)^2}$. La funzione f è convessa (concavità verso l'alto) su $(-\infty,1)$ e concava (concavità verso il basso) su $(1,+\infty)$.

5. Il grafico qualitativo di f è il seguente:

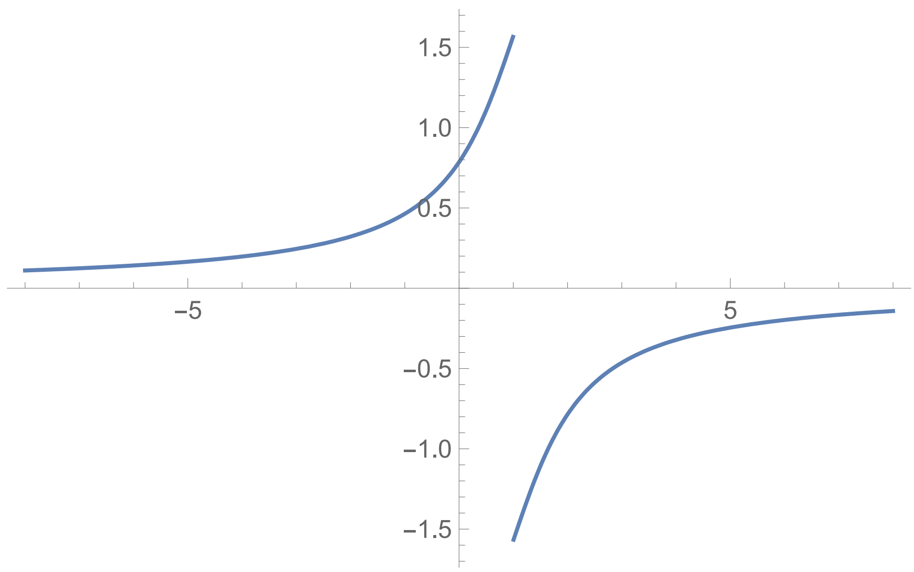

Figura 1: Grafico di $f(x)=\arctan\frac{1}{1-x}$. Per $x\to1^{\pm}$, $f(x)\to\mp\pi/2$. Quindi, non esiste un'estensione continua di f a $\mathbb{R}$.

6. Il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in $x_0=0$ è dato da $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$, ossia

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2 \tag{3}$$

Infatti, $f(0)=\frac{\pi}{4}$, $\quad f'(0)=\frac{1}{2}$, $\quad f''(0)=\frac{1}{2}$.