Esercizio

Appello del 15 giugno 2021

Esercizio. (12 punti) Si consideri la funzione $(-1,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) - 2x^2 \tag{1}$$

1. f è pari, dispari oppure né pari né dispari? Spiegare. Esiste una estensione continua di f all'intervallo chiuso $[-1,1]$? Spiegare.
2. Calcolare la derivata prima f' e la derivata seconda f''.
3. Scrivere la formula di Taylor-Maclaurin centrata $x_0 = 0$ della *funzione derivata* f', arrestata al primo ordine (scrivendo l'opportuno termine o-piccolo). Dimostrare che esiste un punto $c \in (0,1)$ in cui la funzione derivata f' si annulla.
4. Determinare gli intervalli in cui f è convessa o concava e stabilire l'esistenza di eventuali punti di flesso.
5. Disegnare un grafico qualitativo della funzione f.
6. *Usando la definizione* di integrale generalizzato, stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx \tag{2}$$

(Soluzioni nella pagina seguente).

Soluzioni

1. La funzione f soddisfa $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$; quindi f è pari. Poiché
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\ln 2 + 0 - 2 = 2\ln(2) - 2\,(\approx -0.6137)$$
(si ricordi che $t \ln t \to 0$ per $t \to 0^+$) e quindi (f è pari) anche $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2\ln(2) - 2$, concludiamo che esiste una (unica) estensione continua di f a $[-1, 1]$.

2. $f'(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x) - 4x$. $\qquad f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 4 = \frac{4x^2-2}{1-x^2}$

3. $f'(x) = -2x + o(x)$, per $x \to 0$. Ovviamente, non ha senso applicare il teorema degli zeri a f' sull'intervallo $[0, 1]$, sia perché f' non è continua su $[0, 1]$, sia perché non assume valori di segno discorde negli estremi 0 e 1: infatti, f' non è definita in $x_0 = 1$ e $f'(0) = 0$.

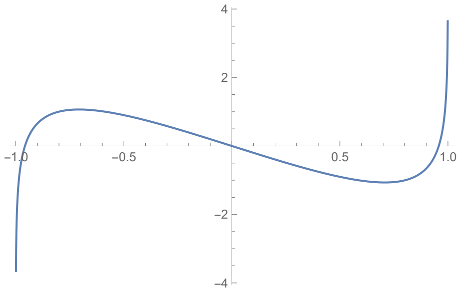

Figura 1: Grafico di f'

Osserviamo però che: (a) $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 1^-$, quindi vicino a 1 esiste b ($b < 1$) tale che $f'(b) > 0$; (b) da $f'(x) = -2x + o(x)$, per $x \to 0$, segue che vicino a 0 esiste un punto a ($a > 0$) in cui $f'(a) < 0$. Dunque su un tale intervallo $[a, b] \subset (0, 1)$, la funzione f' soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri, e dunque esiste un $c \in (a, b) \subset (0, 1)$ in cui $f'(c) = 0$.

4. $f''(x) = \frac{4x^2-2}{1-x^2}$. Si noti che il denominatore $1 - x^2$ è positivo su $(-1, 1)$, quindi basta studiare il segno del numeratore $4x^2 - 2$. Dunque, $f''(x) > 0$ (f convessa) per $x \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $f''(x) < 0$ (f concava) per $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. I punti $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di flesso.

5. Il grafico qualitativo di f è il seguente:

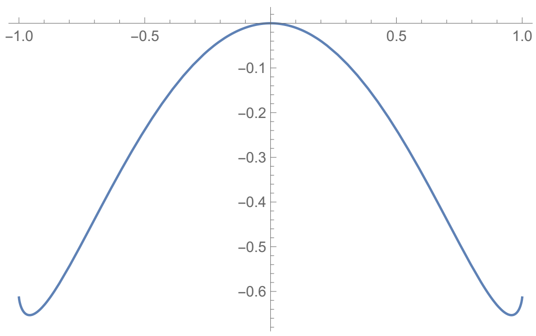

Figura 2: Grafico di f

6. La funzione integranda $\ln(x)$ non è limitata vicino a zero, quindi non si tratta di un integrale di Riemann, ma di un integrale in senso generalizzato. Per definizione, $\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \ln(x)\,dx$. Una antiderivata (primitiva) $F(x)$ di $\ln x$ si trova facilmente per parti $F(x) = x\ln(x) - x$. Dunque
$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0} \left[x\ln(x) - x\right]_a^1 = \lim_{a\to 0} \left[0 - 1 - (a\ln(a) - a)\right] = -1$$
Poiché $a \ln a \to 0$ per $a \to 0$, l'integrale è convergente e vale -1.