

Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale
Analisi e Geometria 1 Primo compito in itinere 6 novembre 2018-Compito F (II turno)	Docente:		Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:		Matricola:

**Istruzioni:** Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte devono essere riportate nelle caselle. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

**Prima parte (7 punti)**

(A) Scrivere la definizione di: funzione *continua* in un punto  $x_0$ .

(B) Dimostrare il seguente:

**Teorema.** Se una funzione  $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo, è derivabile e  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ , allora  $f$  è costante su  $I$ .

Mostrare, mediante un controesempio, che se si elimina l'ipotesi che  $I$  sia un *intervallo*, l'enunciato è falso.

(Scrivere la dimostrazione e il controesempio qui sotto, e sul retro del foglio.)

## Seconda parte

Esercizio 1: 8 punti; Esercizio 2: 15 punti.

### Esercizio 1

(A) Scrivere in forma esponenziale le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 = e^{i(\frac{4}{3}\pi)}$$

(B) Consideriamo la trasformazione  $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$  definita da:  $f(z) = -iz + i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

(i) Trovare l'insieme dei punti fissi di  $f$ . (Dire esplicitamente che cos'è:  $\emptyset$ , un punto, una retta eccetera.)

(ii)  $f$  è un'isometria? Se lo è, di quale tipo di isometria si tratta (rotazione, traslazione, riflessione, glisso-riflessione)? (Motivare le risposte.)

(iii) Scrivere  $f$  come composizione di al più tre riflessioni in rette: si chiede di scrivere esplicitamente le equazioni di tali rette e l'ordine in cui si devono effettuare le riflessioni.

## Esercizio 2

(A) Definiamo  $(0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  ponendo

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log^2(x) + \log(x)$$

(i) Scrivere le equazioni degli asintoti di  $f$ .

(ii) Calcolare la derivata prima di  $f$ .

Trovare i punti di massimo e di minimo locali di  $f$ .

(iii) Calcolare la derivata seconda di  $f$ .

Determinare gli intervalli in cui  $f$  è convessa o concava e (le ascisse degli) eventuali punti di flesso.

(iv) Tracciare un grafico qualitativo di  $f$ .

(B) Usando gli sviluppi di Taylor, calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - \ln(1 + x^2) - 1}{-1 + \sqrt{1 + 6x^4}}$$

Valore del limite:

## Soluzioni

### Esercizio 1.

(A) Le soluzioni di  $z^4 = e^{i(\frac{4}{3}\pi)}$  sono quattro. In forma esponenziale si scrivono  $e^{i\phi_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , dove

$$\phi_k = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dunque le soluzioni sono:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

(B)

(i) L'insieme dei punti fissi è l'insieme delle soluzioni dell'equazione  $f(z) = z$ :

$$-iz + i = z$$

Questa equazione ha un'unica soluzione. Dunque c'è un unico punto fisso:  $C = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ .

(ii) La trasformazione  $f$  definita da  $f(z) = -iz + i$  è un'isometria. Più in generale, tutte le trasformazioni del tipo  $\varphi(z) = uz + b$ , con  $|u| = 1$ , sono isometrie. Infatti, si ottengono come composizione della trasformazione  $z \mapsto uz$  ( $|u| = 1$ ), che è una rotazione, e della traslazione di  $b \in \mathbb{C}$ . Rotazioni e traslazioni sono isometrie; dunque  $\varphi$  è una isometria, in quanto composizione di isometrie.

Poiché abbiamo visto che  $f$  ha un unico punto fisso, possiamo concludere che l'isometria  $f$  è una rotazione. Precisamente, è la rotazione avente come centro il punto fisso  $C = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ , e come ampiezza  $-\pi/2$  (rotazione di  $\pi/2$  in senso orario), perché l'argomento del coefficiente unitario  $u = -i$  è  $-\pi/2$ .

(iii) Una rotazione  $f$  di centro  $C$  e ampiezza  $\vartheta$  si ottiene come composizione di due riflessioni

$$f = R_{\ell_2} \circ R_{\ell_1}$$

(prima  $R_{\ell_1}$ , dopo  $R_{\ell_2}$ ) dove  $\ell_1, \ell_2$  è una *qualunque* coppia di rette incidenti in  $C$ , tali che l'angolo da  $\ell_1$  a  $\ell_2$  sia  $\vartheta/2$ . Nel nostro caso,  $C = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$  e  $\vartheta/2 = -\pi/4$ . Dunque, basterà prendere, ad esempio, la retta  $\ell_1$  di equazione  $y = \frac{1}{2}$  e la retta  $\ell_2$  di equazione  $x + y = 1$ .

### Esercizio 2.

(A) Studio della funzione

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log^2(x) + \log(x)$$

(i) La funzione  $f$  è continua su  $(0, +\infty)$ . Quindi, gli eventuali asintoti sono per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow 0^+$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Quindi non ci sono asintoti a  $+\infty$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$ :

$$f(x) = \log^2(x) - 2\log(x) = \log(x)[\log(x) - 2] \sim \log^2(x) \rightarrow -\infty$$

Dunque la retta  $y = 0$  è asintoto verticale di  $f$  da destra.

(ii) La derivata è

$$f'(x) = \frac{-\log(x) + 1}{x}$$

Pertanto,

$$\forall x \in (e, +\infty) \quad f'(x) < 0, \quad f'(e) = 0, \quad \forall x \in (0, e) \quad f'(x) > 0$$

$f$  è strettamente decrescente in  $(e, +\infty)$  e  $f$  è strettamente crescente in  $(0, e)$ . Dunque  $x = e$  è un punto di massimo relativo (in cui  $f$  assume il valore  $f(e) = -1$ ). Non ci sono punti di massimo locale.

(iii) La derivata seconda è

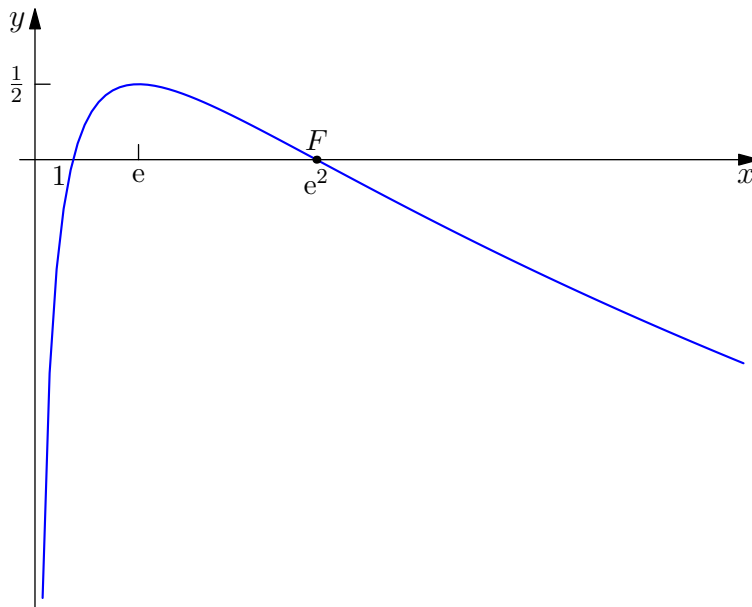
$$f''(x) = \frac{\log(x) - 2}{x^2} \quad x \in (0, +\infty)$$

Pertanto

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (0, e^2); \quad f''(e^2) = 0; \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in (e^2, +\infty)$$

Dunque  $f$  è concava in  $(0, e^2)$  ed è convessa in  $(e^2, +\infty)$ . Dunque,  $x = e^2$  è un punto di flesso.

(iv) Grafico qualitativo di  $f(x) = -\frac{1}{2} \log^2(x) + \log(x)$ .



(B)

Utilizziamo gli sviluppi:

$$\sqrt{1 + 6x^4} = 1 + 3x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$$

Allora, il numeratore è

$$e^{(x^2)} - \ln(1 + x^2) - 1 = x^4 + o(x^4)$$

e il denominatore:

$$-1 + \sqrt{1 + 6x^4} = 3x^4 + o(x^4)$$

Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - \ln(1 + x^2) - 1}{-1 + \sqrt{1 + 6x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{3}$$