Teoria	Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo compito in itinere** **6 novembre 2018-Compito E (II turno)**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Istruzioni: Tutte le risposte devono essere motivate. *Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte devono essere riportate nelle caselle. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Prima parte (7 punti)

(A) Scrivere la definizione di: funzione *derivabile* in un punto x_0.

(B) Dimostrare il seguente:

Teorema. *Se una funzione* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo, è derivabile e* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in I$, *allora* f *è strettamente crescente su* I.

Mostrare, mediante un controesempio, che se si elimina l'ipotesi che I sia un *intervallo*, l'enunciato è falso.

(Scrivere la dimostrazione e il controesempio qui sotto, e sul retro del foglio.)

Seconda parte

Esercizio 1: 8 punti; Esercizio 2: 15 punti.

Esercizio 1

(A) Scrivere in forma esponenziale le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 = e^{i\left(\frac{2}{3}\pi\right)}$$

(B) Consideriamo la trasformazione $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ definita da: $f(z) = -iz + 1,\ z \in \mathbb{C}$.

(i) Trovare l'insieme dei punti fissi di f. (Dire esplicitamente che cos'è: $\emptyset$, un punto, una retta eccetera.)

(ii) f è un'isometria? Se lo è, di quale tipo di isometria si tratta (rotazione, traslazione, riflessione, glissoriflessione)? (Motivare le risposte.)

(iii) Scrivere f come composizione di al più tre riflessioni in rette: si chiede di scrivere esplicitamente le equazioni di tali rette e l'ordine in cui si devono effettuare le riflessioni.

Esercizio 2

(A) Definiamo $(0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \log^2(x) - 2\log(x)$$

(i) Scrivere le equazioni degli asintoti di f.

(ii) Calcolare la derivata prima di f.

Trovare i punti di massimo e di minimo locali di f.

(iii) Calcolare la derivata seconda di f.

Determinare gli intervalli in cui f è convessa o concava e (le ascisse degli) eventuali punti di flesso.

(iv) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(B) Usando gli sviluppi di Taylor, calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) + 1 - e^{(x^2)}}{-1 + \sqrt{1+2x^4}}$$

Valore del limite:

Soluzioni

Esercizio 1.

(A) Le soluzioni di $z^4 = e^{i\left(\frac{2}{3}\pi\right)}$ sono quattro. In forma sponenziale si scrivono $e^{i\phi_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$, dove

$$\phi_k = \frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dunque le soluzioni sono:

$$e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{2\pi}{3}}\ e^{i\frac{7\pi}{6}}\ e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

(B)

(i) L'insieme dei punti fissi è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(z) = z$:

$$-iz + 1 = z$$

Questa equazione ha un'unica soluzione. Dunque c'è un unico punto fisso: $C = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$.

(ii) La trasformazione f definita da $f(z) = -iz + 1$ è un'isometria. Più in generale, tutte le trasformazioni del tipo $\varphi(z) = uz + b$, con $|u| = 1$, sono isometrie. Infatti, si ottengono come composizione della trasformazione $z \longmapsto uz$ ($|u| = 1$), che è una rotazione, e della traslazione di $b \in \mathbb{C}$. Rotazioni e traslazioni sono isometrie; dunque φ è una isometria, in quanto composizione di isometrie.

Poiché abbiamo visto che f ha un unico punto fisso, possiamo concludere che l'isometria f è una rotazione. Precisamente, è la rotazione avente come centro il punto fisso $C = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$, e come ampiezza $-\pi/2$ (rotazione di $\pi/2$ in senso orario), perché l'argomento del coefficiente unitario $u = -i$ è $-\pi/2$.

(iii) Una rotazione f di centro C e ampiezza ϑ si ottiene come composizione di due riflessioni

$$f = R_{\ell_2} \circ R_{\ell_1}$$

(prima R_{ℓ_1}, dopo R_{ℓ_2}) dove ℓ_1, ℓ_2 è una *qualunque* coppia di rette incidenti in C, tali che l'angolo *da* ℓ_1 *a* ℓ_2 sia $\vartheta/2$. Nel nostro caso, $C = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ e $\vartheta/2 = -\pi/4$. Dunque, basterà prendere, ad esempio, la retta ℓ_1 di equazione $y = -\frac{1}{2}$ e la retta ℓ_2 di equazione $x + y = 0$.

Esercizio 2.

(A) Studio della funzione

$$f(x) = \log^2(x) - 2\log(x)$$

(i) La funzione f è continua su $(0, +\infty)$. Quindi, gli eventuali asintoti sono per $x \to +\infty$ e per $x \to 0^+$.

Per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Quindi non ci sono asintoti a $+\infty$.

Per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \log^2(x) - 2\log(x) = \log(x)[\log x - 2] \sim \log^2(x) \to +\infty$$

Dunque la retta $y = 0$ è asintoto verticale di f da destra.

(ii) La derivata è

$$f'(x) = 2\frac{\log(x) - 1}{x}$$

Pertanto,

$$\forall\, x \in (e, +\infty) \quad f'(x) > 0, \qquad f'(e) = 0, \qquad \forall\, x \in (0, e) \quad f'(x) < 0$$

f è strettamente crescente in $(e, +\infty)$ e f è strettamente decrescente in $(0, e)$. Dunque $x = e$ è un punto di minimo relativo (in cui f assume il valore $f(e) = -1$). Non ci sono punti di massimo locale.

(iii) La derivata seconda è

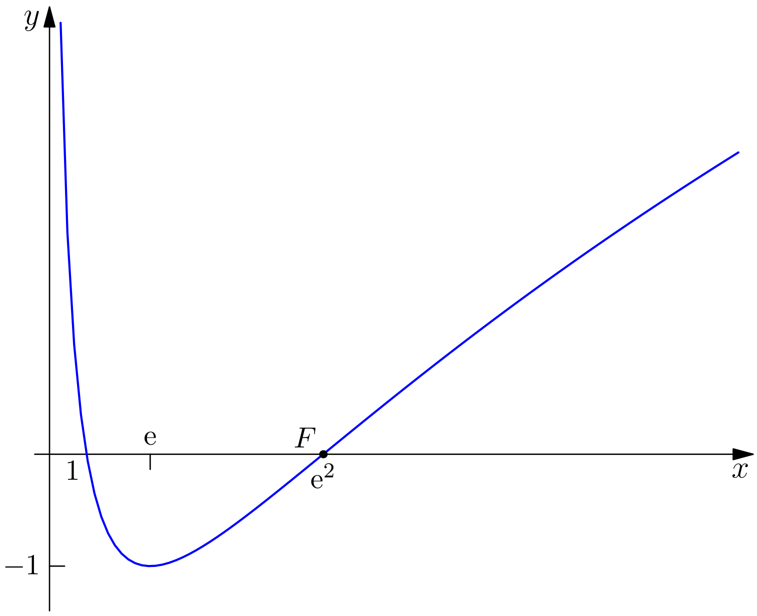
$$f''(x) = 2\frac{-\log(x) + 2}{x^2} \qquad\qquad x \in (0, +\infty)$$

Pertanto

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, e^2); \qquad\qquad f''(e^2) = 0; \qquad\qquad f''(x) < 0 \quad \forall x \in (e^2, +\infty)$$

Dunque f è convessa in $(0, e^2)$ ed è concava in $(e^2, +\infty)$. Dunque, $x = e^2$ è un punto di flesso.

(iv) Grafico qualitativo di $f(x) = \log^2(x) - 2\log(x)$.



(B)

Utilizziamo gli sviluppi:

$\sqrt{1 + 2x^4} = 1 + x^4 + o(x^4)$

$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$

Allora, il numeratore è

$\ln(1 + x^2) + 1 - e^{x^2} = -x^4 + o(x^4)$

e il denominatore:

$-1 + \sqrt{1 + 2x^4} = x^4 + o(x^4)$

Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2) + 1 - e^{x^2}}{-1 + \sqrt{1 + 2x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -1$$