Teoria	Es. 1	Es. 2	Es.3	Es. 4	Tot.

Analisi e Geometria 1 Quarto Appello 12 settembre 2019	Docente:	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte: questioni di teoria.

(A) Dimostrare il seguente teorema: *Se* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *(*I *aperto di* $\mathbb{R}$*) è differenziabile, allora è continua.*(3 Punti)

(B) Enunciare e dimostrare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.* (3 Punti)

Seconda parte: esercizi.

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6; Es.2: 7; Es.3: 4; Es.4: 7.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Scrivere il numero complesso

$$w = \frac{10}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

in forma algebrica (cioè come $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$).

Risposta: $\boxed{i}$

(b) Trovare i punti fissi della trasformazione $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$,

$$F(z) = \frac{10}{(1-i)(2-i)(3-i)} z + i$$

(Per definizione, z è un punto fisso se $F(z) = z$). La trasformazione F è una isometria? In caso affermativo, di quale isometria si tratta?

Punti fissi: $\boxed{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$ Tipo di trasformazione: $\boxed{\text{Rotazione di centro l'origine e angolo } +\pi/2}$

(c) Scrivere le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2 - z + 1 + i = 0$$

sia in forma algebrica ($a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$), sia in forma esponenziale ($re^{i\vartheta}$, con $r > 0$).

Soluzioni: $\boxed{z_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}; \qquad z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}}$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$$

sul dominio $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(a) Si studi l'esistenza di un asintoto obliquo a $+\infty$.

Asintoto a $+\infty$: $\boxed{y = x - \frac{1}{2}}$

(b) Calcolare la derivata prima di f per $x > 1$.

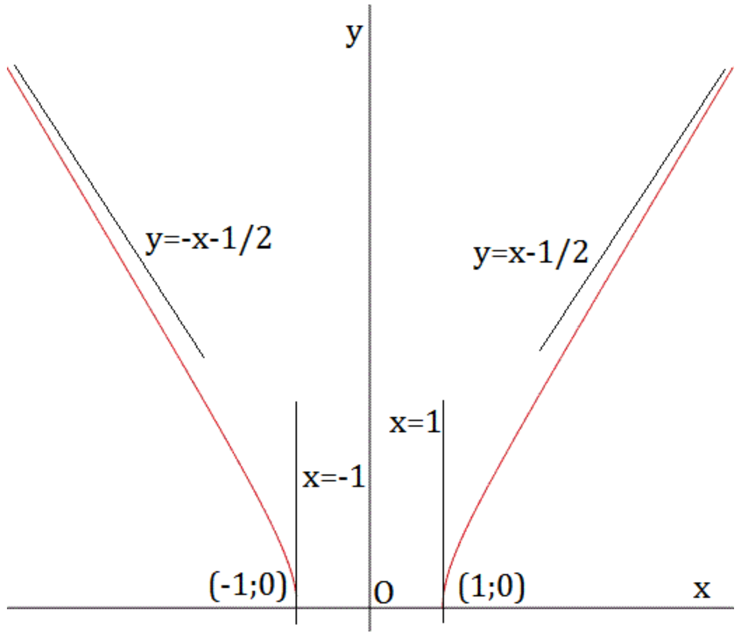
Derivata prima: $\boxed{f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}$

(c) Calcolare la derivata seconda di f per $x > 1$.

Derivata seconda: $\boxed{f''(x) = -\frac{1}{4(x^2-x)^3}}$

(d) La funzione f presenta simmetrie? Disegnare un grafico qualitativo di f.

Risposta: La funzione f è pari, ossia, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.



3. Calcolare l'integrale:

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)-4)}\,dx. \tag{1}$$

Risposta: $\boxed{-\ln 2}$

Soluzione

L'integrale si può calcolare, ad esempio, con la sostituzione $\ln(x) - 4 = t$. Dunque, $x = e^{t+4}$ e $dx = e^{t+4}\,dt$. Con il cambio di variabili $x = e^{t+4}$, l'integranda (1-forma)

$$\frac{1}{x(\ln(x)-4)}\,dx.$$

si scrive allora

$$\frac{1}{e^{t+4}t}\,e^{t+4}\,dt = \frac{1}{t}\,dt$$

Bisogna ora trovare il *nuovo intervallo di integrazione*: se x varia nell'intervallo $[1, e^2]$, t varia nell'intervallo $[-4, -2]$; e il cambio di variabili $t = \varphi(x) = \ln(x) - 4$ preserva l'orientazione, vale a dire è crescente. Per la formula del cambio di variabili nell'integrale definito, abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)-4)}\,dx &= \int_{-4}^{-2} \frac{1}{t}dt \\ &= [\ln(-t)]_{-4}^{-2} = \\ &= \ln 2 - \ln 4 = -\ln 2\end{aligned}$$

(Si noti che sull'intervallo $[-4, -2]$ la funzione $1/t$ è negativa, e quindi una sua primitiva è $\ln|t| = \ln(-t)$.)

4. (a) Scrivere un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ che passa per i tre punti $A = (1,2,1)$, $B = (2,1,1)$ e $C = (1,1,3)$ dello spazio $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{2x + 2y + z - 7 = 0\,.}$$

(b) Scrivere equazioni parametriche della retta r passante per il punto $Q = (3,3,3)$ e perpendicolare al piano $2x + 2y + z - 7 = 0$.

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}}$$

(c) Stabilire se esistono valori del parametro α per i quali la curva in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \alpha + t^3 \end{cases}$$

è piana (Per definizione, una curva si dice *piana* se esiste un piano che la include).

$$\boxed{\text{Non esistono valori di } \alpha \text{ per i quali la curva è piana}}$$

Soluzioni

(a) Consideriamo i vettori $\mathbf{x} = B - A = (1,-1,0)$ e $\mathbf{y} = B - C = (1,0,-2)$. Un vettore direttore di $\mathcal{P}$ è il prodotto vettoriale $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (2,2,1)$. Quindi, il piano $\mathcal{P}$ ha equazione

$$2(x-1) + 2(y-2) + 1(z-1) = 0$$

ossia $2x + 2y + z - 7 = 0$.

(b) La retta cercata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

(c) Un generico piano in $\mathbb{R}^3$ ha equazione $ax + by + cz + d = 0$, dove almeno uno dei coefficienti a, b, c deve essere non nullo. Un tale piano contiene la curva γ se e solo se

$$d + at + bt^2 + c(\alpha + t^3) = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo si verifica se, e solo se, tutti i coefficienti di t sono nulli,

$$d + c\alpha = a = b = c = 0$$

ossia se, e solo se, $a = b = c = d = 0$. In corrispondenza di tali valori tutti nulli, non si ottiene alcun piano.