Teoria	Es. 1	Es. 2	Es.3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Appello 3** **15/07/2019**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima Parte

(a) *Prima domanda di teoria.* (3 punti)

Enunciare e dimostrare il teorema sulla convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx$$

al variare del parametro a in $\mathbb{R}$.

(b) *Seconda domanda di teoria.* (3 punti)

(i) Scrivere la definizione di *prodotto vettoriale* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ di due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$;

(ii) Il prodotto vettoriale è associativo? (Cioè, dire se vale l'uguaglianza

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Si dimostri l'uguaglianza, oppure si trovi un controesempio.)

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 5; Es.2: 8; Es.3: 5; Es.4: 6.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\frac{z^3+1}{z^3-1} = \frac{1}{i}$$

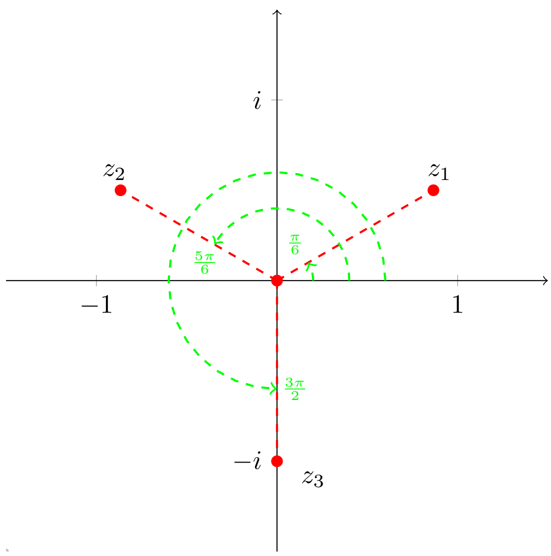
scrivendo tutte le soluzioni in forma algebrica.

Soluzione

L'equazione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} z^3+1 &= -i(z^3-1) \\ z^3(1+i) &= i-1 \\ z^3 &= \frac{i-1}{1+i} = \frac{i-1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \\ z^3 &= i \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono sulla circonferenza di raggio 1 ed hanno argomento $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.



La forma algebrica delle soluzioni è

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_3 &= -i. \end{aligned}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{1-e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Trovare gli eventuali asintoti.

(b) Studiare il segno di f.

(c) Calcolare la derivata prima. Trovare un punto (se esiste) in cui la funzione assuma il valore minimo assoluto.

(d) Calcolare la derivata seconda. Trovare gli eventuali punti di flesso.

Soluzione

(a) La funzione f ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua su $\mathbb{R}$. Quindi non ha asintoti verticali. Cerchiamo eventuali asintoti orizzontali o obliqui. A questo scopo, calcoliamo i limiti a $+\infty$ e $-\infty$.

Per $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned} 1-e^{-x} &\sim -e^{-x} \\ (1-e^{-x})^{1/3} &\sim -e^{-x/3} \\ (1-e^{-x})^{1/3} &= -e^{-x/3} + o(e^{-x/3}) \\ e^x \cdot (1-e^{-x})^{1/3} &= -e^{2x/3} + o(e^{2x/3}) \longrightarrow 0^-. \end{aligned}$$

(Si ricordi che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ equivale (quando $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0) a $f(x) = g(x) + o(g(x))$, per $x \to x_0$). L'asse x è quindi asintoto orizzontale a $-\infty$.

Per $x \to +\infty$: $f(x) \sim e^x \to +\infty$. Quindi, non c'è asintoto a $+\infty$. Non ci sono asintoti obliqui.

(b) Il segno della funzione $f(x)$ è uguale al segno di $1-e^{-x}$: la funzione f è positiva quando x è positivo, negativa quando x è negativo, e si annulla in $x_0 = 0$.

(c) La derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cdot \sqrt[3]{1-e^{-x}} + e^x \cdot \frac{1}{3}\left(1-e^{-x}\right)^{-2/3} \cdot e^{-x} \\ &= e^x \cdot \sqrt[3]{1-e^{-x}} + \frac{1}{3\left(1-e^{-x}\right)^{2/3}} \\ &= \frac{3e^x\left(1-e^{-x}\right)+1}{3\left(1-e^{-x}\right)^{2/3}} \\ &= \frac{3e^x-2}{3\left(1-e^{-x}\right)^{2/3}}. \end{aligned}$$

La derivata prima non esiste nell'origine (flesso a tangente verticale) ed ha il segno del termine $3e^x - 2$. In particolare il punto $x^* = \ln\frac{2}{3}$ è punto di minimo locale e globale, dove la funzione assume il valore

$$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

(d) La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{3e^x \cdot 3\left(1-e^{-x}\right)^{2/3} - (3e^x-2)\cdot 2(1-e^{-x})^{-1/3}e^{-x}}{9\left(1-e^{-x}\right)^{4/3}}.$$

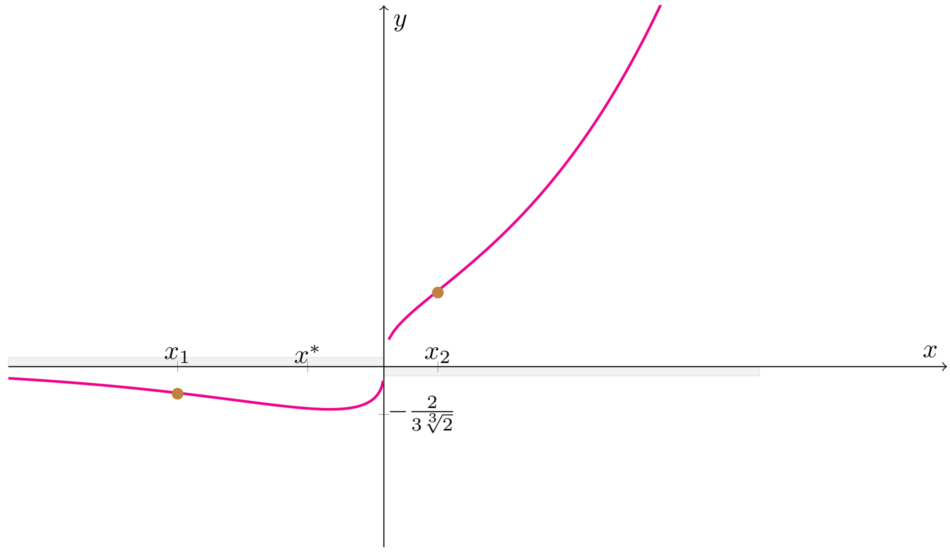
Il segno della derivata prima dipende dal segno del suo numeratore che possiamo riscrivere così:

$$\begin{aligned} 9e^x\left(1-e^{-x}\right)^{2/3} - \frac{2(3e^x-2)}{e^x(1-e^{-x})^{1/3}} &= \frac{9e^{2x}(1-e^{-x})-6e^x+4}{e^x(1-e^{-x})^{1/3}} \\ &= \frac{9e^{2x}-15e^x+4}{e^x(1-e^{-x})^{1/3}}. \end{aligned}$$

Le radici dell'equazione quadratica $9w^2 - 15w + 4 = 0$ forniscono i punti di cambio di concavità cercati:

$$\frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4^2 \cdot 9}}{18}$$

che sono $x_1 = \ln \frac{1}{3}$ e $x_2 = \ln \frac{4}{3}$.



(e) (a) Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 associato alla funzione

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(b) Sfruttare il polinomio precedente per trovare un valore razionale che approssima $\ln 2$.

Soluzione

i. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} \\ f'(x) &= \frac{2}{1-x^2} \\ f''(x) &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} \\ f'''(x) &= 4\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}. \end{aligned}$$

Quindi $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f'''(0) = 4$ da cui

$$T_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3.$$

ii. Per approssimare $\ln 2$ utilizzando la funzione $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ occorre scegliere

$$\frac{1+x}{1-x} = 2$$

da cui $x = \frac{1}{3}$. Il valore approssimato è

$$T_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{56}{81}.$$

(f) Consideriamo un numero N_0 di batteri posti in una coltura all'istante di tempo $t_0 = 0$. Desideriamo trovare la popolazione batterica $y = y(t)$, all'istante t, nei due casi seguenti.

i. Supponiamo che il cibo e lo spazio siano illimitati e, in ogni istante t, la rapidità di variazione $y'(t)$ della popolazione sia proporzionale alla popolazione stessa $y(t)$:

$$y' = ky\,, \quad y(0) = N_0,$$

($k \in \mathbb{R}_+$: coefficiente di accrescimento relativo.)

ii. Supponiamo che le risorse siano scarse (cibo e spazio siano limitati e M sia il numero massimo di individui ammissibile) e la variazione della popolazione popolazione cresca ad ogni istante con tasso proporzionale alla popolazione stessa $y(t)$ e alla differenza $M - y(t)$. Dunque

$$y' = ky(M - y), \quad y(0) = N_0\,.$$

In entrambe le situazioni risolvere il problema di Cauchy e trovare il comportamento della popolazione per $t \to +\infty$.

Soluzione

i. L'equazione differenziale è lineare. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = N_0 e^{kt}.$$

Quindi ricaviamo che, per $t \to +\infty$, $y(t) \to +\infty$.

ii. In questo caso l'equazione differenziale è a variabili separabili. Essa ha per soluzioni i valori costanti $y = 0$ e $y = M$. Inoltre, se $y \neq 0, M$ ricaviamo

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{y}{M - y} \right| = kt + C$$

ovvero

$$y(t) = \frac{MDe^{Mkt}}{1 + De^{Mkt}}$$

dove con D (e C) indichiamo costanti arbitrarie. Imponendo la condizione iniziale, si trova la soluzione:

$$y(t) = \frac{MN_0e^{Mkt}}{M - N_0 + N_0e^{Mkt}}.$$

Ricaviamo che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = M.$$