Teoria	Es. 1	Es. 2	Es.3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello** **14 Giugno 2019**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

1. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza del limite per successioni monotòne.

2. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange (del Valor Medio). Trovare un esempio esplicito di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ che non sia derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, e per la quale la tesi del teorema di Lagrange non valga.

Soluzione. Consideriamo la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ per ogni $x \in [-1, 1]$. Questa funzione f non è derivabile nel punto $x_0 = 0$ (interno all'intervallo $[-1, 1]$); quindi non soddisfa l'ipotesi del teorema di Lagrange (che richiede che la funzione sia derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b)). Si vede subito che non esiste alcun punto $c \in (-1, 1)$ per il quale si abbia

$$f(-1) - f(1) = f'(c)(1 - (-1))$$

perché il primo membro si annulla, mentre il secondo assume solo i valori 2 o -2.

Seconda parte

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \cos(e^x - 1)$.
   (a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine di f.
   (b) Stabilire se f possiede un punto di massimo o di minimo per $x = 0$.
   (c) Calcolare
   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{(f(x)-1)^2}{(\cos x - e^x + x)\sin x^2}.$$

Soluzione

(a) Poiché

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(e^x - 1) & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -e^x \sin(e^x - 1) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -e^x \sin(e^x - 1) - e^{2x}\cos(e^x - 1) & f''(0) &= -1, \end{aligned}$$

lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine di f è

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + 0(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0.$$

(b) Poiché $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$, la funzione f possiede un punto di massimo per $x = 0$.

(c) Poiché, per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} &(f(x)-1)^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &\cos x - e^x + x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x = -x^2 + o(x^2) \\ &\sin x^2 = x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

si ha

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{(-x^2 + o(x^2))(x^2 + o(x^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4} + o(1)}{(-1 + o(1))(1 + o(1))} = -\frac{1}{4}.$$

2. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\, dt\,.$$

(a) Calcolare la derivata $F'(x)$. Determinare eventuali simmetrie di F.

(b) Stabilire se esistono punti di minimo locale o di massimo locale per F.

(c) Stabilire se esistono asintoti orizzontali per F a $+\infty$ e a $-\infty$. (Non se ne chiede l'equazione).

(d) Calcolare la derivata seconda F'' e disegnare il grafico qualitativo di F.

Soluzione

(a) Per il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, F è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$, e

$$F'(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$$

Poiché f pari, F è dispari.

(b) Poiché si ha $F'(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, non esiste alcun punto in cui la derivata prima di F si annulli. Quind non ci sono punti di massimo o di minimo locale.

(c) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\, dt\,.$$

Poiché la funzione f è continua e positiva su tutto $\mathbb{R}$, e poiché per $x \to +\infty$ si ha

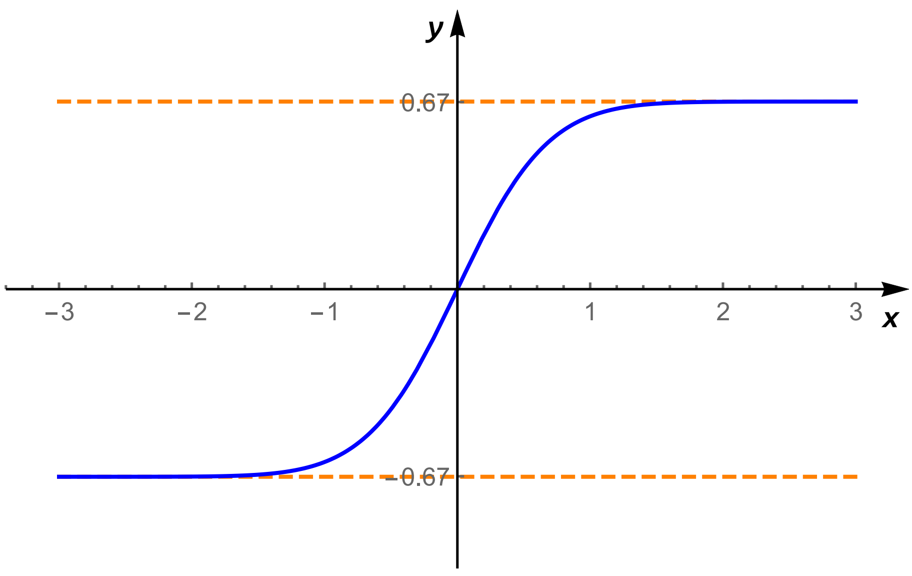
$$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} \sim \frac{e^{-t^2}}{t^2} \le \frac{1}{t^2} \quad \text{(definitivamente)}\,,$$

la funzione f è integrabile in senso improprio a $+\infty$ (per i criteri del confronto asintotico e semplice). Quindi l'integrale improprio considerato converge e la funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Per simmetria, le funzione F ha un asintoto orizzontale anche per $x \to -\infty$.

(d) Si ha

$$F''(x) = f'(x) = -\frac{2x(2+x^2)e^{-x^2}}{(1+x^2)^2}\,.$$

Quindi la funzione F possiede un punto di flesso per $x = 0$. In particolare, la concavità è rivolta verso l'alto per $x < 0$ ed è rivolta verso il basso per $x > 0$. Il grafico qualitativo di F è



3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 6 + kt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = k - 3u \\ y = 1 + 4u \\ z = -4 + ku \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Determinare i valori del parametro reale k per i quali r ed s sono ortogonali.

(b) i. Per i valori di k trovati, stabilire la posizione reciproca di r ed s.

ii. Nel caso in cui siano sghembe, determinare la distanza tra r ed s.

Soluzioni

(a) Un vettore direttore di r è $\mathbf{a} = (3, -4, k)$, mentre un vettore direttore di s è $\mathbf{b} = (-3, 4, k)$. Pertanto, r ed s sono ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, ossia se e solo se $k = \pm 5$.

(b) i. L'intersezione delle due rette è data dal sistema

$$\begin{cases} 5 + 3t = k - 3u \\ 1 - 4t = 1 + 4u \\ 6 + kt = -4 + ku \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 5 + 3t = k + 3t \\ -t = u \\ 6 + kt = -4 - kt \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 5 = k \\ -t = u \\ t = -1 \, . \end{cases}$$

Di conseguenza, per $k = 5$ le due rette sono incidenti nel punto $P \equiv (2, 5, 1)$, mentre per $k = -5$ le due rette sono sghembe.

ii. Le rette r ed s sono sghembe per $k = -5$. In questo caso, i vettori direttori delle due rette sono $\mathbf{a} = (3, -4, -5)$ e $\mathbf{b} = (-3, 4, -5)$. La direzione ortogonale a entrambe le rette è individuata dal vettore $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 10(4, 3, 0)$. Quindi, il piano π passante per s e ortogonale a entrambe le rette può essere visto come il piano passante per il punto $Q \equiv (-5, 1, -4) \in s$ (ottenuto per $t = 0$) e avante vettore di direzione $(4, 3, 0)$. Così, si ha

$$\pi \ : \ 4(x + 5) + 3(y - 1) + 0(z + 4) = 0$$

ossia $\pi \ : \ 4x + 3y + 17 = 0$. La distanza $d(r, s)$ tra r ed s coincide con la distanza tra il punto $P \equiv (5, 1, 6) \in r$ (ottenuto per $t = 0$) e il piano π, ossia

$$d(r, s) = d(P, \pi) = \frac{|20 + 3 + 17|}{\sqrt{16 + 9}} = 8 \, .$$

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 \sin t \\ y = t^2 \cos t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in [-1, 1] .$$

(a) Calcolare la lunghezza di γ .

(b) Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma xyz^2 \mathrm{d}s .$$

Soluzioni

Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza γ .

(a) Si ha

$$\begin{cases} x' = 2t \sin t + t^2 \cos t \\ y' = 2t \cos t - t^2 \sin t \\ z' = 2 \end{cases}$$

e $\|f'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = 2 + t^2$. Pertanto γ è una curva regolare e

$$L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (2 + t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{14}{3} .$$

(b) Si ha

$$I = \int_\gamma xyz^2 \mathrm{d}s = 16 \int_{-1}^{1} t^6 (2 + t^2) \sin t \cos t \, \mathrm{d}t .$$

Poiché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ha $I = 0$.