Analisi e Geometria 1 **Seconda Prova** **22 Gennaio 2018 Compito E**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Questione di teoria: 8 punti. Esercizio 1: 11 punti. Esercizio 2: 11 punti.

Istruzioni: Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

Teoria

Questione di teoria. Enunciare e dimostrare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.* Utilizzando il teorema fondamentale, dedurre la formula (di Newton-Leibniz) per il calcolo degli integrali definiti. (8 punti)

Esercizi

Esercizio 1

(a) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{t}{1+t^2}\,y(t) = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Risposta:

(b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione lineare

$$y' + \frac{t}{1+t^2}\,y = 3t \tag{2}$$

Risposta:

(c) Stabilire se è convergente l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(1+t^2)^{3/2}}\,dt$$

Risposta:

Soluzioni

(a) L'equazione $y'(t) + \frac{t}{1+t^2}y(t) = 0$ è lineare omogenea e quindi anche separabile. Se la vediamo come equazione lineare omogenea, una primitiva $A(t)$ del coefficiente $a(t) = \frac{t}{1+t^2}$ è $A(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$. Dunque la soluzione generale è

$$Ce^{-A(t)} = Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} = \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{3}$$

La condizione iniziale $y(0) = 2$ del problema di Cauchy richiede $C = 2$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \tag{4}$$

(b) Ricordiamo che la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine

$$y' + a(t)\,y = f(t) \tag{5}$$

è data da

$$y(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}\, dt \tag{6}$$

dove $A(t)$ è una (qualunque) primitiva di $a(t)$, C è una costante arbitraria e $\int f(t)e^{A(t)}\, dt$ denota una (qualunque) antiderivata di $f(t)e^{A(t)}$. Nel nostro caso, la soluzione generale è dunque data da:

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} \int 3te^{\frac{1}{2}\ln(1+t^2)}\, dt & (7)\\ &= \frac{C}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \int 3t\sqrt{1+t^2}\, dt & (8)\\ &= \frac{C}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1+t^2)^{3/2} & (9)\\ &= \frac{C}{\sqrt{1+t^2}} + 1 + t^2 & (10)\end{aligned}$$

dove C è una costante reale arbitraria.

(c) La funzione integranda $\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(1+t^2)^{3/2}}$ è continua, e quindi integrabile, su ogni intervallo limitato $[0, b]$. Vale l'equivalenza asintotica:

$$\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(1+t^2)^{3/2}} \sim \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2} \qquad \text{per } t \to +\infty \tag{11}$$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(1+t^2)^{3/2}}\, dt$ esiste finito.

Esercizio 2. Si consideri la curva parametrizzata nello spazio $\mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = \left(\arctan 2t\,,\ -5\,,\ \frac{\ln\left(1+4t^2\right)}{4} \right)$$

con $t \in [0, +\infty)$.

(a) Determinare il piano osculatore in $t = 0$.
Risposta:

(b) Determinare la terna intrinseca $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ in $t = 0$.
Risposta:

$\mathbf{T}(0) =$ $\mathbf{N}(0) =$ $\mathbf{B}(0) =$

(c) Determinare il valore della curvatura in $t = 0$ e il centro del cerchio osculatore in $t = 0$.
Risposta:

Curvatura κ: Centro del cerchio osculatore:

Soluzione

(a) Poiché la seconda componente di $\alpha(t) = \left(\arctan 2t\,,\ -5\,,\ \frac{\ln\left(1+4t^2\right)}{4} \right)$ è costante ($y = -5$), la curva è piana: sta tutta sul piano $y = -5$. Pertanto, in ogni suo punto il piano osculatore coincide con il piano $y = -5$.

(b)

$$\alpha'(t) = \left(\frac{2}{1+4t^2}, 0, \frac{2t}{1+4t^2}, \right) \qquad \alpha''(t) = \left(\frac{-16t}{(1+4t^2)^2}, 0, \frac{2-8t^2}{(1+4t^2)^2} \right)$$

$$\alpha'(0) = (2,0,0) = 2\mathbf{e}_1 \qquad \alpha''(0) = (0,0,2) = 2\mathbf{e}_3$$

Per $t = 0$, abbiamo:

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} = (1,0,0) = \mathbf{e}_1 \tag{12}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|} = \frac{2\mathbf{e}_1 \times 2\mathbf{e}_3}{4} = -\mathbf{e}_2 \tag{13}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{e}_3 \tag{14}$$

Dunque la terna fondamentale $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ nel punto $C(0)$ è $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2)$

(c) La curvatura in $t = 0$ è data da

$$\kappa(0) = \frac{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3} = \frac{|2\mathbf{e}_1 \times 2\mathbf{e}_3|}{|2\mathbf{e}_1|^3} = \frac{1}{2}$$

Il centro del cerchio osculatore nel punto corrispondente a $t = 0$ è

$$\alpha(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\mathbf{N} = (0, -5, 0) + 2(0, 0, 1) = (0, -5, 2)$$